160 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. On note $\langle \cdot,\cdot \rangle$ le produit scalaire sur E, $\|\cdot\|_2$ la norme associée

I- Endomorphismes auto-adjoints.

a) Orthogonalité :

déf 1 : $A \subset E$. L'orthogonal de A selon $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est $A^{\perp} = \{ y \in E, \forall x \in A \ \langle y, x \rangle = 0 \}$

prop 2 : si F sev de E, $F \oplus F^{\perp} = E$ et $F^{\perp\perp} = F$

déf 3 : $\mathcal{B} : (e_1 \dots e_n)$ base orthogonale si $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, $\forall i,j \in \{1..n\}$
si de plus $\|e_i\| = 1$ $\forall i \in \{1..n\}$, $\mathcal{B}$ est orthonormale (pour $\langle \cdot,\cdot \rangle$)

prop. 4. Tout ev E admet 1 base orthonormale pour $\langle \cdot,\cdot \rangle$.

b) Adjoint d'un endomorphisme :

déf 5 : $f \in \mathcal{L}(E)$. $g \in \mathcal{L}(E)$ adjoint de f si $\forall (x,y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle$
On note $g = f^*$

prop 6 : si $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ b.o.n, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$
(d'où existence et unicité de f^*)

prop. 7 : si F sev stable par f, alors $F^{\perp}$ stable par f^*.

c) Endomorphismes auto-adjoints :

déf 8. $f \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint (ou symétrique) si $f^* = f$
Matriciellement, si $\mathcal{B}$ b.o.n $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ vérifie ${}^tM = M$

Ex. 9 : si φ forme bilinéaire symétrique, alors $M = (\varphi(e_i, e_j))_{i,j}$ vérifie $M = {}^tM$. C'est donc 1 matrice symétrique

déf/prop(10) : On note $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E. C'est 1 sev de $\mathcal{L}(E)$, de dim. $\frac{n(n+1)}{2}$

Th spectral 11 : soit $f \in \mathcal{L}(E)$ endomorphisme auto-adjoint. Alors il existe 1 base orthonormée de vecteurs propres pour f, de plus ses valeurs propres sont réelles.

Cex 12 : dans $\mathbb{C}$, $\begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique mais non diagonalisable

Corollaire 13 : soit Φ une forme quadratique. Alors il existe $\mathcal{B}$ b.o.n. telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi)$ soit diagonale réelle

d) Endomorphismes symétriques positifs / définis positifs :

déf. matricielle 14 : $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique est dite positive (resp. définie ≥ 0) si $\forall X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tX.A.X \geq 0$ (resp. $\forall X \neq 0$, ${}^tX A X > 0$)
$f \in S(E)$ positif (resp. déf. ≥ 0) si $\forall \mathcal{B}$ b.o.n. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ positive (resp. déf ≥ 0)

On appelle $S^{++}(E)$ (resp. $S^{+}(E)$) l'ensemble des endomorphismes positifs (resp. déf. ≥ 0). (Ils sont symétriques par définition)

prop 15 : si $f \in S^{++}(E)$ (resp. $S^{+}(E)$) alors ses vp sont toutes > 0 (resp. ≥ 0)

prop 16 : $S^{++}(E)$ est 1 ouvert et $\overline{S^{++}(E)} = S^{+}(E)$

prop. 17 : si $f \in S^{++}(E)$, $\mathcal{B}$ b.o.n. si $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, alors il existe S symétrique déf. ≥ 0 telle que $M = S^2$, racine carrée de M

Th. 18. Pseudo-réduction simultanée : si M et N sont 2 matrices symétriques, et M définie positive. Alors $\exists C \in GL_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tC.MC = I_n$ et ${}^tCNC = D$, D diagonale réelle.

