Feuille 2

Exercice 1

Calculer pour $\alpha > 0$, la valeur de $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha t}\cos(t)dt$. Deux méthodes possibles.

Soit $X > 0$. On a $\Re(e^{it}) = \cos t$ donc $\displaystyle\int_0^X e^{-\alpha t}\cos(t)dt = \int_0^X e^{-\alpha t}\Re(e^{it}) = \Re\left(\int_0^X e^{(-\alpha+i)t}dt\right)$. Or

$$\int_0^X e^{(i-\alpha)t} = \left[\frac{e^{(i-\alpha)t}}{i-\alpha}\right]_0^X = \frac{e^{(i-\alpha)X}}{i-\alpha} - \frac{1}{i-\alpha}$$

De plus $\displaystyle\lim_{X\to\infty}\frac{e^{(i-\alpha)X}}{i-\alpha} = 0$ car $\alpha > 0$. Donc l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\cos(t)dt$ converge et

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}\cos(t)dt = \Re\left(-\frac{1}{i-\alpha}\right) = \Re\left(-\frac{-i-\alpha}{1+\alpha^2}\right) = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\ .$$

Deuxième méthode. On note $I_X = \displaystyle\int_0^X e^{-\alpha t}\cos(t)dt$. Par intégration par partie (appliquée deux fois) on obtient

$$\begin{aligned} I_X &= \left[\frac{e^{-\alpha t}\cos(t)}{-\alpha}\right]_0^X - \int_0^X \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\sin(t)dt \\ &= \frac{1}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha X}\cos(X)}{\alpha} - \left[\frac{1}{\alpha^2}e^{-\alpha t}\sin(t)\right]_0^X - \frac{1}{\alpha^2}\int_0^X e^{-\alpha t}\cos(t)dt \end{aligned}$$

En faisant tendre $X \to \infty$, on obtient l'égalité

$$I_\infty = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}I_\infty$$

Autrement dit $I_\infty = \dfrac{\alpha}{1+\alpha^2}$.

Exercice 2

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2+n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
Ce n'est rien d'autre qu'une somme de Riemann. (faire un dessin pour s'en convaincre)
On sait que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 f(x)dx$$

quand $n \to \infty$. *Quelles sont les conditions sur f ?*
f continue ou continue par morceaux suffisent. Ici, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2} \to \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$