Feuille 4 – Exercice 2 : Convergence dans L^p -

Préparation à l'écrit d'Analyse – Maxime HODIER

Exercice 2. La convergence dans L^p entraîne la convergence presque partout d'une sous-suite.

Soit $p \in [1, +\infty[$, et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^p(\mathbb{R})$ tel que $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ dans L^p, *i.e.*, $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$. On veut montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ qui converge presque partout vers f.

Principe Général :

Pour $(a_n)_n \in (E, \|\cdot\|)$, on a : $\quad a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l \in E \iff \|a_n - l\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc il existe un n_0 tel que : $\|a_{n_0} - l\| \leqslant 1$.

De même, il existe $n_1 > n_0$ tel que : $\|a_{n_1} - l\| \leqslant \frac{1}{2}$.

$\vdots$

Il existe $n_k > n_{k-1}$ tel que $\|a_{n_k} - l\| \leqslant \frac{1}{2^k}$. On construit ainsi une sous-suite $(a_{n_k})_k$ de (a_n) telle que :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|a_{n_k} - l\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$$

On peut également tout passer à une certaine puissance $b > 0$ pour obtenir : $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|a_{n_k} - l\|^b < \infty$

Dans notre cas : $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|f_{n_k} - f\|_p^p < \infty$, *i.e.*, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} |f_{n_k} - f|^p \, \mathrm{d}\mu \right) < \infty$.

Comme le terme générale de l'intégrale est positif, par Fubini-Tonelli, on peut permuter la somme et l'intégrale et on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} |f_{n_k} - f|^p}_{g} \, \mathrm{d}\mu < \infty$$

Comme g est positive et intégrable, g est finie μ-presque partout. D'où, il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mu(A) = 0$ et il existe $\widetilde{f}_{n_k}$ et $\widetilde{f}$ des représentants respectivement de f_{n_k} et f tel que :

$$\forall x \notin A \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |\widetilde{f}_{n_k}(x) - \widetilde{f}(x)|^p < \infty$$

Ainsi, pour tout $x \notin A$, $\quad \widetilde{f}_{n_k}(x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{f}(x)$.

Donc f_{n_k} converge μ-presque partout vers f.

Pour $p = +\infty$. On a alors : $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui implique qu'il existe $A \in \mathcal{F}$, $\mu(A) = 0$ tel que f_n converge uniformément vers f sur A.

Ainsi, f_n converge simplement vers f sur A d'où $f_n \longrightarrow f$ μ-presque partout (pas besoin d'extraire de sous-suite).