Leçon 158 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes
Trinôme D : RAMBAUD Coryne, BEUYÈRE Tiphaine, LOYAN Nicolas
Références : GOURDON ; CVA ; NH2G2 (tome 1)

I - GÉNÉRALITÉS

1) PREMIÈRES DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

Def 1 : $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique si ${}^tM = M$.

Def 2. $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique si ${}^tM = -M$

Def 3 $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est hermitienne si ${}^t\overline{M} = M$

Exemples 4 :

· $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique ; $\begin{pmatrix} 0 & -17 \\ 17 & 0 \end{pmatrix}$ antisymétrique

et $\begin{pmatrix} 42 & j \\ j^2 & 42 \end{pmatrix}$ hermitienne.

· Soit E un $\mathbb{R}$-ev ou un $\mathbb{C}$-ev, et $x_1, \dots, x_n \in E$.
Alors la matrice de Gram $(\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n}$ est un exemple de matrice hermitienne positive

Def 5 : On désigne par :

· S_n le sev des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
· A_n le sev des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
· H_n le sev des matrices hermitiennes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

où $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) sont vus en tant que $\mathbb{R}$-ev.

Prop 6 : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\exists! S \in S_n$, $\exists! A \in A_n \mid M = S + A$
(où $S = \frac{M + {}^tM}{2}$ et $A = \frac{M - {}^tM}{2}$)

Donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n \oplus A_n$

Prop 7 : $\forall M \in H_n$, $\exists! S \in S_n$, $\exists! A \in A_n \mid M = S + iA$

Remarque 7bis :
Si $A \in A_n$, alors $iA \in H_n$

Prop 8 : · $\dim_{\mathbb{R}}(S_n) = \frac{n(n+1)}{2}$

· $\dim_{\mathbb{R}}(A_n) = \frac{n(n-1)}{2}$

· $\dim_{\mathbb{R}}(H_n) = n^2$ (⚠ H_n n'est pas un $\mathbb{C}$-ev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

2) LIENS AVEC LES FORMES QUADRATIQUES (RESP. HERMITIENNES).

Def 9 : Soient E, F des $\mathbb{R}$-ev et une application :

$$\varphi : E \times F \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \varphi(x,y)$$

Alors φ est dite bilinéaire si $\forall x \in E$, $\varphi(x,\cdot) : y \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire et si $\forall y \in F$, $\varphi(\cdot, y) : x \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire.

Def 10 : Soient E, F des $\mathbb{C}$-ev et une application :

$$\varphi : E \times F \to \mathbb{C}, \quad (x,y) \mapsto \varphi(x,y)$$

Alors φ est dite sesquilinéaire si :
· $\varphi(x, \cdot)$ est linéaire
· $\varphi(x_1 + x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y)$ $\forall x_1, x_2 \in E$, $\forall y \in F$
· $\varphi(\lambda x, y) = \overline{\lambda} \cdot \varphi(x,y)$ $\forall x \in E$, $\forall y \in F$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

Def 11 : · Une forme bilinéaire est symétrique si $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ $\forall (x,y) \in E \times F$
· Une forme sesquilinéaire est symétrique hermitienne si
$\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$ $\forall (x,y) \in E \times F$

Def 12 : On appelle forme quadratique sur E toute application q de la forme :

$$q : E \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \varphi(x,x)$$

où φ est une forme bilinéaire symétrique sur E.

Def 13 : On appelle forme hermitienne sur E toute application Φ de la forme.

$$\Phi : E \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \varphi(x,x)$$

où φ est sesquilinéaire symétrie hermitienne.

Prop 14 : Soit q une forme quadratique (resp hermitienne). Il existe une unique forme bilinéaire (resp sesquilinéaire) telle que : $q(x) = \varphi(x,x)$

· $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left[q(x+y) - q(x) - q(y)\right] = \frac{1}{4}\left[q(x+y) - q(x-y)\right]$ (cas quadratique)

· $\varphi(x,y) = \frac{1}{4}\left[q(x+y) - q(x-y) + i\,q(x-iy) - i\,q(x+iy)\right]$ (cas hermitien)

Prop 15 : (écriture en dimension finie)

- Pour une forme bilinéaire φ :
  Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ base de E, un $\mathbb{R}$-ev.
  Alors pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$, la bilinéarité de φ entraîne :

$$\varphi(x,y) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i y_j \varphi(e_i, e_j) = {}^tX.M.Y$$

où $M = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

- Pour une forme sesquilinéaire φ (avec les mêmes notations) :
  Soit E un $\mathbb{C}$-ev. Alors

$$\varphi(x,y) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \overline{x_i} . y_j \, \varphi(e_i, e_j) = {}^t\overline{X}.M.Y$$

Prop 16 : (Changement de base)

Soient B, B' deux bases de E, et P la matrice de passage de B à B'.

