Exercice 8

Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espace mesuré, et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

1. f étant intégrable $\mu(\{x \in X, f(x) = \infty\}) = 0$

Soit $A = \{x \in X, f(x) = \infty\}^c$

On a pour tout $x \in A$ $|f(x)| \mathbb{1}_{\{|f(x)| > n\}}(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$x \longmapsto |f(x)| \mathbb{1}_{\{|f(x)| > n\}}(x)$ est mesurable.

De plus, pour tout $x \in A$ $|f(x)| \mathbb{1}_{\{|f(x)| > n\}}(x) \leq |f(x)|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

et f est intégrable, sachant que $\mu(A^c) = 0$ on a donc cette inégalité μ-presque partout.

D'après le théorème de convergence dominée on a

$$\lim_{n \to \infty} \int |f(x)| \mathbb{1}_{\{|f(x)| > n\}}(x) \, d\mu(x) = \int \lim_{n \to \infty} |f(x)| \mathbb{1}_{\{|f(x)| > n\}}(x) \, d\mu(x)$$

$$= 0.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{F}$ on a

$$\int_A |f(x)| \, d\mu(x) = \int_A |f(x)| \mathbb{1}_{\{|f(x)| \leq n\}}(x) \, d\mu(x) + \int_A |f(x)| \mathbb{1}_{\{|f(x)| > n\}}(x) \, d\mu(x)$$

$$\leq n \int_A \mathbb{1}_{\{|f(x)| \leq n\}}(x) \, d\mu(x) + \int_A |f(x)| \mathbb{1}_{\{|f(x)| > n\}}(x) \, d\mu(x)$$

Soit $\varepsilon > 0$, d'après 1), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$\forall n \geq N \quad \int_A |f(x)| \mathbb{1}_{\{|f(x)| > n\}} \, d\mu(x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$

On a alors

$$\int_A |f(x)|\, d\mu(x) \leq N \int_A d\mu(x) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\leq N \mu(A) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Posons $\delta = \frac{\varepsilon}{2N} > 0$

On a bien $\mu(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f(x)|\, d\mu(x) \leq \varepsilon$.

Donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{F}$ $\mu(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f(x)|\, d\mu(x) \leq \varepsilon$.