D. Bazille
TD 4 (corrections proposées)
Analyse : Espaces L^p

Exercice 3 : (Inclusions)

Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\mu(X) < +\infty$.

b) Pour tous $1 \leq p < q \leq +\infty$, on a $L^p(X, \mathcal{F}, \mu) \supseteq L^q(X, \mathcal{F}, \mu)$.

On procède par double implication.
a) $\Rightarrow$ b) : Supposons que $\mu(X) < +\infty$. Prenons $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $p < q$, montrons que $L^q(X, \mathcal{F}, \mu) \subseteq L^q(X, \mathcal{F}, \mu)$. Soit $f \in L^q(X, \mathcal{F}, \mu)$. Comme dans les deux cas $p < +\infty$, il suffira de montrer que $\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu < +\infty$. Distinguons deux cas :
`[1er cas]` : Si $q \neq +\infty$, par définition, on a $\int_X |f|^q \mathrm{d}\mu < +\infty$. On travailler avec des inégalités dans $\bar{\mathbb{R}}$ car toutes les fonctions impliquées sont positives.

$$\begin{aligned}\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu &= \int_{|f|\leq 1} |f|^p \mathrm{d}\mu + \int_{|f|>1} |f|^p \mathrm{d}\mu \\ &\leq \int_{|f|\leq 1} 1 \mathrm{d}\mu + \int_{|f|>1} |f|^q \mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

car il est évident que si $x \in (|f| > 1)$, alors $|f(x)|^p \leq |f(x)|^q$. En effet, on a $p < q$ donc $p\ln(|f(x)|) < q\ln(|f(x)|)$ car $\ln(|f(x)|) > 0$. Par croissance de l'exponentielle on obtient l'inégalité voulue. On a alors :

$$\begin{aligned}\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu &\leq \mu(|f| \leq 1) + \int_{|f|>1} |f|^q \mathrm{d}\mu \\ &\leq \mu(X) + \underbrace{\int_X |f|^q \mathrm{d}\mu}_{=\|f\|_q^q},\end{aligned}$$

car $(|f| \leq 1) \subseteq X$ et $|f|$ est positive sur tout X. Finalement :

$$\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu \leq \mu(X) + \|f\|_q^q < +\infty.$$

`[2ème cas]` : Si $q = +\infty$. Alors il existe $M \in \mathbb{R}$, tel que $|f(x)| \leq M$ μ-p.p. On a alors :

$$\begin{aligned}\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu &\leq \int_X M^p \mathrm{d}\mu \\ &= M^p \mu(X) \\ &< +\infty.\end{aligned}$$

b) $\Rightarrow$ a) : Supposons que l'inclusion soit respectée pour tout réel p, q tels que précédemment. En particulier, on a $L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu) \subseteq L_1(X, \mathcal{F}, \mu)$. L'application $\mathbb{1}_X$ identiquement constante égale à 1 sur X est positive majorée, donc essentiellement bornée, ce qui signifie que $\mathbb{1}_X \in L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$. Ainsi, $\mathbb{1}_X \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$, ce qui signifie par définition :

$$\int_X \mathbb{1}_X \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Donc :

$$\mu(X) < +\infty.$$

On a démontré l'équivalence souhaitée.