II Endomorphismes orthogonaux

Def 19: $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit endomorphisme orthogonal si $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in E$

On note $O(E)$, l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E

Prop 20: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, les propositions suivantes sont équivalentes

(i) $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in E$

(ii) $\|f(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in E$

(iii) Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E et si $A = mat_B(f)$ Alors ${}^tA \cdot A = A\,{}^tA = I_n$

Prop 21: Soit $f \in O(E)$ alors

(i) les vap de f sont $+1$ et -1

(ii) $\det f = \pm 1$

Rmq 22: Comme $\det f = \pm 1$, f est bijective

Def 23: Les endomorphismes orthogonaux de déterminant $+1$ sont dites directes ; celles de déterminant -1 sont dites indirectes

Prop 24:

$f \in O(E) \iff$ les images de toutes bases orthonormées par f est une base orthonormée

On peut dire aussi f est orthogonale si elle envoie toute base orthonormée sur une base orthonormée de E

Th 25: Soit $f \in O(E)$

$\exists B$ une base orthonormale de E telle que

$$Mat_B(f) = \begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & R(\theta_r) & & & \\ & & & \varepsilon_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \varepsilon_n \end{pmatrix} \quad \text{où } \forall j \quad \varepsilon_j \in \{+1, -1\}$$

et $\forall i \; R(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec $\theta_i \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$

Prop 26: $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = A\,{}^tA = I_n\}$ est un sous groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ dit groupe orthogonal

Def 27: Le groupe spécial orthogonal est

$$SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$$

Ex 28: $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in SO_3(\mathbb{R})$

Prop 29: La matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée est une matrice orthogonale

Prop 30: Soit $A \in O_2(\mathbb{R})$

Soit $A \in SO_2(\mathbb{R})$ alors $\exists \theta$ tq

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

A est une rotation d'angle θ et de centre O

Soit $A \notin SO_2(\mathbb{R})$ alors $\exists \theta$ tq

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

A est une symétrie orthogonale par rapport à la droite d'angle $\frac{\theta}{2}$

Prop 31: Soit $A \in O_3(\mathbb{R})$ et f l'endo de $\mathbb{R}^3$ tq $A = mat_B(f)$ (B base de $\mathbb{R}^3$) Alors $\exists B'$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$A' = mat_{B'}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

où $\varepsilon = +1$ si $\det A = 1$ (i.e) $A \in SO_3(\mathbb{R})$

et $\varepsilon = -1$ si $\det A = -1$ (i.e) $A \notin SO_3(\mathbb{R})$

III Généralisation et Structure

a) Endomorphismes normaux

Def : $f \in \mathcal{L}(E)$ est <u>normal</u> si on a, de manière eq :
$\rightarrow f \circ f^* = f^* \circ f$ $\quad \rightarrow \|f(x)\| = \|f^*\| \ \forall x \in E$
$\rightarrow \langle f(x) | f(y) \rangle = \langle f^*(x) | f^*(y) \rangle \ \forall x, y \in E$

Def : $M \in M_n(\mathbb{R})$ est dite normale si ${}^tAA = A^tA$
Les matrices normales représentent les endo. normaux dans une BON.

Prop
1) Si f autoadjoint, f est normal : $f \circ f^* = f \circ f = f^* \circ f$
Si M symétrique, M est normale : ${}^tMM = M^2 = M^tM$
2) Si f orthogonal, f est normal : $f \circ f^* = id = f^* \circ f$
Si M orthogonal, M est normale : ${}^tMM = I = M^tM$
3) Si M antisymétrique, M est normale : ${}^tMM = -M^2 = M^tM$

Ex $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ est normale | non antisymétrique, non symétrique, non orthogonale

Prop Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est normal alors on a :
1) Si F sev de E stable par f, F est stable par f^*
2) si F sev de E, F est stable par f ssi F est stable par f^*

Def Une matrice est dite presque diagonale si elle est semblable dans une BON à une matrice du type :
$M_n(E) \ni A = \begin{pmatrix} D & & 0 \\ & A_1 & \\ 0 & & \ddots \ A_p \end{pmatrix}$ avec D diagonale dans $M_{n-2p}(E)$ et A_i blocs de $M_{2,2}(E)$ tq $A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}$

Réduction

Prop
- f est normal ssi il existe une BON de E dans laquelle sa matrice est presque diagonale.
- Si $M \in M_n(\mathbb{R})$ commute avec ${}^tM$, il existe une matrice orthogonale P telle que ${}^tPAP$ est presque diag. $P \in O_n(\mathbb{R})$