Si φ est une forme bilinéaire (resp. sesquilinéaire), de matrice M dans la base B, et M' dans la base B' alors

$$M' = {}^tP.M.P \quad (\text{resp } M' = {}^t\overline{P}.M.P)$$

On dit que M' et M sont congrues.

Prop 17 :

Les matrices M, M' sont équivalentes si elles sont congrues.
Elles ont donc le même rang.

Def 18 : (rang)

On définit donc le rang de φ, une forme bilinéaire (resp sesquilinéaire) comme le rang de la matrice de φ dans une base de E quelconque.

Prop 19 : • Une forme bilinéaire est symétrique ssi sa matrice dans une base B est symétrique.

• Une forme sesquilinéaire est symétrique hermitienne ssi sa matrice dans une base B est hermitienne.

Def 20 : (définie positive)

- Φ une forme quadratique (resp hermitienne) sur un $\mathbb{R}$-ev (resp un $\mathbb{C}$-ev) est dite
  - définie si $\Phi(x) \neq 0$, $\forall x \in E$, $x \neq 0$
  - positive si $\Phi(x) \geq 0$, $\forall x \in E$

Remarque 20bis :

Une matrice A est dite définie positive si ${}^tx.A.x > 0$, $\forall x \neq \vec{0}$.

Def 21 : (orthogonalité). Soit φ bilinéaire (ou sesquilinéaire).

- $x, y \in E$ sont orthogonaux selon φ si $\varphi(x,y) = 0$
- $A \subseteq E$. L'orthogonal de A est l'ensemble :

$$A^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in A, \varphi(x,y) = 0\}$$

- $A, B \subseteq E$ sont dits orthogonaux si $\varphi(x,y) = 0$, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$.
  On note alors $A \perp B$.

Def 22 (produit scalaire / hermitien)

On appelle produit scalaire (resp hermitien) la forme polaire d'une forme quadratique (resp. hermitienne) définie positive. On notera $\langle x,y \rangle = \varphi(x,y)$.

Def 23 : (Espace euclidien / hermitien) :

On appelle espace euclidien (resp. hermitien) un espace vectoriel de dimension fini muni d'un produit scalaire (resp. produit scalaire hermitien).

3) LIEN AVEC LES ENDOMORPHISMES AUTOADJOINTS

Def 24 : (Adjoint) : Soit E euclidien (resp hermitien), et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

f et g sont dits adjoints si

$$\forall (x,y) \in E^2, \ \langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle$$

- On notera, pour un $f \in \mathcal{L}(E)$ donné, f^* son adjoint.
- f est dit autoadjoint si $f = f^*$

Prop 25 (Matrice)

Si E est euclidien (resp hermitien), un $f \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint ssi sa matrice dans une base orthonormée de E quelconque est symétrique (resp hermitienne).

II - RÉDUCTION : On notera $M^* = {}^t\overline{M}$.

Prop 26 Soit E un espace euclidien ou hermitien, et $f \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint.
Alors si F est un sev de E stable par f, $F^\perp$ l'est aussi.

Théorème 27 (Théorème Spectral - Version 1) : (Endomorphismes)
Soit E euclidien ou hermitien, et $f \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint.
Alors il existe une base orthonormée de vecteurs propres pour f.
De plus, ses valeurs propres sont réelles.

Théorème 28 (Théorème spectral - Version 2) : (Matrices)
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$), une matrice symétrique (resp hermitienne).
Alors il existe une matrice C orthogonale $({}^tC = C^{-1})$ (resp unitaire : ${}^t\overline{C} = C^{-1}$) telle que :

$$C^{-1}.M.C = C^*.M.C = D$$

où D est diagonale réelle.

Théorème 29 (Théorème spectral - Version 3) : (Formes quadratiques) DEV
Soit Φ une forme quadratique (resp hermitienne) sur un espace euclidien (resp hermitien) E.
Alors il existe une base orthonormée de E dans laquelle Φ est diagonale réelle.

