

Rappel sur le rayon de cv: Gardon, Analyse p. 247.

Soit $\sum a_n z^n$ une S.E. $R := \sup \{ r \geq 0 \mid (|a_n r^n|)_{n \geq 0} \text{ est bornée} \}$

Lemme d'Abel
 $\Rightarrow$

(i) $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < R \Rightarrow \sum a_n z^n$ converge absolument

(ii) $\forall z \in \mathbb{C}, |z| > R \Rightarrow \sum a_n z^n$ diverge.

(iii) $\forall r \geq 0, r < R \Rightarrow \sum a_n z^n$ CVN sur $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$

Règle de d'Alembert: si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda \in [0, +\infty]$

Alors le rcv de $\sum a_n z^n$ est $R = \frac{1}{\lambda}$ avec les conventions habituelles: $\frac{1}{+\infty} = 0$ et $\frac{1}{0} = +\infty$.

Règle de Cauchy: si $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n} = \lambda \in [0, +\infty]$, alors le rcv est $R = \frac{1}{\lambda}$

Calcul de R_1 :

• $\forall \ell < 1, \sum X_n \ell^n$ converge donc $R_1 \geq 1$

• Par la Loi Forte des Grands Nombres, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{ps} \frac{1}{2}$, donc $\sum_{k=1}^n X_k \sim \frac{n}{2}$ ps.

Donc $R_1 \leq 1$ ps.

D'où $R_1 = 1$ ps.

Calcul de R_2 : Un cas où l'on se sert de la Règle de Cauchy.

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left(\prod_{i=1}^n X_i \right)^{1/n}$$

$$\text{Or, } \ln \left(\left(\prod_{i=1}^n X_i \right)^{1/n} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i \text{ car } \{X_i = 0\} \text{ est négligeable.}$$

De plus, $\ln$ étant $\mathcal{C}_b^0$ donc mesurable, $Y_i = \ln(X_i) \forall i \geq 1$ sont des V.A. iid.

$$\text{Ainsi, par la LGN forte, } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(X_i) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{ps} E(Y_1) = E(\ln(X_1)) = \int_0^1 \ln x dx = -1$$

$$\text{Donc } \ln \left(\left(\prod_{i=1}^n X_i \right)^{1/n} \right) \xrightarrow{ps} -1, \text{ qui donne } \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left(\prod_{i=1}^n X_i \right)^{1/n} = e^{-1} \text{ ps,}$$

et finalement $R_2 = e$ ps.