Rm
- Tout endomorphisme normal est donc semi-simple
- Cette réduction généralise celle de $O(E)$ et de $S(E)$

b) Structure dans les endomorphismes inversibles

Def : $GL_n(E) = \{ M \in M_n(E) ; \det(M) \neq 0 \}$
$SL_n(E) = \{ M \in M_n(E) ; \det(M) = 1 \}$
$f \in \mathcal{L}(E)$ est inversible ssi $\exists g \in \mathcal{L}(E)$; $f \circ g = g \circ f = id_E$

Prop :
- $SO_n(E) \triangleleft O_n(E) < GL_n(E)$
- $SO_n(E) = SL_n(E) \cap O_n(E)$
- $SO_3(E)$ est simple
- $Z(O_n) = \pm I_n \quad Z(SO_{2k}(E)) = \pm I_{2k} \quad Z(SO_{2k+1}) = I_{2k+1}$

Thm : Décomposition polaire de Cartan
$\varphi : O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(E) \xrightarrow{\sim} GL_n(E)$ est un <u>homéo</u>.morphisme

Appl
- $SO_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(E) \xrightarrow{\sim} GL_n^+(E)$ est un homeo.morphisme
- $\forall A \in GL_n(E) \quad |||A|||_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)} \quad \rho = \max_{Sp}(A)$

Prop
Connexité
- $O_n(E)$ a deux composantes connexes, isomorphes à $SO_n(E)$.

Compacité
- $SO_n(E)$ et $O_n(E)$ sont compacts

Convexité
- L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité de $M_n(\mathbb{R})$ pour la norme euclidienne.

Générateurs
- $O_n(\mathbb{R})$ est engendré par les réflexions.
- $SO_n(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements.

153-154-160

Réduction des endomorphismes normaux

Gourdon, Alg.
Deschamps, MP*

Th: dans E euclidien, si $u \in \mathcal{L}(E)$ normal, ie $uu^* = u^*u$,
alors $\exists \mathcal{B}$, base orthon., $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & \tau_1 & \\ (0) & & & & \ddots \\ & & & & & \tau_r \end{pmatrix}$ $\quad \tau_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$

Lemme 1: ds E eucl. ou hermitien, a) F sev stable par $u \Rightarrow F^\perp$ stable par u^*
b) si u normal, E_λ sep de u, alors $E_\lambda^\perp$ stable par u.

démo: a) si $x \in F^\perp$, mq $u^*(x) \in F^\perp$ ie $\forall y \in F$, $(u^*(x), y) = 0$
$(u^*(x), y) = (x, u(y)) = 0$ car $x \in F^\perp$ et $u(y) \in F$.

b)
si $x \in E_\lambda$, $u(u^*(x)) = u^*(u(x)) = u^*(\lambda x) = \lambda u^*(x)$ donc $u^*(x) \in E_\lambda$
E_λ est stable par u^* donc $E_\lambda^\perp$ est stable par $u^{**} = u$ (cf. a))

Th. complexe: si E hermitien, u normal $\Rightarrow \exists \mathcal{B}$, b.o.n., $[u]_{\mathcal{B}}$ diagonale

démo: soit $\lambda \in sp(u)$ (on est sur $\mathbb{C}$ donc $\lambda\ \exists$). (récurrence sur dim E)
d'après lemme 1, $E_\lambda^\perp$ stable par u et u^*.
$(u_{|E_\lambda^\perp})^* = u^*_{|E_\lambda^\perp}$ donc $u_{|E_\lambda^\perp}$ est normal.
D'après (HR) $\exists \mathcal{B}_1$ b.o.n de u sur $E_\lambda^\perp$ dans laquelle u diagonale
de +, $\exists \mathcal{B}_2$ b.o.n de u sur E_λ
ainsi $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ convient.

Rm: si $E_\lambda^\perp = \{0\}$, on a aussi u diag. $\sim \begin{pmatrix} \lambda & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda \end{pmatrix}$

Lemme 2: E eucl., dim E = 2. si u normal sans vp réelle, alors $u = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ dans toute base o.n.

démo: $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ dans B o.n. $M\,{}^tM = {}^tM\,M \Rightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = a^2 + c^2 \\ ab + cd = ac + bd \end{cases} \quad \text{donc } b = \pm c$$

si $b=c$, $\chi_M = X^2 - (a+d)X + ad - b^2$ donc $\Delta = (a+d)^2 - 4ad + 4b^2$
$= (a-d)^2 + 4b^2 \geq 0$

contradictoire car χ_M ne peut pas avoir de racine (vp) réelle.