Théorème 30 : (Théorème spectral - Version 4) (Co-diagonalisation)
Soient M, N deux matrices symétriques (resp. hermitiennes), telles que M soit définie positive.
Alors il existe C inversible telle que :

$$C^*.M.C = I_n \quad \text{et} \quad C^*.N.C = D$$

où D est diagonale réelle.

Remarque 30bis
- Le spectre d'une matrice symétrique est réel.
- Le spectre d'une matrice antisymétrique est imaginaire pur (voir 7bis)

Proposition 31. DEV NH2G2
L'application $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.
(où $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques définies positives.)
(De même pour $\exp : H_n \to H_n^{++}$)

Remarque 31bis:
L'exponentielle d'une matrice antisymétrique est orthogonale.

Théorème 32 (Décomposition polaire) : DEV NH2G2
La multiplication matricielle induit les homéomorphismes
(i) $\mu : O(n,\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} GL_n(\mathbb{R})$
$(O, S) \longmapsto OS$
(ii) $\mu : U(n,\mathbb{R}) \times H_n^{++}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} GL_n(\mathbb{C})$
$(U, H) \longmapsto U.H$

Théorème 33 (Sylvester - Version 1) (CVA)
Si q est une forme quadratique ou hermitienne alors il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et deux entiers s et t tq $0 \leq s, t$ $s + t \leq n$ tels que :

$$q(x) = \sum_{i=1}^{s} |x_i|^2 - \sum_{j=1}^{t} |x_{s+j}|^2 \quad \text{pour tout vecteur } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

De plus, le couple (s,t) ne dépend pas du choix de la base

Def 34 : (signature) :
Soit q une forme quadratique (resp hermitienne) sur un espace euclidien (resp hermitien) E.
On appelle signature de q le couple (s,t)

Théorème 35 (Sylvester - Version 2) :
- Si $M \in S_n(\mathbb{R})$. Alors il existe deux entiers s,t tels que $0 \leq s, t$ $s+t \leq n$ et P inversible tels que :

$${}^tP.M.P = \begin{pmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & -I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Def 36 : (Groupe $O(p,q)$) (NH2G2)
On appelle $O(p,q)$ le sous-groupe de $GL_{p+q}(\mathbb{R})$ formé des isométries de la forme quadratique standard sur $\mathbb{R}^{p+q}$ de signature (p,q)
C'est à dire $q(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{j=1}^{q} x_j^2$

Prop 37 : DEV NH2G2
Soient p, q. Il existe un homéomorphisme :

$$O(p,q) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$$

Décomposition polaire

Leçons : 106, 150, 155, 158, 160, 203

Référence : H2G2 Tome 1 page 202

Théorème 1 *La multiplication matricielle induit l'homéomorphisme :*

$$\mu : O_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++} \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$$
$$(O, S) \longmapsto OS$$

Preuve :

• Étape 1 : L'application μ est bien définie et continue.
Comme $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}), O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$ groupe, l'application μ est bien définie. De plus par bilinéarité du produit matriciel, μ est continue (par restriction).

• Étape 2 : μ est surjective.
Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. La matrice ${}^tMM$ appartient à $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, car elle est dans l'orbite de I_n pour l'action de congruence. On peut donc diagonaliser ${}^tMM$ dans une base orthonormée :

$$ {}^tMM = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

pour $P \in O_n(\mathbb{R})$ convenable, et $\lambda_i > 0$ pour tout i. On pose alors :

$$S = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

c'est une matrice symétrique, puisque P est orthogonale, et définie positive, car ses valeurs propres sont strictement positives.
On a : $S^2 = {}^tMM$ et, si l'on pose : $O = MS^{-1}$, il vient :

$$ {}^tOO = {}^t(MS^{-1})MS^{-1} = {}^tS^{-1}\,{}^tMMS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n.$$

Ainsi : $M = OS$, où $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, donc μ est surjective.

• Étape 3 : μ est injective.
Supposons que l'on ait : $M = OS = O'S'$, avec $O' \in O_n(\mathbb{R})$ et $S' \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors, il vient : $S^2 = {}^tMM = {}^t(O'S')O'S' = {}^tS'\,{}^tO'O'S'$ d'où : $S^2 = S'^2$. Soit Q un polynôme tel que pour tout i, $Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$. Alors :

$$S = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} = PQ\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}\right)P^{-1}$$
$$= Q\left(P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}\right) = Q(S^2) = Q(S'^2)$$

