Probabilités 4 : autour du lemme de Borel–Cantelli

Exercice 1. Cours

Enoncer et démontrer Borel–Cantelli.

Exercice 2. Soit (X_n) une suite de variable aléatoire indépendantes. On suppose que la série $\sum X_n$ converge presque sûrement. Montrer que pour tout $a > 0$, on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(|X_n| > a) < +\infty.$$

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires exponentielles de paramètre 1, indépendantes. Montrer que

$$P\left(\limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\log n} = 1\right) = 1.$$

On pourra montrer d'une part que

$$\forall a > 1,\ \limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\log n} \leqslant a,\ \ p.s.$$

et que

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\log n} \geqslant 1,\ \ p.s.$$

Exercice 4.

1. Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\sum_{n\in\mathbf{N}} P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) < +\infty$. Montrer alors que (X_n) converge vers X presque sûrement.
2. Supposons maintenant que pour pour un certain $r > 0$, $\sum_{n\in\mathbf{N}} E(|X_n - X|^r) < +\infty$. Montrer alors que (X_n) converge vers X presque sûrement.

Exercice 5. Vers la loi du logarithme itéré, Foata-Fuch p. 252

Soit (X_n) un échantillon de loi $(\delta_{-1} + \delta_1)/2$. On note $S_n = X_1 + \cdots X_n$.

1. Montrer que pour tout $u \in \mathbf{R}$,
$$\cosh u \leqslant e^{u^2/2}.$$
2. Montrer que, pour tout $a > 0$ et $u \geqslant 0$,
$$P(S_n \geqslant a) \leqslant \frac{E(e^{uS_n})}{e^{ua}}$$
3. En déduire que
$$P(S_n \geqslant a) \leqslant e^{-\frac{a^2}{2n}},$$
et
$$P(|S_n| \geqslant a) \leqslant 2e^{-\frac{a^2}{2n}},$$
4. Montrer enfin que
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2n\log n}} \leqslant 1.$$
C'est un théorème de Steinhaus de 1922. La loi du logarithme itéré dit que
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log n}} = 1 \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log n}} = -1,$$
et c'est quand même bien plus compliqué à démontrer (Khintchine, 1924).

Exercice 6.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X+Y \in L^1$. Montrer que X et Y sont dans L^1.