Feuille 3, Exercice 4

Rappels Deux théorèmes importants pour cet exercice :

On considère $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et (E, d) métrique.

Soit $f : E \times X \longrightarrow \mathbb{R}$

Théorème de continuité sous l'intégrale Soit $u_0 \in E$. Si :

(i) $\forall u \in E$, $x \mapsto f(u,x)$ est mesurable de $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

(ii) $\mu(dx)$-p.p., $u \mapsto f(u,x)$ est continue en u_0

(iii) $\exists g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ telle que $\forall u \in E$, $|f(u,x)| \leq g(x)$ $\mu(dx)$-pp

Alors la fonction $F(u) := \int_X f(u,x)\mu(dx)$ est définie en tout point $u \in E$ et est continue en u_0.

Théorème de dérivation sous le signe intégrale : On suppose ici que $E = I$ un intervalle ouvert non-vide de $\mathbb{R}$. Soit $u_0 \in I$. Si f vérifie :

(i) $\forall u \in I$, $f(u, \cdot) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$

(ii) $\mu(dx)$-pp, $\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, x)$ existe

(iii) $\exists g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ telle que $\forall u \in I$, $\mu(dx)_{pp}$ $|f(u,x) - f(u_0,x)| \leq g(x)|u - u_0|$

Alors la fonction $F(u) := \int_X f(u,x)\mu(dx)$ est définie en tout point $\in I$, dérivable en u_0 de dérivée $F'(u_0) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, x)\mu(dx)$

Remarque : En remplaçant (ii) par (ii)' : $\mu(dx)_{pp}$, $u \mapsto f(u,x)$ est dérivable sur I

et (iii) par (iii)' : $\mu(dx)_{pp}$, $\forall u \in I$, $\left|\frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\right| \leq g(x)$ où $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$

l'on obtient la dérivabilité de F sur tout I.

Source : Théorie de l'intégration, M. Briane et G. Pagès, p. 138 - 142

Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ borélienne.

1) Soit $x_0 \in [0,+\infty[$, posons $\varphi(x,t) = \dfrac{\arctan(x f(t))}{1+t^2}$. Alors :

(i) $\forall x \in [0,+\infty[$, $t \longmapsto \varphi(x,t)$ est borélienne comme composée de fonctions boréliennes

(ii) $\forall t \in [0,+\infty[$, $x \longmapsto \varphi(x,t)$ est continue en x_0 car arctan l'est.

(iii) $\forall x \in E$, $|\varphi(x,t)| \leq \dfrac{\pi}{2(1+t^2)} =: g(t)$ où $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\lambda)$ (✿)

Ainsi, par le théorème de continuité sous $\int$, $F(x) := \int_0^{+\infty} \varphi(x,t)$ est définie et continue en x_0 arbitraire, donc sur tout $\mathbb{R}_+$.

2) Remarquons que $\forall t \in [0,+\infty[$, $\varphi(x,t) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \mathbb{1}_{\{f>0\}} \dfrac{\pi}{(1+t^2)\times 2} =: \varphi_\infty(t)$

$\mathbb{1}_{\{f>0\}}$ est mesurable car $\{f>0\} = \underset{\text{borélienne}}{f^{-1}}(\underset{\text{borélien}}{\mathbb{R}_+^*})$ est un borélien, donc φ_∞ est mesur

De plus, par (✿) et le théorème de convergence dominée, $F(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \dfrac{\pi}{2} \displaystyle\int_{\{f>0\}} \dfrac{1}{1+t^2}\,dt$

3) (i) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x,\cdot)$ est bien définie et on a (✿) $\Rightarrow \varphi(x,\cdot) \in \mathcal{L}^1$

(ii)' $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \longmapsto \varphi(x,t)$ est dérivable car arctan l'est.

(iii)' $\forall t \in]0,+\infty[$, $\forall x \in]0,+\infty[$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = \dfrac{f(t)}{1+x^2 f^2(t)} \times \dfrac{1}{1+t^2}$ qui est compliqué à majorer quan $x \to 0$

Soit $\varepsilon > 0$. On note $V_\varepsilon = [\varepsilon,+\infty[$. Alors pour $x \in V_\varepsilon$:

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{|f(t)|}{1+\varepsilon^2 f^2(t)}$$ et l'on voudrait que $\dfrac{|f(t)|}{1+\varepsilon^2 f^2(t)} \leq C$ où $C \in \mathbb{R}_+^*$.

Cherchons C :

$$\frac{|f(t)|}{1+\varepsilon^2 f^2(t)} \leq C \iff |f(t)| \leq C + \varepsilon^2 f^2(t) C$$

$\leadsto$ • Si $|f(t)| \geq 1$, en prenant $C = \frac{1}{\varepsilon^2}$ c'est vrai

• Si $|f(t)| < 1$, en prenant $C = \frac{1}{\varepsilon^2} > 1$ c'est vrai aussi

Posons alors $C = \frac{1}{\varepsilon^2}$ et ainsi $\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leq C$ qui est intégrable, donc par le thm de dérivabilité sous $\int$, F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et même $\mathcal{C}^1$.

~~4) (a) $t \longmapsto \frac{f(t)}{1+t^2}$ est intégrable. F dérivable en 0 $\Rightarrow$ $\frac{F(x)-F(0)}{x} = \int_0^\infty \frac{\arctan(xf(t))}{x(1+t^2)}\,dt \xrightarrow[x>0]{x\to 0}$~~

4) Posons $\Psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ et $(\alpha) : \Psi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$

$$t \mapsto \frac{f(t)}{1+t^2}$$

<u>$(\alpha) \Rightarrow F$ est dérivable en 0</u> : Comme $\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leq \Psi(t)$ pour tout $x \in [0,+\infty[$ et que Ψ est intégrable, on peut appliquer le théorème de dérivabilité des $\int$ et l'on obtient ainsi la dérivabilité de F en 0.

<u>F dérivable en $0 \Rightarrow (\alpha)$</u> : Supposons que $\dfrac{F(x)-F(0)}{x} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xf(t))}{(1+t^2)x}\,dt \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x>0}]{} \ell \in \mathbb{R}$.

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de $]0,1[$ qui converge vers 0.

Posons $f_n(t) = \dfrac{\arctan(x_n f(t))}{x_n(1+t^2)}$, fonction mesurable positive pour tout $n \in \mathbb{N}$ et qui converge ponctuellement vers Ψ (car $\arctan(x) \underset{0}{\sim} x$).

On peut alors appliquer le lemme de Fatou :

$$\int_0^{+\infty} \liminf f_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \Psi(t)\,dt = \|\Psi\|_{1,]0,+\infty[} \leq \liminf \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \ell < \infty$$

D'où $\Psi \in \mathcal{L}^1(]0,+\infty[)$.