Or, S' commute avec S'^2, donc avec $Q(S'^2) = S$, et donc S' et S sont diagonalisables dans une base commune. Il existe ainsi une matrice de passage P_0 qui permet de les diagonaliser simultanément.
Ainsi, si l'on note

$$diag(\mu_i) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$$

,
on a : $S' = P_0 diag(\mu_i')P_0^{-1}$ et $S = P_0 diag(\mu_i)P_0^{-1}$. Par suite :

$S'^2 = S^2 \Longrightarrow P_0 diag(\mu_i'^2)P_0^{-1} = P_0 diag(\mu_i^2)P_0^{-1}$
$\Longrightarrow \forall 1 \leq i \leq n, \mu_i'^2 = \mu_i^2$
$\Longrightarrow \forall 1 \leq i \leq n, \mu_i' = \mu_i \quad (S, S' \in \mathscr{S}_n^{++} donne \mu_i, \mu_i' \in \mathbb{R}^{+*})$
$\Longrightarrow S = S'$.
Ainsi, on a : $O = O'$, d'où finalement, l'injectivité de μ.

• **Étape 4 :** μ^{-1} est continue.
Soit $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de $GL_n(\mathbb{R})$ qui converge vers M. On note, pour tout entier p : $(O_p, S_p) = \mu^{-1}(M_p)$, de sorte $M_p = O_pS_p$, et $\mu^{-1}(M) = (O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On montre que les suites (O_p) et (S_p) converge respectivement vers O et S. On sait que $O_n(\mathbb{R})$ est compact. Soit $\overline{O}$ une valeur d'adhérence de $(O_p)_{p\in\mathbb{N}}$, *i.e* telle que O_{p_k} converge vers $\overline{O}$ pour une sous-suite $(O_{p_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de (O_p). Alors, la sous-suite S_{p_k} converge vers $\overline{O}^{-1}M$, matrice symétrique et définie positive, car :

$$\overline{S} := \overline{O}^{-1}M \in GL_n(\mathbb{R}) \cap \overline{\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})} = GL_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

.
On a donc par unicité de la décomposition polaire (injectivité de μ) :

$$M = \overline{O}\overline{S} \quad et \quad \overline{O} = O \quad et \quad \overline{S} = S$$

.

□

Questions :

•Faire la décomposition polaire de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
La matrice est de déterminant $-3 \neq 0$ elle est donc inversible.
On suit la démonstration de la surjectivité. On commence par diagonaliser ${}^tMM$ dans un base orthonormée, on obtient :

$$ {}^tMM = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Alors :

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et enfin :

$$O = MS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$M = OS = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

•Existe t-il un homéomorphisme entre $GL_n(\mathbb{R})$ **et** $O_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ **?**
Oui, l'exponentielle réalise un homéomorphisme entre $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{S}_n^{++}$ d'où le résultat.

Étude de O(p,q)

Leçons : 156, 158, 170, 171

Référence(s) : H2G2 tome 1 page 211

Définition 1 *Soit p et q deux entiers naturels. On note $O(p,q)$ le sous-groupe de $GL_{p+q}(\mathbb{R})$ formé des isométries de la forme quadratique standard sur $\mathbb{R}^{p+q}$ de signature (p,q), c'est-à-dire :*

$$x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2,$$

dont la matrice dans la base canonique est :

$$I_{(p,q)} = diag(\underbrace{1,\ldots,1}_{p},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{q})$$

On rappelle que $M \in O(p,q) \Leftrightarrow MI_{(p,q)}\,{}^tM = I_{(p,q)}$.

Théorème 1 *Soit $p, q \neq 0$ avec $p+q=n$. Il existe un homéomorphisme :*

$$O(p,q) \cong O_p(\mathbb{R}) \times O_q(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{pq}$$

Preuve :

• **Étape 1 :** $O(p,q) \cong (O(p,q) \cap O_n(\mathbb{R})) \times (O(p,q) \cap \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}))$.

Soit $M \in O(p,q) \subset GL_n(\mathbb{R})$, avec $n = p+q$. Par décomposition polaire, il existe deux matrices $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $M = OS$. On veut montrer que S et O sont dans $O(p,q)$. Pour cela, il suffit de montrer que S l'est.

Soit $T = {}^tMM$ alors $S^2 = T$.

Montrons d'abord que $O(p,q)$ est stable par transposition :

$$\begin{aligned} M \in O(p,q) &\Rightarrow MI_{(p,q)}\,{}^tM = I_{(p,q)} \\ &\Rightarrow {}^tM^{-1}I_{(p,q)}M^{-1} = I_{(p,q)} \\ &\Rightarrow {}^tM^{-1} \in O(p,q) \\ &\Rightarrow {}^tM \in O(p,q). \end{aligned}$$

On en déduit : $T = {}^tMM \in O(p,q)$.

