Université Claude Bernard Mathématiques
Agrégation — préparation à l'écrit d'analyse.

Feuille 13
Probabilités 2 : autour des lois usuelles

Les lois classiques : on dit qu'une variable aléatoire X suit ...

... une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$ si $\mathbf{P}(X=1)=p$, $\mathbf{P}(X=0)=1-p$.

... une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbf{N}$, $p \in [0,1]$ si $\mathbf{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

... une loi de Poisson de paramètre $\theta \in \mathbf{R}^+$ si $\mathbf{P}(X=k)=e^{-\theta}\theta^k/k!$ pour $k \in \mathbf{N}$.

... une loi Gaussienne d'espérance $m \in \mathbf{R}$ et de variance σ^2 ($\sigma \in \mathbf{R}^+$), notée $N(m,\sigma^2)$, si elle a même loi que $m+\sigma Y$, où Y a pour densité

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-x^2/2\right).$$

... une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1]$ si $\mathbf{P}(X=k)=(1-p)^k p$ pour $k \in \mathbf{N}$.

... une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbf{R}_*^+$ si elle a pour densité $x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{x\geqslant 0}$.

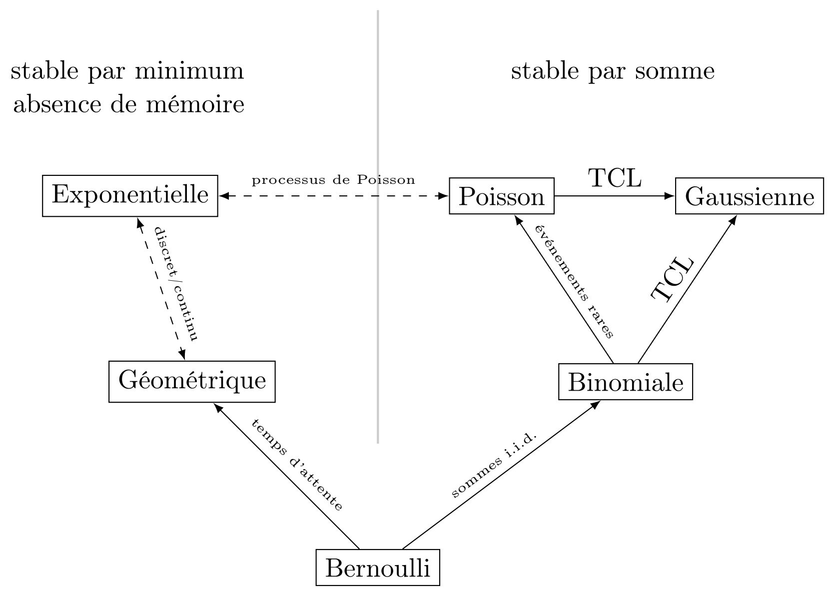

Figure 1 – Relations entre les lois classiques.

Exercice 1. Expliquez la signification des flèches non pointillées de la figure 1. On justifiera la convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson par un calcul de fonctions caractéristiques.

Exercice 2. Fonction caractéristique et moments

1. Soit X une v.a. telle que $\mathbf{E}|X|^k < +\infty$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. On note $\Phi_X : t \mapsto \mathbf{E}\left[e^{itX}\right]$ sa fonction caractéristique. Montrer que Φ_X est de classe C^∞ et que $\mathbf{E}X^k = i^{-k}\Phi_X^{(k)}(0)$.
2. Calculer la fonction caractéristique de la loi gaussienne et la loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice 3. Calculs de lois

Soient X, Y deux v.a. indépendantes de loi $N(0,1)$.

1. Quelle est la loi de X^2+Y^2 ?
2. Déterminer la densité de X/Y (on l'appelle loi de Cauchy).

Exercice 4. Absence de mémoire

1. Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbf{N}^*$. Montrer que si X suit une loi géométrique alors elle vérifie la propriété
$$\mathbf{P}(X \geqslant m+n \,|\, X \geqslant m) = \mathbf{P}(X \geqslant n)$$
pour tous m, $n \in \mathbf{N}$.
2. Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbf{R}^+$. Montrer que si X suit une loi exponentielle alors elle vérifie la propriété
$$\mathbf{P}(X \geqslant s+t \,|\, X \geqslant s) = \mathbf{P}(X \geqslant t)$$
pour tous s, $t \in \mathbf{R}^+$.

Exercice 5. Loi exponentielle vs. loi géométrique

1. Montrer que la partie entière d'une v.a. de loi exponentielle suit une loi géométrique.
2. Montrer que si $p_n \to 0$ et X suit une loi de géométrique alors $p_n X$ converge vers une loi exponentielle.

Exercice 6. Domination stochastique

Soient X et Y deux v.a. réelles. On dit que Y majore stochastiquement X (on écrit $X \leqslant_{st} Y$) si, pour tout réel t, on a
$$\mathbf{P}(X \geqslant t) \leqslant \mathbf{P}(Y \geqslant t).$$

1. Montrer que $X \leqslant_{st} Y$ si et seulement si, pour toute fonction croissante, $\mathcal{C}^1$ et bornée $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, on a
$$\mathbf{E}h(X) \leqslant \mathbf{E}h(Y).$$
2. Soient X et Y des v.a. indépendantes vérifiant $X \leqslant_{st} Y$. Montrer que $\mathbf{P}(X \leqslant Y) \geqslant 1/2$.