$\underline{b=-c}$ donc $ab - bd = -ab + bd$ d'où $ab - bd = 0$ i.e. $b(a-d) = 0$

Or $b \neq 0$ car sinon v a 2 vp réelles, a et d. donc $a-d=0$, $a=d$

$M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & d \end{pmatrix}$

<u>Démo du théorème par récurrence</u> : $n=1$ <u>OK</u>

supposons vrai le rang $(n-1)$. si $\dim E = n$

* <u>si v a 1 vp $\lambda \in \mathbb{R}$</u>. $E = E_\lambda \oplus E_\lambda^\perp$ avec E_λ et $E_\lambda^\perp$ stables par v.
on applique HR à $E_\lambda^\perp \longrightarrow$ OK

* <u>sinon</u> : soit $Q = (X-\lambda)(X-\bar\lambda)$ facteur irred. de χ_v dans $\mathbb{R}[X]$.

$N = \operatorname{Ker} Q(v) \neq \{0\}$ car $\det Q(v) = \det(v - \lambda id) . \det(v - \bar\lambda\, id) = 0 \times 0 = 0$

<u>N stable par v</u> : $x \in N \Rightarrow Q(v(x)) = 0$ donc $v \circ (Q(v(x))) = 0$ donc $Q(v(\underbrace{v(x)}_{v(x) \in N})) = 0$

et v et v^* commutent donc v^* commute avec $Q(v)$ d'où <u>N stable par v^*</u>.

si $w = (v_{|N})^* v_{|N}$, w symétrique. soit α vp de w, $x \in E_\alpha$.

<u>$F = \operatorname{Vect}(x, v(x))$ stable par v</u> : $Q(X) = X^2 + aX + B$ donc
$Q(v)(x) = 0 \Rightarrow v^2(x) = -a v(x) - bx \in F$. $B \neq 0$ car Q irred.

donc $v^2(x)$ lin. indep. de $v(x)$ d'où $F = \operatorname{Vect}(v(x), v^2(x))$

<u>mq F stable par v^*</u> : $v^*(v(x)) = \alpha x \in F$. <u>OK</u>. $v^*(v^2(x)) = w(v(x)) = v(w(x)) = v(\alpha x)$
$= \alpha v(x)$
$\in F$.

donc $v_{|F}$ <u>normal</u>. d'après lemme 2 : $[v_{|F}]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $\mathcal{B}_1$ o.n.

Reste à mq $F^\perp$ stable par v et v^*.

F stable par $v^* \Rightarrow F^\perp$ stable par $v^{**} = v$ (lemme 1)

F stable par $v \Rightarrow F^\perp$ stable par v^*

On utilise (HR) sur $F^\perp$. On conclut sur $E = F \oplus F^\perp$

106, 155, 158
(150, 160)

Décomposition polaire

* Caldero, etc. Histoires hédonistes...
* Gourdon, Alg. p. 249

Th: $\Psi : O_n(\mathbb{R}), S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$
$(R, S) \longrightarrow R.S$ est un homéomorphisme

Démo: 1) Ψ est définie : S_n^{++} et $O_n \subset GL_n$ donc $R.S \in GL_n$

2) Ψ continue (pour $\|\cdot\|_2$) La multiplication matricielle est une application continue de $GL_n^2 \to GL_n$ donc aussi sur 1 restrict° $S_n^{++} \times O_n \to GL_n$

3) Ψ est surjective : soit $M \in GL_n$

On a ${}^tMM \in S_n^{++}$: si $X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tX({}^tM.M)X = {}^t(MX)(MX) = \|AX\|_2^2 \geq 0$
s'annulant ssi $X = 0$

D'après le th. spectral, $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$, $(\lambda_1 - \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$,
${}^tM.M = {}^tP.\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} P$. Soit $S \in S_n^{++}$ / $S^2 = {}^tMM$.

