Convergences, théorèmes limites

Exercice 1.
Soit X_n une v.a. de loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. Quelle est la limite en loi de la suite $\left(\frac{X_n}{n}\right)$?

Exercice 2.
Soient (X_n) et X des v.a., et $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue. Montrer que $X_n \longrightarrow X$ implique $\phi(X_n) \longrightarrow \phi(X)$ pour chacune des notions de convergence : presque sûre, en probabilité, en loi.

Exercice 3.
Soit $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ continue. Calculer à l'aide de la loi des grands nombres

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

Exercice 4.
Soit (X_n) et X des v.a.r. ; on note $F_Y(t) = \mathbf{P}(Y \leqslant t)$ la fonction de répartition d'une v.a.r. Y.

1. Rappeler le théorème qui donne le lien entre la convergence de F_{X_n} et la convergence en loi de (X_n) vers Y.
2. Donner un exemple où $X_n \to X$ en loi et par contre F_{X_n} ne converge pas simplement vers F_X.

Exercice 5.

1. Montrer qu'une somme de n variables indépendantes de Poisson de paramètre 1 suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(n)$.
2. Calculer à l'aide du théorème central limite

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$

Exercice 6.
Soit (X_n) un échantillon de loi Y, v.a.r. de densité f. Donner la loi de $\max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$, $\inf_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$ et enfin celle du couple $(\max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i, \inf_{1\leqslant i\leqslant n} X_i)$.

Exercice 7.
Soit (X_n) une suite de v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1. On pose $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

1. Montrer que la suite $\left(\frac{Y_n}{\ln n}\right)$ converge en probabilité vers 1.
2. Montrer que la suite $(Y_n - \ln n)$ converge en loi et expliciter la limite.