

**Feuille 3 de probabilités**  
Convergences, théorèmes limites

**Exercice 1.**

Soit  $X_n$  une v.a. de loi uniforme sur  $\{1, \dots, n\}$ . Quelle est la limite en loi de la suite  $\left(\frac{X_n}{n}\right)$  ?

**Exercice 2.**

Soient  $(X_n)$  et  $X$  des v.a., et  $\phi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  continue. Montrer que  $X_n \rightarrow X$  implique  $\phi(X_n) \rightarrow \phi(X)$  pour chacune des notions de convergence : presque sûre, en probabilité, en loi.

**Exercice 3.**

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  continue. Calculer à l'aide de la loi des grands nombres

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) dx_1 \cdots dx_n.$$

**Exercice 4.**

Soit  $(X_n)$  et  $X$  des v.a.r. ; on note  $F_Y(t) = \mathbf{P}(Y \leq t)$  la fonction de répartition d'une v.a.r.  $Y$ .

1. Rappeler le théorème qui donne le lien entre la convergence de  $F_{X_n}$  et la convergence en loi de  $(X_n)$  vers  $Y$ .
2. Donner un exemple où  $X_n \rightarrow X$  en loi et par contre  $F_{X_n}$  ne converge pas simplement vers  $F_X$ .

**Exercice 5.**

1. Montrer qu'une somme de  $n$  variables indépendantes de Poisson de paramètre 1 suit une loi de Poisson  $\mathcal{P}(n)$ .
2. Calculer à l'aide du théorème central limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}.$$

**Exercice 6.**

Soit  $(X_n)$  un échantillon de loi  $Y$ , v.a.r. de densité  $f$ . Donner la loi de  $\max_{1 \leq i \leq n} X_i$ ,  $\inf_{1 \leq i \leq n} X_i$  et enfin celle du couple  $(\max_{1 \leq i \leq n} X_i, \inf_{1 \leq i \leq n} X_i)$ .

**Exercice 7.**

Soit  $(X_n)$  une suite de v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1. On pose  $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ .

1. Montrer que la suite  $\left(\frac{Y_n}{\ln n}\right)$  converge en probabilité vers 1.
2. Montrer que la suite  $(Y_n - \ln n)$  converge en loi et expliciter la limite.