Probabilités 1, généralités.

Exercice 1. Une formule indispensable

Montrer que si X est une variable aléatoire positive et intégrable, on a

$$\mathbf{E}X = \int_0^\infty \mathbf{P}(X > t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposer une formule pour calculer

$$\mathbf{E}(X^p),$$

avec $p \geqslant 1$.

Exercice 2. Calcul d'une loi, formule de transfert

1. Enoncer la formule de transfert.
2. Soient X et Y deux v.a. indépendantes de loi $\mathcal{U}[0,1]$. Calculer la densité de la loi $\frac{X}{Y}$.

Exercice 3. Quelques questions de cours

On rappelle que si X est une v.a.r., sa fonction de répartition est donnée par, $t \in \mathbf{R}$,

$$F_X(t) = P(X \leqslant t).$$

1. Soit X une v.a.r.. Donner les propriétés de F_X.
   Donner les liens classiques entre la fonction de répartition F_X et la loi de X.
2. Soit $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un échantillon d'un loi de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit $X_{(1)} = \min\{X_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ et $X_{(n)} = \max\{X_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$, donner grace à la fonction de répartition, la loi de $X_{(1)}$ et $X_{(n)}$.
3. Soit (X, Y) un couple de v.a. Donner la définition de la fonction de répartition de (X, Y) et ses liens avec l'éventuelle densité du couple. Donner la loi de $(X_{(1)}, X_{(n)})$ de la question précédente.
4. Soit $(X_i)_{i\in\mathbf{N}}$ un échantillon d'une loi réelle. Tracer la fonction de répartition empirique

$$F_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n 1_{\{X_i\leqslant t\}}.$$

Exercice 4. Matrices aléatoires

Pour un entier $n > 0$, soient $(A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ des variables aléatoires indépendantes de loi définie par $\mathbf{P}(A_{i,j} = 1) = \mathbf{P}(A_{i,j} = -1) = 1/2$. On pose $X = \det A_{i,j}$. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

Exercice 5. Escalier du diable

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. vérifiant $\mathbf{P}(X_1 = 0) = \mathbf{P}(X_1 = 2) = 1/2$. On pose

$$Z = \sum_{n=1}^\infty \frac{X_n}{3^n}.$$

Montrer que la fonction de répartition de Z est une fonction continue qui est presque partout dérivable et de dérivée nulle.

Exercice 6. Inégalité de Hoeffding

1. Montrer que si $p \in [0,1]$, la fonction $f : x \mapsto -px + \ln(1-p+pe^x)$ vérifie $f''(x) \leqslant 1/4$ et $f(x) \leqslant x^2/8$.
2. Soient $a < b$ deux réels, et soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[a,b]$ et telle que $\mathbf{E}X = 0$. Montrer que pour tout $\lambda > 0$,

$$\mathbf{E}\exp(\lambda X) \leqslant \exp\left(\lambda^2 \frac{(b-a)^2}{8}\right).$$

   Indication. *Se ramener au cas où $b - a = 1$ et utiliser la question précédente avec l'inégalité suivante que l'on montrera*

$$e^{\lambda X} \leqslant (b-X)e^{\lambda a} + (X-a)e^{\lambda b}.$$

3. Soit (X_n) une suite de variables i.i.d. de même loi que X. Montrer que pout tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}(X_1 + \cdots + X_n \geqslant \varepsilon n) \leqslant \exp\left(-n\frac{2\varepsilon^2}{(b-a)^2}\right).$$

Exercice 7. Pseudo-inverse et simulation

Soit X une variable aléatoire. On note F sa fonction de répartition, définie pour $x \in \mathbf{R}$ par $F(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x)$. On introduit une fonction $G :]0,1[\to \mathbf{R}$ par

$$G(t) = \inf\{x : F(x) \geqslant t\}.$$

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que $G(U)$ a même loi que X.