S existe car $\left[{}^tP.\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P\right]^2 = {}^tM.M$

$\forall R \in GL_n$, $RS = M \Rightarrow R = MS^{-1}$

Mq $R \in O_n$: ${}^tRR = {}^t(MS^{-1})(MS^{-1}) = {}^tS^{-1}\,{}^tM.M.S^{-1}$
$= S^{-1}S^2.S^{-1}$
$= I_n$

... donc $R \in O_n$. On a bien $M = RS$, $R \in O_n$, $S \in S_n^{++}$

4) Ψ est injective : Supposons 2 décompositions de $M = RS = R'S'$

$${}^tM.M = {}^tS\,{}^tR\,RS = S^2 \quad \text{de même } {}^tMM = S'^2 \text{ donc } S^2 = S'^2$$

Montrons que S et S' commutent.

Il existe $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $Q(d_i) = \sqrt{d_i}$ interpolateur

$$S = {}^tP(\sqrt{d_1} \ldots \sqrt{d_n})P = {}^tP(Q(d_1) \ldots Q(d_n))P = {}^tP\,Q(d_1 \ldots d_n)\,P$$

$$S = Q({}^tP(d_1 \ldots d_n)P) = Q(S'^2).$$

S' commute avec $Q(S'^2)$ donc avec S. Et S et S' diagonalisables donc

S et S' co-diagonalisables : $\exists R \,/\, S = R^{-1}(a_1 \ldots a_n)R$ $\quad (a_1, a_n), (b_1 \ldots b_n)$

$\qquad S' = R^{-1}(b_1 \ldots b_n)R \quad \in \mathbb{R}^{n^2}$.

$S^2 = S'^2 \Rightarrow a_i^2 = b_i^2 \;\forall i$. $\quad a_i > 0,\ b_i > 0$ car $S, S' \in S_n^{++}$ donc $a_i = b_i \;\forall i$

Ainsi $\underline{S = S'}$. Il découle $\underline{R = R'}$.

5) Mq Ψ^{-1} continue : $\quad \Psi^{-1} : \begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \\ M & \longrightarrow & R \times S \end{array}$

par caractérisation séquentielle : si (M_k) suite de GL_n, $M_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} M$

d'après 3) $\forall k \in \mathbb{N}$, $M_k = R_k \times S_k$. et $M = R \times S$

O_n est un compact donc $\exists \sigma$ extractrice $/ \; R_{\sigma(k)} \longrightarrow R' \in O_n$

O_n fermé car image récipr. de $\{I_n\}$ par $M \to {}^tMM$ C^0
O_n borné car $\forall O \in O_n$, $\Vert O \Vert_2 = \sqrt{tr({}^tOO)} = \sqrt{tr(I_n)} = \sqrt{n}$

$$S_{\sigma(k)} = R^{-1}_{\sigma(k)} M_{\sigma(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} R'^{-1}.M$$

Posons $Q = R'^{-1}.M$. Q est une limite de suite de S_n^{++} ~~[illegible]~~, donc $Q \in S_n^+$ $\left(\overline{S_n^{++}} = S_n^+\right)$ Et $Q \in GL_n$ donc $Q \in S_n^{++}$.

On a donc $M = RS = R'Q$ par injectivité de Ψ $\underline{R = R'}$.

R est donc la seule valeur d'adhérence de (R_k), suite compacte donc $R_k \to R$

Ainsi $S_k = R_k^{-1}.M_k \longrightarrow R^{-1}M = S$ d'où la limite souhaitée.

98, 159, 181

Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$

Colly-Queffelec Analyse p. 206 + CVA (lemme)

Th: L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité $B(0,1)$ pour $|||.|||_2$

Lemme: $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^* = \{ M \longrightarrow tr(AM),\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \}$

demo: soit $\psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ ψ linéaire et bien définie
$A \longrightarrow tr(A.)$ $\quad Ker\,\psi = \{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tq } tr(AM) = 0\ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \}$

si $A \in Ker\,\psi$, en particulier $tr(AE_{ji}) = 0 = a_{ij} = 0$ $\forall (i,j) \in \{1..n\}^2$, d'où $A = 0$
ψ est donc injectif et $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$ d'où ψ isomorphisme.

