## TD3 - Exercice 1

**Déterminons la limite :** $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2} dx$

Posons $f_n(x) = \mathbb{1}_{[0,n]}(x) \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2}$

$f_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-x/2}$ car $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{n \log\left(1 - \frac{x}{n}\right)}$

$n \log\left(1 - \frac{x}{n}\right) = -x + o(1)$ donc $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{-x+o(1)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-x}$

(Attention : Pour pouvoir passer à la limite, on doit parler en $o$ et non en équivalence !)

Cherchons maintenant la majoration de $f_n$ :

$$\begin{array}{cccll} & \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2} & \leq & e^{-x/2} & x \in [0,n] \\ \Leftrightarrow & \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \leq & e^{-x} & x \in [0,n] \\ \Leftrightarrow & 1 - \frac{x}{n} & \leq & e^{-x/n} & x \in [0,n] \\ \Leftrightarrow & 1 - y & \leq & e^{-y} & y \in [0,1] \end{array}$$

La suite $(f_n)$ est dominée par $x \mapsto e^{-x/2}$ qui est $L^1$. Elle converge vers cette même fonction.

Par le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n f_n(x)dx \;=\; \int_0^n \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \;=\; \int_0^n e^{-x/2}dx$$

**Déterminons la limite :** $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin(x^n)}{x^n(1+x)}dx$

Posons $f_n(x) = \frac{\sin(x^n)}{x^n(1+x)}$.

$$f_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \frac{1}{1+x} & x<1 \\ \frac{\sin(1)}{2} & x=1 \\ 0 & x>1 \end{cases}$$

Soit $n \geq 2$.

Pour $x \geq 1$ : $\left| \frac{\sin(x^n)}{x^n(1+x)} \right| \leq \frac{1}{x^2(1+x)}$

Pour $0 \leq x < 1$ : $\left| \frac{\sin(x^n)}{x^n(1+x)} \right| \leq \frac{1}{1+x}$ car $\sin(u) \leq u \; \forall \; u \in [0;1]$

Or, $g(x) = \frac{1}{x^2(1+x)}\mathbb{1}_{[1;+\infty[} + \frac{1}{1+x}\mathbb{1}_{[0;1[} \quad \in L^1([0;+\infty[, dx)$

Par le théorème de convergence dominée, $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x^n)}{x^n(1+x)}dx \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \ln(2)$

**Déterminons la limite :** $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x(x^2+1)^{1/n}}dx$

$$\frac{1}{x(x^2+1)^{1/n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x} \quad \forall\ x \geq 1$$

$\forall\ n \geq 1,\ \forall\ u \geq 1, u^{1/(n+1)} \leq u^{1/n}$

Donc, $\dfrac{1}{(1+x^2)^{1/(n+1)}} \geq \dfrac{1}{(1+x^2)^{1/n}}$

Ainsi, $n \mapsto \dfrac{1}{x(x^2+1)^{1/n}}$ est croissante positive sur $\mathbb{N}^*$

Par le théorème de convergence monotone, $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x(x^2+1)^{1/n}}dx \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_1^{\infty}\frac{1}{x} = +\infty$