La méthode de Laplace

Soient $a, b \in \mathbb{R} / a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ C^2

On sq' $\exists!\, c \in]a,b[\,/\, \|f\|_\infty = f(c)$, $f'(c) = 0$ et $f''(c) < 0$

$\forall t \in \mathbb{R}$ on pose : $\phi(t) = \int_a^b \exp(t f(x))\, dx$

$$\psi(t) = \exp(t f(c)) \sqrt{\frac{2\pi}{t|f''(c)|}}$$

1. Soient $A > 0$, $\delta > 0$

$\int_{-\delta}^{\delta} \exp(-tAx^2)\, dx$ en posant le changem^t de var. linéaire $u = \sqrt{2tA}\, x$

$$= \int_{-\sqrt{2tA}\delta}^{\sqrt{2tA}\delta} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{du}{\sqrt{2tA}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2tA}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-\sqrt{2tA}\delta ; \sqrt{2tA}\delta]}(u)\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

Ainsi $\sqrt{\frac{tA}{\pi}} \int_{-\delta}^{\delta} \exp(-tAx^2)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-\sqrt{2tA}\delta, \sqrt{2tA}\delta]}(u)\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$

$\Big\downarrow t \to +\infty$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du = 1$$

On a bien $\int_{-\delta}^{\delta} \exp(-tAx^2)\, dx \underset{t \to \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{tA}}$

2. Soit $\varepsilon \in]0;1[$

Comme f est C^2, on peut appliquer le thm de Taylor-Young

Quand $h \to 0$ on a :

$$f(c+h) = f(c) + hf'(c) + \frac{h^2}{2}f''(c) + o(h^2)$$

$$= f(c) + \frac{f''(c)}{2}h^2(1+o(1))$$

Ainsi $\exists \delta > 0 \ / \ \forall x \in [c-\delta; c+\delta]$

$$f(c) + (1+\varepsilon)\frac{(x-c)^2}{2}f''(c) \leq f(x) \leq f(c) + (1-\varepsilon)\frac{(x-c)^2}{2}f''(c)$$

C'est le δ qui nous permet de dire que pour $|h| \leq \delta$ on a $f(c+h) \leq f(c) + \frac{f''(c)h^2}{2}(1-\varepsilon)$

3. $f(x) \leq f(c) + (1-\varepsilon)\frac{(x-c)^2}{2}f''(c)$ (Pr le m̂ ε et m̂ δ que ②).

$$\exp(tf(x)) \leq \exp(tf(c)) \exp\left(t\frac{(1-\varepsilon)}{2}f''(c)(x-c)^2\right) \quad \forall t > 0$$

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} \exp(tf(x))dx \leq e^{tf(c)} \int_{-\delta}^{\delta} \exp\left(-t\frac{(1-\varepsilon)}{2}|f''(c)|u^2\right)du$$

Par ① on sait que $\int_{-\delta}^{\delta} \exp(-tAx^2)dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{tA}}$ qd $t \to +\infty$

Alors avec $A = \frac{(1-\varepsilon)}{2}|f''(c)|$ et par multiplicat° par $e^{t.f(c)}$ on a que :

$$e^{t.f(c)} \int_{-\delta}^{\delta} \exp\left(-t\frac{(1-\varepsilon)}{2}|f''(c)|u^2\right)du \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{\Psi(t)}{\sqrt{1-\varepsilon}}$$

Ainsi $\exists T_1 > 0 \ / \ \forall t > T_1$:

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} \exp(tf(x))dx \leq (1+\varepsilon)\frac{\Psi(t)}{\sqrt{1-\varepsilon}}$$

L'autre inégalité est similaire et pour vérifier les deux il suffit de poser $T_1 = \max(\tilde{T}_1, \tilde{T}_2)$

4. Soit $\delta > 0$.

$[a; c-\delta] \cup [c+\delta; b]$ est un cpct de longueur $(b-a-2\delta)$

Comme $f \in C^0([a,b])$

$\sup_{[a;c-\delta]\cup[c+\delta;b]} f(x)$ existe, notons le $f(\gamma)$.

On a toujours $f(\gamma) < f(c)$ par hyp.

Soit $x \in [a; c-\delta] \cup [c+\delta; b] =: I$

$$f(x) \leq f(\gamma) < f(c)$$

$$\exp(tf(x)) \leq \exp(t f(\gamma)) < \exp(t f(c)) \quad \forall t > 0$$

$$\int_I \exp(tf(x))\,dx \leq (b-a-2\delta)\exp(tf(\gamma)) < (b-a-2\delta)\exp(tf(c))$$

$$\frac{1}{\varphi(t)}\int_I \exp(tf(x))\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_I \exp(t(f(x)-f(c)))\sqrt{t|f''(c)|}\,dx$$

$$\leq \frac{(b-a-2\delta)}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{t|f''(c)|}\exp(t(f(\gamma)-f(c)))$$

Or, comme $f(\gamma)-f(c) < 0$, par croissance comparée

$$\frac{(b-a-2\delta)}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{t|f''(c)|}\exp(t(f(\gamma)-f(c))) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

Ainsi $\exists T_2 > 0 \,/\, \forall t > T_2$

$$\frac{1}{\varphi(t)}\int_I \exp(tf(x))\,dx \leq \varepsilon \quad \text{ie} \quad \int_I \exp(tf(x))\,dx \leq \varepsilon\,\varphi(t)$$

$$\text{ie} \quad \int_I \exp(tf(x))\,dx = o(\varphi(t))$$

5. $\phi(t) = \int_a^b \exp(tf(x))\,dx$

$$= \int_I \exp(tf(x))\,dx + \int_{c-\delta}^{c+\delta} \exp(tf(x))\,dx$$

Soit $\varepsilon > 0$

Soit $t > \max(T_1, T_2)$

$$\cancel{|\phi(t) - \psi(t)| \leq \left|\int_I \exp(tf(x))\,dx - \psi(t)\right| + \left|\int_{c-\delta}^{c+\delta} \exp(tf(x))\,dx\right|}$$

$$\cancel{\leq \varepsilon \psi(t) +}$$

$$|\phi(t) - \psi(t)| \leq \left|\int_I \exp(tf(x))\,dx\right| + \left|\int_{c-\delta}^{c+\delta} \exp(tf(x))\,dx - \psi(t)\right|$$

$$\leq \psi(t) \max\left\{ \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}} - (1+\varepsilon) ; \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon}} - (1-\varepsilon) \right\}$$

Plus simple :

$$③ \Rightarrow \int_{c-\delta}^{c+\delta} \exp(tf(x))\,dx \underset{t\to+\infty}{\sim} \psi(t)$$

$$\Rightarrow \exists T_1 > 0 \,/\, \forall t > T_1 \quad \int_{c-\delta}^{c+\delta} \exp(tf(x))\,dx \leq (1+\varepsilon)\psi(t)$$

$$④ \Rightarrow \int_I \exp(tf(x))\,dx = o(\psi(t))$$

$$\Rightarrow \exists T_2 > 0 \,/\, \forall t > T_2 \quad \int_I \exp(tf(x))\,dx \leq \varepsilon \psi(t)$$

$$\Rightarrow \exists\ T = \max(T_1, T_2) \,/\, \forall t > T \quad \phi(t) \leq (1+2\varepsilon)\psi(t)$$

$$\Rightarrow \phi(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \psi(t).$$