Leçon 228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Rapport 2017 : *Cette leçon permet des exposés de niveaux très variés. Les théorèmes de base doivent être maîtrisés et illustrés par des exemples intéressants, par exemple le théorème des valeurs intermédiaires pour la dérivée. Le jury s'attend évidemment à ce que le candidat connaisse et puisse calculer la dérivée des fonctions usuelles. Les candidats doivent disposer d'un exemple de fonction dérivable de la variable réelle qui ne soit pas continûment dérivable. La stabilité par passage à la limite des notions de continuité et de dérivabilité doit être comprise par les candidats. De façon plus fine, on peut s'intéresser aux fonctions continues nulle part dérivables. Pour aller plus loin, la dérivabilité presque partout des fonctions lipschitziennes ou des fonctions monotones relève de cette leçon. L'étude de la dérivée au sens des distributions de $x \in [a,b] \mapsto \int_a^x f(t)dt$ pour une fonction intégrable f est un résultat intéressant qui peut trouver sa place dans cette leçon*

Rapport 2019 : *Cette leçon permet des exposés de niveaux, et de forme, très variés. Les théorèmes de base doivent être maîtrisés et illustrés par des exemples intéressants, par exemple le théorème des valeurs intermédiaires pour la dérivée, le théorème de Rolle... Le jury s'attend évidemment à ce que les candidats connaissent et puissent calculer la dérivée des fonctions usuelles. Les candidats doivent disposer d'un exemple de fonction dérivable de la variable réelle qui ne soit pas continûment dérivable. La stabilité par passage à la limite des notions de continuité et de dérivabilité doit être comprise par les candidats. Pour aller plus loin, les propriétés de régularité des fonctions monotones et des fonctions convexes peuvent être mentionnées. La dérivabilité presque partout des fonctions lipschitziennes peut aussi relever aussi de cette leçon. On peut enfin s'intéresser à des exemples de fonctions continues nulle part dérivables.*

Le nouvel intitulé doit conduire à analyser la généralisation de la notion de dérivée d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à l'aide du principe de calcul « par dualité/transposition » de la théorie des distributions. Plus qu'une analyse fonctionnelle poussée, le jury attend une certaine familiarité avec le calcul de dérivées faibles, dans ce cadre particulier de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qu'on n'hésitera pas à motiver par des applications (en physique, en théorie du signal,...). On peut étudier les liens entre dérivée classique et dérivée faible, calculer la dérivée faible de fonctions discontinues (formule des sauts, par exemple pour des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et C^∞ par morceaux sur $\mathbb{R}$ comme la fonction de Heaviside, la valeur absolue) ou de fonctions du type $x \mapsto \int_a^x f(y)dy$, f étant intégrable. On peut aussi relier la dérivée faible et la limite du taux d'accroissement au sens des distributions et établir le lien entre fonction croissante et dérivée faible positive. Il est également possible de parler du peigne de Dirac. Pour aller encore plus loin, des exemples de convergence au sens des distributions peuvent tout à fait illuster cette leçon

Notons que la leçon qui a été présentée manquait d'applications (recherche d'extrema, cractérisation de la convexité, preuve que toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ tq $f(x+y) = f(x)+f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ est de la forme $x \mapsto \alpha x$...) et de certains résultats importants (lien entre la dérivée et le sens de variation, par exemple) ; que le plan manquait d'une ligne directrice claire ; et que les développements choisis étaient franchement difficiles.

Quelques exercices (de difficulté variable ; pour moi les 6 premiers doivent faire partie du bagage de tout le monde d'ici à la fin de l'année)

1. Montrer que si f est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1]$ et $\lim_{x\to 0} f'(x)$ existe et vaut l alors f est dérivable en 0 et $f'(0) = l$.
2. Calculer la dérivée au sens des distributions de la fonction "signe", qui vaut 1 sur $]0,+\infty[$, 0 et 0 et -1 sur $]-\infty, 0[$. Calculer la dérivée de $x \mapsto |x|$ au sens des distributions.
3. Montrer que $f(x) = e^{-1/x^2}$ est C^∞, admet des Dls à l'ordre n tous nuls en ce point et pourtant f n'est pas nulle ailleurs qu'en 0. En vous inspirant de cela, donner une formule définissant une fonction C^∞ à support dans $[-1,1]$.
4. Montrer que, si (P_n) est une suite de polynômes qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f, alors f est un polynôme (Indication : un polynôme borné sur $\mathbb{R}$ est nécessairement une fonction constante).
5. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est telle que pour tout x, y on a $f(x+y) = f(x)+f(y)$ et f est continue en 0 alors f est linéaire. Et si f n'est pas continue ?
6. Montrer que si f est convexe sur $\mathbb{R}$ et dérivable en tout point, alors f est de classe C^1.
7. Si f est dérivable en x, est-ce que $\frac{f(y)-f(z)}{y-z}$ tend vers $f'(x)$ quand y et z tendent tous les deux vers x $(y \neq z)$? Si f est C^1 ?

8. Trouver toutes les fonctions dérivables de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telles que $f \circ f = f$.
9. Existe-t-il une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ prenant exactement deux fois chaque valeur ?
10. Soit (X,d) un espace métrique (vous pouvez prendre un intervalle si vous voulez). Montrer qu'un inf de fonctions k-lipschitziennes sur (X,d) est k-lipschitzien ; montrer qu'une fonction uniformément continue sur (X,d) et à valeurs dans $[0,1]$ est limite uniforme de fonctions lipschitziennes.
11. Soit μ une mesure de proba sur $[0,1]$, et F sa fonction de répartition. On considère la distribution associée $T_F \colon \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} F(t)\varphi(t)dt$. Déterminer le lien entre μ et la dérivée de T_F. Cas particulier intéressant dans cette leçon : on considère la loi sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ obtenue en lançant une infinité de fois une pièce non biaisée ; on appelle $x(i)$ la suite des tirages, et on considère X définie par

$$X = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{2x(i)}{3^i}$$

   Alors X est une v.a à valeurs dans $[0,1]$, en fait X prend ses valeurs dans l'ensemble triadique de Cantor que je note K. La fonction de répartition de X, notée F, est appelée escalier de Cantor ; montrer qu'elle est continue et dérivable presque partout (en fait hors de K on a $F' = 0$, et le complémentaire de K est une réunion d'intervalles ouverts). Pourtant ce n'est pas la fonction nulle... Donc F est dérivable presque partout, de dérivée nulle, mais n'est pas constante : F n'est pas l'intégrale de sa dérivée. Au sens des distributions, la dérivée de F est la loi de X, qui est étrangère à la mesure de Lebesgue... Pour aller plus (trop) loin, vous pouvez explorer le concept de fonction absolument continue et son lien avec le théorème de Radon-Nikodym.