Feuille 2 – Exercice 3 : Convergence d'intégrales impropres -

Préparation à l'écrit d'Analyse – Maxime HODIER

Exercice 3.

Étudier la convergence des intégrales impropres suivantes :

(1) $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{dt}$

Réponse.

Cette intégrale est généralisée pour une seule raison, en 0. En effet, ln n'est pas définie en 0 et $\lim\limits_{t\to 0} \ln(t) = -\infty$.

Pour étudier ce problème en 0, il faut étudier et "travailler" sur le terme général.

On a $\dfrac{\ln t}{1+t} \underset{t\to 0}{\sim} \ln t$ *et* $t \longmapsto \ln t$ est de signe constant sur $]0,1]$ et est intégrable sur $]0,1]$ (Car $t\ln t - t$ est une primitive de $\ln t$ qui est bien définie sur $[0,1]$).

D'où, par le théorème suivant :

> **Théorème 1** (Règle d'équivalence).
> *Si les termes généraux de deux intégrales sont équivalents et de même signe constant à partir d'un certain rang, alors les intégrales sont de même nature.*

$\frac{\ln(t)}{1+t}$ est intégrable sur $]0,1]$ et donc l'intégrale J converge.

(2) $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\cosh(t)-\cos(t)}{t^{5/2}}\,\mathrm{dt}$

Réponse.

Un seul problème en 0 à cause du $t^{5/2}$ au dénominateur.

Le problème étant en 0 et ayant du cos et du cosh au numérateur, on pense à faire un développement limité en 0. D'où :

$$\cosh(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + o(t^3) \qquad \textit{et} \qquad \cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)$$

D'où :

$$\frac{\cosh(t)-\cos(t)}{t^{5/2}} = \frac{t^2 + o(t^3)}{t^{5/2}} = \frac{1+o(t)}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Or, $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est de signe constant positif et intégrable sur $]0,1]$. D'où : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}$ converge.

Donc, par le **Théorème 1**, l'intégrale J converge.

(3) $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-\sqrt{1-t}}\,\mathrm{dt}$

Réponse.

Le problème est en 0 car pour $t = 0$ on obtient 0 au dénominateur.

En regardant le dénominateur, on pense à faire le conjugué d'où :

$$\frac{1}{1-\sqrt{1-t}} = \frac{1+\sqrt{1-t}}{1^1 - \sqrt{1-t}^2} = \frac{1+\sqrt{1-t}}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{2}{t}$$

Or, $t \longmapsto \dfrac{2}{t}$ est une fonction de signe constant sur $]0,1]$, PAR CONTRE son intégrale **diverge**. Ainsi, toujours par le **Théorème 1**, l'intégrale J diverge.

(4) $J = \displaystyle\int_0^{\infty} t\,\cos(t^3)\ \mathrm{dt}$

Réponse.

C'est une intégrale généralisée en $+\infty$ car $\cos(t)$ n'a pas de limite en $+\infty$.
Posons $u = t^3$, *i.e.*, $t = u^{1/3}$ et on a $\mathrm{dt} = \dfrac{1}{3\,u^{2/3}}$ du. Afin d'éviter un nouveau problème en 0 à cause du $\dfrac{1}{u^{2/3}}$, considérons l'intégrale suivante : $L = \displaystyle\int_1^X t\,cos(t^3)\ \mathrm{dt}$. D'où :

$$\int_1^X u^{1/3}\cos(u)\,\frac{u^{-2/3}}{3}\ \mathrm{du} = \frac{1}{3}\int_1^{X^3}\frac{\cos(u)}{u^{1/3}}\ \mathrm{du} = \frac{1}{3}\int_1^{X^3}(\sin(u))'\,u^{-1/3}\ \mathrm{du}$$

$$\left.\begin{array}{r}(u^{-1/3})' = \dfrac{-1}{3}u^{-4/3}\\ \cos(u) = (\sin(u))'\end{array}\right\} \overset{IPP}{\longrightarrow} \quad = \frac{1}{3}\left[\frac{\sin(u)}{u^{1/3}}\right]_1^{X^3} + \frac{1}{3}\int_1^{X^3}\frac{\sin(u)}{u^{4/3}}$$

Or,

$$\left[\frac{\sin(u)}{u^{1/3}}\right]_1^{X^3} \underset{X\to\infty}{\longrightarrow} -\sin(1) \qquad et \qquad \int_1^{X^3}\frac{\sin(u)}{u^{4/3}}\ \mathrm{du}\quad \text{converge car} \quad \left|\frac{\sin(u)}{u^{4/3}}\right| \leqslant \frac{1}{u^{4/3}}$$

Ainsi, d'après le **Théorème 1**, l'intégrale J est convergente.

(5) $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{1+t^2}\ \mathrm{dt}$

Réponse.

