

Feuille 15

Probabilités 4 : autour du lemme de Borel–Cantelli

Exercice 1. Cours

Énoncer et démontrer Borel–Cantelli.

Exercice 2. Soit (X_n) une suite de variable aléatoire indépendantes. On suppose que la série $\sum X_n$ converge presque sûrement. Montrer que pour tout $a > 0$, on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(|X_n| > a) < +\infty.$$

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires exponentielles de paramètre 1, indépendantes. Montrer que

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{X_n}{\log n} = 1\right) = 1.$$

On pourra montrer d'une part que

$$\forall a > 1, \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{X_n}{\log n} \leq a, \text{ p.s.}$$

et que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{X_n}{\log n} \geq 1, \text{ p.s.}$$

Exercice 4.

- Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\sum_{n \in \mathbf{N}} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) < +\infty$. Montrer alors que (X_n) converge vers X presque sûrement.
- Supposons maintenant que pour un certain $r > 0$, $\sum_{n \in \mathbf{N}} E(|X_n - X|^r) < +\infty$. Montrer alors que (X_n) converge vers X presque sûrement.

Exercice 5. Vers la loi du logarithme itéré, Foata-Fuch p. 252

Soit (X_n) un échantillon de loi $(\delta_{-1} + \delta_{1})/2$. On note $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

- Montrer que pour tout $u \in \mathbf{R}$,

$$\cosh u \leq e^{u^2/2}.$$

- Montrer que, pour tout $a > 0$ et $u \in \mathbf{R}$,

$$P(S_n \geq a) \leq \frac{E(e^{uS_n})}{e^{ua}}$$

- En déduire que

$$P(S_n \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{2n}},$$

et

$$P(|S_n| \geq a) \leq 2e^{-\frac{a^2}{2n}},$$

- Montrer enfin que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2n \log n}} \leq 1.$$

C'est un théorème de Steinhaus de 1922. La loi du logarithme itéré dit que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \log \log n}} = 1 \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \log \log n}} = -1,$$

et c'est quand même bien plus compliqué à démontrer (Khintchine, 1924).

Exercice 6.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X + Y \in L^1$. Montrer que X et Y sont dans L^1 .