Preuve du th: notons $K = B_2(0,1)$ (pour la norme subordonnée $|||.|||_2$)

1q $conv(O_n) \subset K$:

$\forall O \in O_n(\mathbb{R})$, $|||O||| \leq 1$ donc $O \in K$. d'où $O_n \subset K$.

De plus K convexe d'après l'inégalité triangulaire. Ainsi $conv(O_n) \subset K$
(par définition de $conv(O_n)$)

1q $K \subset conv(O_n)$:

D'abord on va mq $conv(O_n)$ est 1 compact.

O_n est un compact (borné et image réciproque de $\{I_n\}$ par $M \xrightarrow{C^0} {}^tMM$)

D'après le théorème de Carathéodory, $conv(O_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n^2+1} \alpha_i a_i,\ \alpha_i \in \Delta^{n^2+1},\ a_i \in O_n^{n^2+1} \right\}$
où $\Delta^{n^2+1} = \left\{ \alpha_i \in [0,1]^{n^2+1} \text{ tq } \sum_{i=1}^{n^2+1} \alpha_i = 1 \right\}$, compact.

Ainsi $conv(O_n)$ est l'image continue de $O_n^{n^2+1} \times \Delta^{n^2+1}$, c'est donc 1 compact.

Montrons l'inclusion par l'absurde: si $\exists M \in K \setminus conv(O_n)$. $\{M\}$ est 1 convexe fermé
$conv(O_n)$ 1 convexe compact, donc d'après le th. de Hahn-Banach,
$\exists \varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$ tq $\sup_{conv(O_n)} \varphi < \inf_{\{M\}} \varphi$ soit $\sup_{O \in O_n} \varphi(O) < \varphi(M)$

Si on arrive à mq $\forall \varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$, $\varphi(M) \leqslant \sup_{O \in O_n} \varphi(O)$, on aura la contradiction

soit $\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$, $\varphi = tr(A\,.)$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

D'après la décomposition polaire, $A = \Omega . S$, $\Omega \in O_n$, $S \in S_n^+(\mathbb{R})$

Soit $(e_i)_{i \leq n}$ base orthonormée de vp associés à S.

$$\varphi(M) = tr(AM) = tr(MA) = \sum_{i=1}^{n} \langle MAe_i, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle Ae_i, M^* e_i \rangle \underset{C-S}{\leqslant} \sum_{i=1}^{n} \|Ae_i\|_2 . \|M^* e_i\|_2$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \|Ae_i\|$$

car M et $M^* \in K$.

Or $\sum_{i=1}^{n} \|Ae_i\| = \sum_{i=1}^{n} \|Se_i\|$ car $\Omega \in O_n$

Par ailleurs $\sup_{O \in O_n} \varphi(O) \geqslant \varphi(\Omega^{-1}) = tr(A\Omega^{-1}) = tr(S) = \sum_{i=1}^{n} \langle Se_i, e_i \rangle$

$$= \sum_{i=1}^{n} \| Se_i \|$$

car les vp de S sont toutes $\geqslant 0$.

On a donc $\varphi(M) \leq \sup_{O \in O_n} \varphi(O)$ et ce $\forall \varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$ d'où la contradiction.

Ainsi $K \subset conv(O_n)$ d'où l'égalité.

$SO_3(\mathbb{R})$ est simple, mais pas seulement

Leçons : 161, 204, *101, 103, 106, 108, 160, 203*

[H2G2], partie VII.A
[Per], partie VI.2

Théorème

$SO_3(\mathbb{R})$ est un groupe simple, connexe et compact.

Démonstration :

→ Montrons que $SO_3(\mathbb{R})$ est compact.[1]

On a $SO_3(\mathbb{R}) = \psi^{-1}(\{I_3\}) \cap \det^{-1}(\{1\})$ est fermé dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, où $\psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tMM \end{array} \right.$ est une application continue.

Aussi, $O_3(\mathbb{R})$ est borné car ses éléments sont des isométries ; donc $SO_3(\mathbb{R})$ est borné.

Ainsi, comme $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est de dimension finie, $SO_3(\mathbb{R})$ est compact.