ATTENTION : La fonction étant paire, on aimerait écrire : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{1+t^2}\ \mathrm{dt} = 0$. Mais c'est **FAUX** !

Par définition des intégrales impropres : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{dt} = \lim_{X,Y\to+\infty}\int_{-X}^{Y} f(t)\ \mathrm{dt}$. Ainsi, les deux bornes ne tendent pas de la même manière vers l'infini et sont indépendantes ce qui fait que nous ne pouvons pas utiliser ici la parité de l'intégrande pour dire que $J = 0$.

On a donc deux problèmes en $\pm\infty$.
On a que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^2}\ \mathrm{dt}$ diverge car $\dfrac{t}{1+t^2}\underset{t\to\infty}{\sim}\dfrac{1}{t}$.
Or, $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ est strictement positive mais son intégrale diverge.
Donc l'intégrale : $\quad J = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^2}\ \mathrm{dt} + \int_{-\infty}^{0}\frac{t}{1+t^2}\ \mathrm{dt}$ diverge car la première intégrale diverge.

En effet, la somme de deux intégrales qui divergent est divergente. Cela vient également de la définition des bornes d'une intégrale impropre. Il n'y a donc pas de compensation possible entre les deux intégrales.

(6) $J = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{1}{1+t^4\,\sin^2(t)}\ \mathrm{dt}$

Réponse.
Le problème ici vient du sinus qui n'a pas de limite en $+\infty$ et peut venir "écraser" le t^4 et donc faire diverger l'intégrale.
Ce n'est pas le cas, l'intégrale J va converger.
Comme le terme général $\dfrac{1}{1+t^4\,\sin^2(t)}$ est de signe constant positif, il suffit de prouver la convergence de la série :

$$\sum_{k=0}^{\infty} J_k = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{1+t^4\,\sin^2(t)}\ \mathrm{dt}$$

pour conclure ensuite grâce à la relation de Chasles.
Essayons maintenant de majorer J_k :

$$\begin{aligned}
J_k &\leqslant \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{1+(k\pi)^4\,\sin^2(t)}\ \mathrm{dt} && \text{car}\quad t \geqslant k\pi \\
&\leqslant \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{1+(k\pi)^4\,\sin^2(t)}\ \mathrm{dt} && \text{par } \pi\text{−périodicité de } \sin^2(t) \\
&\leqslant 2\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{1+(k\pi)^4\,\sin^2(t)}\ \mathrm{dt} && \text{par parité de l'intégrande} \\
&\leqslant 2\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{1+(k\pi)^4\left(\dfrac{2t}{\pi}\right)^2}\ \mathrm{dt} && \text{car}\quad \sin(t) \geqslant \frac{2t}{\pi} \\
&\leqslant 2\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{1+(2k^2\pi t)^2}\ \mathrm{dt}
\end{aligned}$$

Ensuite, on fait le changement de variable $u = 2k^2\pi\,t \Longleftrightarrow t = \dfrac{u}{2k^2\pi}$; $\mathrm{dt} = \dfrac{\mathrm{du}}{2k^2\pi}$ et les bornes de l'intervalle deviennent donc 0 et $t = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \dfrac{u}{2k^2\pi} = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow u = k^2\pi^2$ et on obtient :

$$\begin{aligned}
J_k &\leqslant 2\int\limits_0^{k^2\pi^2} \frac{1}{1+u^2} \times \frac{1}{2k^2\pi}\ \mathrm{du} = \frac{1}{k^2\,\pi}\int\limits_0^{k^2\pi^2} \frac{1}{1+u^2}\ \mathrm{du} \leqslant \frac{1}{k^2\,\pi}\int\limits_0^{+\infty} \arctan'(u)\ \mathrm{du} \\
&\leqslant \frac{1}{k^2\pi}\left(\lim_{u\to+\infty} \arctan(u) - \arctan(0)\right) = \frac{1}{k^2\pi} \times \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2\,k^2}
\end{aligned}$$

Or, $\frac{1}{k^2}$ est le terme général d'une série convergente (Série de Riemann), d'où par le théorème de comparaison la série $\sum J_k$ converge.
De plus, par la relation de Chasles on a pour $X \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^X \frac{1}{1+t^4 \sin^2(t)} \, \mathrm{dt} = \sum_{k=0}^{X} J_k$$

car le terme général $\frac{1}{1+t^4 \sin^2(t)}$ est intégrable entre de bornes finie et comme $\sum J_k$ est convergente, on peut passer à la limite quand $X \to +\infty$ et on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4 \sin^2(t)} \, \mathrm{dt} = \sum_{k=0}^{+\infty} J_k$$

Ainsi, par égalité et convergence de la série, l'intégrale J converge.
De plus, on sait que la fonction $t \longmapsto \frac{1}{1+t^4 \sin^2(t)}$ est paire donc on a la convergence de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^4 \sin^2(t)} \, \mathrm{dt}$$