D. Bazille
TD 3 (corrections proposées)
**Analyse :** Théorie de la mesure et intégration.

Exercice 1

En utilisant le théorème de Fubini et l'égalité $\frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$ valable pour $x > 0$, montrer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Soit $X > 1$ et $\varepsilon < 1$ deux nombres réels, pour pouvoir appliquer le théorème de Fubini, on doit d'abord s'intéresser à :

$$\int_\varepsilon^X \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x,$$

avant de passer aux limites. Utilisons l'indication :

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^X \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x &= \int_\varepsilon^X \sin(x)(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t)\mathrm{d}x \\ &= \int_\varepsilon^X \int_0^{+\infty} \sin(x)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Pour appliquer le théorème de Fubini, montrons par exemple que :

$$\int_\varepsilon^X \int_0^{+\infty} |\sin(x)\mathrm{e}^{-xt}|\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

est finie. Comme pour tout $x \in [\varepsilon, X]$ et $t > 0$, on a $|\sin(x)\mathrm{e}^{-xt}| \leq \mathrm{e}^{-xt}$, par croissance de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} |\sin(x)\mathrm{e}^{-xt}|\mathrm{d}t &\leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{x},\end{aligned}$$

et donc :

$$\int_\varepsilon^X \int_0^{+\infty} |\sin(x)\mathrm{e}^{-xt}|\mathrm{d}t\mathrm{d}x \leq \int_\varepsilon^X \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

cette dernière étant finie est tant qu'intégrale sur un segment d'une fonction continue. Ainsi, comme :

$$\left|\begin{array}{ccc} [\varepsilon, X] \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \sin(x)\mathrm{e}^{-xt}\end{array}\right.$$

est intégrable, on peut appliquer le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^X \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \int_\varepsilon^X \sin(x)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \int_\varepsilon^X \mathfrak{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \mathfrak{Im}(\int_\varepsilon^X \mathrm{e}^{(\mathrm{i}-t)x}\mathrm{d}x)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Intéressons-nous donc au calcul suivant, comme $t \in \mathbb{R}_+^*$, il n'y a pas de problème :

$$\int_\varepsilon^X \mathrm{e}^{(\mathrm{i}-t)x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{i}-t}(\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-t)X} - \mathrm{e}^{(\mathrm{i}-t)\varepsilon})$$

$$= \frac{1}{1+t^2}(\mathrm{e}^{-tX}(\sin(X) - t\cos(X)) + \mathrm{e}^{-t\varepsilon}(t\cos(\varepsilon) - \sin(\varepsilon)) + \mathrm{i}\frac{1}{1+t^2}(-t\sin(X) - \cos(X))\mathrm{e}^{-tX} + (t\sin(\varepsilon) + \cos(\varepsilon))\mathrm{e}^{-t\varepsilon}).$$

On peut donc continuer le calcul $(\star)$ :

$$\int_\varepsilon^X \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}((-t\sin(X) - \cos(X))\mathrm{e}^{-tX} + (t\sin(\varepsilon) + \cos(\varepsilon))\mathrm{e}^{-t\varepsilon})\mathrm{d}t.$$

Alors donc, en utilisant le théorème de convergence dominée, étudions séparément les limites lorsque $X \to +\infty$ de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tX}}{1+t^2}(-t\sin(X) - \cos(X))\mathrm{d}t,$$

et lorsque $\varepsilon \to 0$, de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t\varepsilon}}{1+t^2}(t\sin(\varepsilon) + \cos(\varepsilon))\mathrm{d}t.$$

Remarquons dans un premier temps que :

$$\forall t > 0, \frac{\mathrm{e}^{-tX}}{1+t^2}(-t\sin(X) - \cos(X)) \xrightarrow[X\to\infty]{} 0,$$

car en effet, pour tout $t > 0$, on a en utilisant l'inégalité triangulaire et la majoration du sinus et du cosinus par 1 :

$$0 \le |\frac{\mathrm{e}^{-tX}}{1+t^2}(-t\sin(X) - \cos(X))| \le \frac{1+t}{1+t^2},$$

et $t \mapsto \frac{1+t}{1+t^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$, car continue et admettant une limite finie en $+\infty$. Il existe donc $C > 0$ tel que :

$$0 \le |\frac{\mathrm{e}^{-tX}}{1+t^2}(-t\sin(X) - \cos(X))| \le C\mathrm{e}^{-tX} \xrightarrow[X\to\infty]{} 0.$$

Par théorème d'encadrement, on a donc :

$$\frac{\mathrm{e}^{-tX}}{1+t^2}(-t\sin(X) - \cos(X)) \xrightarrow[X\to\infty]{} 0.$$