On a donc $S^2 \in O(p,q)$. Pour conclure sur S, il va falloir prendre la « racine carré » de T, donc via l'exponentielle, diviser par deux. A présent on sait que $T \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc comme l'exponentielle réalise un homéomorphisme de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe $U \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $T = exp(U)$. Alors :

$$
\begin{aligned}
T \in O(p,q) &\Longleftrightarrow T I_{(p,q)}\, {}^tT = I_{(p,q)} \\
&\Longleftrightarrow {}^tT = I_{(p,q)}^{-1} T^{-1} I_{(p,q)} \\
&\Longleftrightarrow {}^t exp(U) = I_{(p,q)}^{-1} exp(U)^{-1} I_{(p,q)} \\
&\Longleftrightarrow exp({}^tU) = I_{(p,q)}^{-1} exp(-U) I_{(p,q)} \\
&\Longleftrightarrow exp({}^tU) = exp(-I_{(p,q)}^{-1} U I_{(p,q)}) \\
&\Longleftrightarrow {}^tU = U = -I_{(p,q)}^{-1} U I_{(p,q)} \quad (exp : \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \ bijective) \\
&\Longleftrightarrow U I_{(p,q)} + I_{(p,q)}\, {}^tU = 0 \\
&\Longleftrightarrow \frac{U}{2} I_{(p,q)} + I_{(p,q)} \frac{{}^tU}{2} = 0 \\
&\Longleftrightarrow \frac{{}^tU}{2} = -I_{(p,q)}^{-1} \frac{U}{2} I_{(p,q)} \\
&\Longleftrightarrow exp\left(\frac{{}^tU}{2}\right) = exp\left(-I_{(p,q)}^{-1} \frac{U}{2} I_{(p,q)}\right) \\
&\Longleftrightarrow {}^t exp\left(\frac{U}{2}\right) = I_{(p,q)}^{-1} exp\left(\frac{U}{2}\right)^{-1} I_{(p,q)}.
\end{aligned}
$$

Or, on a : $exp\left(\frac{U}{2}\right) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $exp^2\left(\frac{U}{2}\right) = exp(U) = T$. On en déduit alors $exp\left(\frac{U}{2}\right) = S$ et $S I_{(p,q)}\, {}^tS = I_{(p,q)}$, c'est-à-dire : $S \in O(p,q)$ et donc $O \in O(p,q)$. La décomposition polaire $M = OS \longmapsto (O,S)$ induit une bijection bicontinue :

$$O(p,q) \cong (O(p,q) \cap O_n(\mathbb{R})) \times (O(p,q) \cap \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})).$$

• **Étape 2** :Description de $O(p,q) \cap O_n(\mathbb{R})$

Soit $O \in (O(p,q) \cap O_n(\mathbb{R}))$. On découpe O en blocs, il vient :

$$O = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \in O(p,q) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} {}^tAA - {}^tBB = I_p \\ {}^tAC - {}^tBD = 0 \\ {}^tCA - {}^tDB = 0 \\ {}^tCC - {}^tDD = -I_q \end{array} \right.$$

car

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tB \\ {}^tC & {}^tD \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tB \\ {}^tC & {}^tD \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ -B & -D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tAA - {}^tBB & {}^tAC - {}^tBD \\ {}^tCA - {}^tDB & {}^tCC - {}^tDD \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

D'autre part, on a :

$$O \in O_n(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} {}^tAA + {}^tBB = I_p \\ {}^tAC + {}^tBD = 0 \\ {}^tCA + {}^tDB = 0 \\ {}^tCC + {}^tDD = I_q \end{array} \right.$$

car

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tB \\ {}^tC & {}^tD \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tAA + {}^tBB & {}^tAC + {}^tBD \\ {}^tCA + {}^tDB & {}^tCC + {}^tDD \end{pmatrix}$$

En combinant ces deux résultats, on a : $\left\{ \begin{array}{l} {}^tAA = I_p \\ {}^tBB = 0 \\ {}^tCC = 0 \\ {}^tDD = I_q \end{array} \right.$

donc $A \in O_p(\mathbb{R})$ et $D \in O_q(\mathbb{R})$. De plus, comme $< X, Y >= Tr({}^tXY)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ alors $B = 0$ et $C = 0$. Ainsi :

$$O(p,q) \cap O_n(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, A \in O_p(\mathbb{R}), D \in O_q(\mathbb{R}) \right\} \cong O_p(\mathbb{R}) \times O_q(\mathbb{R})$$

