EXERCICE 5 :

$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable

a) <u>NON</u> • <u>c-ex</u> : $f = \mathbb{1}_{\mathbb{N}}$

On a bien $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 0 < +\infty$

mais $f \not\to 0$

Bon c-ex mais elle n'est même pas continue

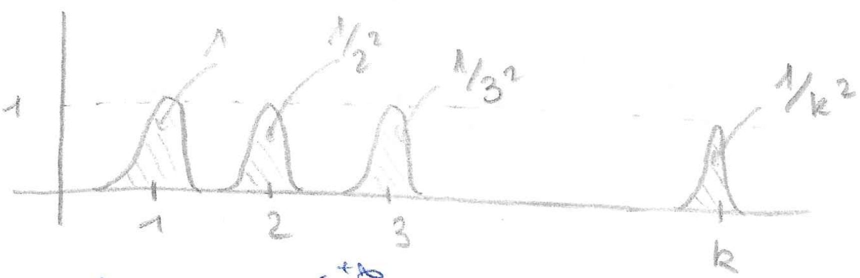
<u>Rqe</u> : Est ce que $f = \mathbb{1}_{\mathbb{N}}$ est continue par morceaux ?

<u>Def</u> : $\forall [a,b] \subset \mathbb{R}_+$ $f_{|[a,b]}$ est continue par morceaux signifie qu'il existe $a_0, \dots, a_n$ tels que $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ et

* $f_{|]a_i, a_{i+1}[}$ est continue
* $\lim\limits_{x \to a_i^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a_{i+1}^-}$ existent

Donc oui $f = \mathbb{1}_{\mathbb{N}}$ est continue par morceaux

• <u>c-ex</u> où f continue :



On a bien $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt < \infty$ et $f \not\to 0$

b) <u>oui</u> En effet, sinon soit $\alpha > 0$ tq $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \alpha$

On a $\forall t \in \mathbb{R}$ $f(t) \geq \alpha$ or $\int_0^{+\infty} \alpha\,dt$ est divergente donc $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ aussi. <u>ABSURDE</u>

c) voir a)

d) f est uniformément continue

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x, y \quad (|x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

Soient $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$. On a

$$\forall x, y \quad |x-y| < \eta \qquad f(y) - \varepsilon < f(x) < f(y) + \varepsilon$$

Ainsi
$$\int_x^{x+\eta} (f(y) - \varepsilon) dy < \int_x^{x+\eta} f(x)\, dy < \int_x^{x+\eta} (f(y) + \varepsilon)\, dy$$

d'où
$$-\varepsilon\eta + \int_x^{x+\eta} f(y) dy < f(x)\eta < \int_x^{x+\eta} f(y) dy + \varepsilon\eta$$

Donc
$$f(x) < \frac{1}{\eta} \int_x^{x+\eta} f(y)\, dy + \varepsilon$$
$$\leq \frac{1}{\eta} \int_x^{+\infty} f(y)\, dy + \varepsilon$$

Or $\int_x^{+\infty} f(y) dy$ est le reste d'une intégrale convergente, donc il tend vers 0 quand $x \to +\infty$. Ainsi,

$$\exists A \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \geq A \qquad \int_x^{+\infty} f(y)\, dy \leq \varepsilon\eta$$

d'où
$$f(x) \leq \frac{\varepsilon\eta}{\eta} + \varepsilon = 2\varepsilon \qquad \forall x \geq A$$

donc $f(x) \xrightarrow{x \to +\infty} 0$