TD1 - Exercice 5

Soient (a_n) une suite complexe et $z \in \mathbb{C}$. On considère la série de terme général $u_n(z) := a_n n^{-z}$ et l'on définit dans $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\sigma_c := \inf \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum u_n(x) \text{ est convergente} \right\},$$

$$\sigma_a := \inf \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum u_n(x) \text{ est absolument convergente} \right\}.$$

Question 1 : Montrons que $\sigma_c \leq \sigma_a \leq \sigma_c + 1$.

· *Si* $\sum u_n(x)$ est converge absolument, alors $\sum u_n(x)$ est converge.

Donc, $\{x \in \mathbb{R} : \sum u_n(x) \text{ converge absolument}\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} : \sum u_n(x) \text{ converge}\}$.

D'où $\sigma_c \leq \sigma_a$.

· *Si* $\sum u_n(x)$ converge, alors $\sum \frac{a_n}{n^x}$ converge absolument.

Soit $\epsilon > 0$, alors $\left| \frac{a_n}{n^x} \cdot \frac{1}{n^{1+\epsilon}} \leq \frac{c}{n^{1+\epsilon}} \right| \quad$ où $c = \max\limits_{n>0} \left| \frac{a_n}{n^z} \right| < \infty$.

(Le max est en effet atteint car $u_n(x) \to 0$ par convergence de la série.)

Par le théorème de comparaison, la série de terme général $\left(\frac{a_n}{n^{x+1+\epsilon}} \right)$ converge absolument.

Ainsi, si $x \in \{\{x \in \mathbb{R} : \sum u_n(x) \text{ converge}\}$, alors $(x+1+\epsilon) \in \{x \in \mathbb{R} : \sum u_n(x) \text{ converge absolument}\}$.

Donc, $\{x \in \mathbb{R} : \sum u_n(x) \text{ converge}\} \subseteq (\{x \in \mathbb{R} : \sum u_n(x) \text{ converge absolument}\} - 1 - \epsilon)$

Donc, $\forall\ \epsilon > 0, \sigma_a - 1 - \epsilon \leq \sigma_c$.

D'où, si $\epsilon \to 0$, $\sigma_a \leq \sigma_c + 1$

· *Exemple* : *Si* $\mathrm{a}_n = 1\ \forall\ n$, alors $\sigma_a = \sigma_c$.

· *Exemple* : *Si* $\mathrm{a}_n = (-1)^n$, alors $\sigma_c = 0$ et $\sigma_a = 1$.

<u>Question 2 :</u> On suppose $\sum u_n(z_0)$ converge, montrons que $\sum u_n(z_0)$ converge $\forall\ z$ tq $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Re}(z_0)$.

Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k^{z_0}}$ et $f_n(z) = \frac{1}{n^{z-z_0}}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} u_n(z) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^z} = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^{z_0}} \cdot \frac{1}{n^{z-z_0}} \\
&= \sum_{n=1}^{N} (S_n - S_{n-1}) f_n(z) \\
&= \sum_{n=2}^{N} S_n f_n - \sum_{n=2}^{N} S_{n-1} f_n \\
&= \sum_{n=2}^{N} S_n f_n - \sum_{n=1}^{N} S_n f_{n+1} \\
&= \sum_{n=2}^{N} S_n (f_n - f_{n+1}) + S_N f_N - S_1 f_2 \\
&= \sum_{n=2}^{N} S_n \cdot \left(\frac{1}{n^{z-z_0}} - \frac{1}{(n+1)^{z-z_0}} \right) + S_N f_N - S_1 f_2
\end{aligned}$$

$N \to \infty \;\Rightarrow\; S_N f_N \to 0$

Posons $z - z_0 = \alpha + i\beta$ où $\alpha > 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^{z-z_0}} - \frac{1}{(n+1)^{z-z_0}} &= \frac{1}{n^{\alpha+i\beta}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha+i\beta}} \\
&= \frac{-1}{(n+1)^{\alpha+i\beta}} \cdot \left[1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+i\beta} \right] \\
&= \frac{-1}{(n+1)^{\alpha+i\beta}} \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{\alpha+i\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \right] \\
&= \frac{1}{(n+1)^{\alpha+i\beta}} \cdot \left[\frac{\alpha+i\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]
\end{aligned}$$

Donc, il existe $c > 0$ tel que $\forall\ n \geq 1$:

$$\left| \frac{1}{n^{z-z_0}} - \frac{1}{(n+1)^{z-z_0}} \right| \leq \frac{c}{n^{1+\alpha}}$$

Donc, il existe $c' > 0$:

$$|S_n(f_n - f_{n+1})| \leq \frac{c}{n^{1+\alpha}} \cdot \max_{n \in \mathbb{N}} S_n \leq \frac{c'}{n^{1+\alpha}}$$

Conclusion : C'est bien le terme général d'une série convergente.