• **Étape 3** : Description de $O(p,q) \cap \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Comme $exp : \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme, on a alors par les calculs réalisé en première partie que :

$$exp : L = \left\{ U \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), UI_{(p,q)} + I_{(p,q)}\, {}^tU = 0 \right\} \longrightarrow O(p,q),$$

d'ou l'homéomorphisme :

$$\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap L \cong O(p,q) \cap \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

Soit $P = \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & C \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap L$, où $A \in \mathscr{S}_p(\mathbb{R})$ et $C \in \mathscr{S}_q(\mathbb{R})$. En particulier $P \in L$ donc on a :

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ {}^tB & -C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & B \\ -{}^tB & -C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2A & 0 \\ 0 & -2C \end{pmatrix} = 0$$

donc $A = 0$, $C = 0$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & B \\ {}^tB & 0 \end{pmatrix}$, ce qui fournit l'homéomorphisme $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap L \cong \mathbb{R}^{pq}$, d'où finalement l'homéomorphisme voulu :

$$O(p,q) \cong O_p(\mathbb{R}) \times O_q(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{pq}.$$

□

Questions :

•Pourquoi a t-on unicité de la racine carré ?
cf la preuve de la décomposition polaire : surjectivité pour l'existence et injectivité pour l'unicité.

•Montrer que l'exponentielle matricielle est continue.
La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$ converge normalement sur la boule ouverte $B(0,R)$ de $M_n(\mathbb{K})$, donc uniformément : exp est continue sur $B(0,R)$, puis sur $\bigcup_{R>0} B(0,R) = M_n(\mathbb{K})$.

•Montrer que ${}^texp(U) = exp({}^tU)$, $Pexp(U)P^{-1} = exp(PUP^{-1})$ et $exp(U)^{-1} = exp(U^{-1})$.
La transposition est un endomorphisme continue, on a :

$$exp({}^tA) = \lim_{n\to+\infty} {}^t\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}\right) = {}^t\left(\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}\right) = {}^texp(A)$$

De même, l'endomorphisme défini par $U \mapsto PUP^{-1}$ est continu.
Enfin, les matrices A et $-A$ commutent. Donc

$$exp(A)exp(-A) = exp(A + (-A)) = exp(0) = I_n$$

•Montrer que $< X, Y >= Tr({}^tXY)$ définit un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$?
La forme est linéaire par rapport à la deuxième variable car :

$$< X, Y + \lambda Y' >= Tr({}^tA(Y + \lambda Y')) = Tr({}^tXY) + \lambda Tr({}^tXY') =< X, Y > +\lambda < X, Y' >$$

De plus, elle est symétrique car :

$$< Y, X >= Tr({}^tYX) = Tr({}^t({}^tYX)) = Tr({}^tXY) =< X, Y >$$

La forme est donc bilinéaire symétrique.

${}^tXY$ a pour coefficient $i^{\text{ème}}$ ligne, $i^{\text{ème}}$ colonne : $\sum_{j=1}^{n} a_{ji}b_{ji}$, celui de ${}^tAA$ est : $\sum_{j=1}^{n} a_{ji}^2$

D'où : $< A, A >= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \geq 0$

La forme est bien positive.

$< A, A >= 0$ donne $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 0$ puis $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $a_{i,j} = 0$ et enfin $A = 0$.

La forme est bien définie positive.

•Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est compact. Qu'en est il de $O(p, q)$?

L'application $f : M \mapsto {}^tMM$ est continue comme composition d'applications continues donc $O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{I_n\})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue. De plus, $\forall A \in O_n(\mathbb{R})$, $\forall (i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, $|a_{i,j}| \leq 1$ et donc $\forall A \in O_n(\mathbb{R})$, $||A||_\infty \leq 1$ donc $O_n(\mathbb{R})$ est borné. $O_n(\mathbb{R})$ est fermé borné en dimension fini donc compact. $O(p, q)$ n'est pas compact car $\mathbb{R}^{pq}$ n'est pas borné.

•Quel est le nombre de composante connexe a $O(p, q)$.

$O_p(\mathbb{R})$ et $O_q(\mathbb{R})$ ont deux composantes connexe et $\mathbb{R}^{pq}$ une seule donc $O(p, q)$ a $2\times2\times1 = 4$ composantes connexes.