Feuille 21
Analyse complexe.

Dans toute la feuille, on désigne par Ω un ouvert de $\mathbf{C}$, et par $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω. On note $D(x,r)$ (respectivement $\overline{D}(x,r)$) le disque ouvert (respectivement fermé) de centre x et de rayon r.

Exercice 1. Vrai ou faux

1. Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{C}$ une fonction de classe C^∞. Alors la fonction $g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ définie par $g(z) = f(\Re z, \Im z)$ est holomorphe.
2. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ est telle que $\bar{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$, alors f est constante.
3. L'anneau $\mathcal{H}(\Omega)$ est intègre si et seulement si Ω est connexe.
4. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ a une infinité de zéros dans un ensemble borné, alors f est nulle.
5. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et si $D(0,1) \subset \Omega$, alors $f(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{e^{it}} \, \mathrm{d}t$.

Exercice 2. Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. On suppose que $z_0 \in \mathbf{C}$ et $R > 0$ sont tels que $D(z_0, R) \subset \Omega$. On rappelle qu'alors f admet un développement en série entière au voisinage de z_0 de la forme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

dont le rayon de convergence est au moins R. Soit $r < R$.

1. Montrer que pour tout entier n, on a

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} \, \mathrm{d}\theta.$$

   En déduire que

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{r^n} \sup_{z \in \partial D(z_0, r)} |f(z)|.$$

   Quel est le cas d'égalité ? Que retrouve-t-on pour $n = 0$?
2. Soit g une fonction entière vérifiant $|g(z)| \leqslant P(|z|)$ pour tout $z \in \mathbf{C}$, où P est un polynôme. Montrer que g est un polynôme.

Exercice 3. Théorème de Montel

Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{H}(\Omega)$ telle que, pour tout compact $K \subset \Omega$, on ait

$$\sup_n \sup_{z \in K} |f_n(z)| < +\infty.$$

On va montrer qu'il existe une sous-suite de (f_n) qui converge uniformément sur les compacts de Ω.

1. Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $z_0 \in \Omega$, $r > 0$, $\delta > 0$ tels que $\overline{D}(z_0, r + \delta) \subset \Omega$. Montrer que

$$\sup_{z \in \overline{D}(z_0, r)} |f'(z)| \leqslant \frac{1}{\delta} \sup_{z \in \overline{D}(z_0, r+\delta)} |f(z)|.$$

2. Soit D un disque fermé inclus dans Ω. Montrer à l'aide du théorème d'Ascoli que (f_n) admet une sous-suite qui converge uniformément sur D.
3. Montrer qu'il existe une famille dénombrable de disques (D_k) vérfiant $\overline{D_k} \subset \Omega$ et $\bigcup_k D_k = \Omega$.
4. Conclure. La fonction limite est-elle dans $\mathcal{H}(\Omega)$?

Exercice 4. Lemme de Schwarz

Soit $D = D(0,1)$ et $f : D \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe telle que $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leqslant 1$ pour tout $z \in D$.

1. Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $g : D \to \mathbf{C}$ telle que $f(z) = zg(z)$ pour tout $z \in D$.
2. Montrer à l'aide du principe du maximum que $|f(z)| \leqslant |z|$ pour tout $z \in D$.
3. On suppose de plus que'il existe $a \in D \setminus \{0\}$ tel que $|f(a)| = |a|$. Montrer qu'il existe un nombre complexe λ de module 1 tel que $f(z) = \lambda z$ pour tout $z \in D$.

Exercice 5. Transformations de Möbius

Soit $D = D(0,1)$. On note G le groupe des automorphismes holomorphes de D, c'est-à-dire des fonctions bijectives $f : D \to D$ telles que f et f^{-1} sont holomorphes.

1. Soit $a \in D$. Pour $z \in D$, on pose $\phi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Montrer que la fonction ϕ_a ainsi définie est dans G.
2. Montrer à l'aide de l'exercice précédent que tout élément de G est de la forme $\lambda\phi_a$, pour λ un nombre complexe de module 1 et $a \in D$.

Exercice 6. Homographies et automorphismes du demi-plan supérieur

Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbf{C})$, on définit l'application

$$h_M : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}.$$

1. Montrer que si $M, N \in GL(2, \mathbf{C})$ et $z \in \mathbf{C}$ est tel que la composition a un sens, on a
$$h_M(h_N(z)) = h_{MN}(z).$$
2. Soit $P = \{z \in \mathbf{C} : \Im(z) > 0\}$ le demi-plan supérieur et $A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$. Montrer que h_A induit une bijection de P dans $D(0,1)$.
3. A l'aide de l'exercice précédent, déterminer que les automorphismes holomorphes de P sont exactement les transformations de la forme h_M, où $M \in GL(2, \mathbf{R})$ vérifie $\det M > 0$.