Pour appliquer le théorème de convergence dominée, majorons la valeur absolue de l'intégrande par une application intégrable et indépendante de $X$. Comme $X > 1$ et $t > 0$, on a $tX > t$, et finalement $-tX < -t$, d'où par croissance de la fonction exponentielle que $\mathrm{e}^{-tX} \le \mathrm{e}^{-t}$. On peut donc en conclure que :

$$|\frac{\mathrm{e}^{-tX}}{1+t^2}(-t\sin(X) - \cos(X))| \le C\mathrm{e}^{-t}.$$

Notons que $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est clairement intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Le problème en 0 n'en est pas un, et pour $A$ réel, on a :

$$\int_0^A \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-A} \xrightarrow[A\to\infty]{} 1.$$

En appliquant le théorème de convergence dominée, on arrive à la conclusion que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tX}}{1+t^2}(-t\sin(X) - \cos(X))\mathrm{d}t \xrightarrow[X\to\infty]{} 0.$$

Reste donc, en faisant tendre $X \to \infty$ dans $(\star)$, l'égalité $(\star\star)$ :

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t\varepsilon}}{1+t^2}(t\sin(\varepsilon) + \cos(\varepsilon))\mathrm{d}t.$$

Dans un premier, montrons que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(\varepsilon)\mathrm{e}^{-t\varepsilon}}{1+t^2}\mathrm{d}t \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

Effectuons le changement de variable $u = \varepsilon t$ de manière à avoir :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{t\sin(\varepsilon)\mathrm{e}^{-t\varepsilon}}{1+t^2}\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty}\frac{\frac{u}{\varepsilon}\sin(\varepsilon)\mathrm{e}^{-u}}{1+(\frac{u}{\varepsilon})^2}\frac{\mathrm{d}u}{\varepsilon}\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{u\sin(\varepsilon)\mathrm{e}^{-u}}{\varepsilon^2+u^2}\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Majorons alors, avec l'inégalité $|\sin(x)| \leq |x|$ pour tout $x$ et d'autres inégalités faciles :

$$\begin{aligned}|\int_0^{+\infty}\frac{t\sin(\varepsilon)\mathrm{e}^{-t\varepsilon}}{1+t^2}\mathrm{d}t| &= |\int_0^{+\infty}\frac{u\sin(\varepsilon)\mathrm{e}^{-u}}{\varepsilon^2+u^2}\mathrm{d}u|\\ &\leq \int_0^{+\infty}|\frac{u\sin(\varepsilon)\mathrm{e}^{-u}}{\varepsilon^2+u^2}|\mathrm{d}u\\ &= \int_0^{1}|\frac{u\sin(\varepsilon)\mathrm{e}^{-u}}{\varepsilon^2+u^2}|\mathrm{d}u + \int_1^{+\infty}|\frac{u\sin(\varepsilon)\mathrm{e}^{-u}}{\varepsilon^2+u^2}|\mathrm{d}u\\ &\leq \varepsilon\int_0^{1}\frac{u}{\varepsilon^2+u^2}\mathrm{d}u + \sin(\varepsilon)\int_1^{+\infty}u\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u\\ &= \frac{\varepsilon}{2}\ln(\varepsilon^2+1) - \frac{\varepsilon}{2}\ln(\varepsilon^2) + \frac{2\sin(\varepsilon)}{\mathrm{e}}\\ &\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0,\end{aligned}$$

clair par croissance comparée. On a démontré ce que l'on voulait par encadrement.
Reste à montrer que :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos(\varepsilon)\mathrm{e}^{-t\varepsilon}}{1+t^2}\mathrm{d}t \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \frac{\pi}{2}.$$

Pour ceci, appliquons le théorème de convergence dominée. Comme par continuité $\cos(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 1$ et pour tout $t$, $\mathrm{e}^{-t\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 1$, on a que :

$$\forall t > 0, \frac{\cos(\varepsilon)\mathrm{e}^{-t\varepsilon}}{1+t^2} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \frac{1}{1+t^2}.$$

De plus, de manière évidente on a aussi :

$$\forall \varepsilon > 0, |\frac{\cos(\varepsilon)\mathrm{e}^{-t\varepsilon}}{1+t^2}| \leq \frac{1}{1+t^2},$$

avec $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
La théorème de convergence dominée s'applique, et on a :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos(\varepsilon)\mathrm{e}^{-t\varepsilon}}{1+t^2}\mathrm{d}t \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, en faisant tendre $\varepsilon \to 0$ dans $(\star\star)$, on obtient bien :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$