→ Aussi, $SO_3(\mathbb{R})$ est connexe (par arcs) ; on va montrer qu'on peut relier continûment ses éléments à I_3.

Soit $M \in SO_3(\mathbb{R})$, on dispose du résultat de réduction :

$$\exists P \in O_3(\mathbb{R}), M = PU_\theta P^{-1}, \text{ où } U_\theta = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{array}\right) \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}.$$

Soit alors $\gamma : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & SO_3(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & PU_{t\theta}P^{-1} \end{array} \right.$; γ est un chemin continu reliant M à I_3, et restant dans $SO_3(\mathbb{R})$.

Donc $SO_3(\mathbb{R})$ est connexe (par arcs).

→ On va maintenant montrer que $SO_3(\mathbb{R})$ est simple ; pour cela, soit $H \lhd SO_3(\mathbb{R})$, non-réduit à $\{I_3\}$. Voilà ce qu'on va faire : on va montrer que les retournements de $\mathbb{R}^3$ sont tous conjugués dans $SO_3(\mathbb{R})$, puis que H en contient un ; ainsi H les contiendra tous, et comme ils engendrent $SO_3(\mathbb{R})$ [2], on aura $H = SO_3(\mathbb{R})$, d'où la simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$. Commençons par le lemme suivant.

Lemme

$SO_3(\mathbb{R})$ agit transitivement sur l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration :

Soient D, D' deux droites de $\mathbb{R}^3$, engendrées par les vecteurs unitaires d et d'.

---

1. Notons que la connexité et la compacité de $SO_n(\mathbb{R})$ se montre exactement de la même façon, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on va d'abord montrer que les réflexions orthogonales engendrent $O_n(\mathbb{R})$.

Un rappel : une réflexion orthogonale, c'est une matrice diagonalisable de spectre $\{-1, 1\}$, avec -1 de multiplicité 1.

Soit $u \in O_n(\mathbb{R})$ et $F_u = \{x \in E | u(x) = x\}$ l'espace de ses points fixes. On pose $p_u = n - \dim F_u$ et on va en fait montrer que u est produit d'au plus p_u réflexions orthogonales.

On raisonne par récurrence sur $p_u \in \mathbb{N}$. Le cas $p_u = 0$ est trivial puisqu'il correspond à $u = I_n$.

Supposons donc $p_u > 0$; soit $x \in F_u^\perp \backslash \{0\}$, et soit $y = u(x)$. Comme $x \notin F_u$, $y \neq x$; et comme F_u et $F_u^\perp$ sont u-stables, $y \in F_u^\perp$. De plus, $\langle x - y, x + y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0$ (car u est une isométrie), donc $x - y$ et $x + y$ sont orthogonaux. Soit alors τ la réflexion orthogonale associée au vecteur $x - y$ (ie telle que $E_{-1} = \mathrm{Vect}\{x - y\}$). On a donc : $\tau(x - y) = y - x$ et $\tau(x + y) = x + y$, d'où, par demi-différence : $\tau(u(x)) = \tau(y) = x$. Aussi, $x - y \in F_u^\perp$, ce qui implique sur $\tau_{|F_u} = \mathrm{Id}_{F_u}$. En conséquence, $F_u \subset F_{\tau u}$; mais $x \in F_{\tau u} \backslash F_u$, donc $p_u > p_{\tau u}$. On utilise donc notre hypothèse de récurrence sur τu : $\tau u = \tau_1 \ldots \tau_r$, où les τ_i sont des réflexions orthogonales et $r \leqslant p_{\tau u}$. Mais alors on a $u = \tau\tau_1 \ldots \tau_r$ et $r + 1 \leqslant p_u$, ce qui achève la récurrence.

Désormais, soit $u \in SO_n(\mathbb{R})$.

Pour $n = 3$, on conclut alors que les retournements engendrent $SO_3(\mathbb{R})$: si $u \neq I_3$, alors $u = \tau_1\tau_2 = (-\tau_1)(-\tau_2)$ et les opposés des réflexions orthogonales sont ici des retournements.

Quand $n \geqslant 3$, il y a encore un peu de travail ; on peut déjà écrire $u = \tau_1 \ldots \tau_{2p}$ avec $2p \leqslant n$, les τ_i étant des réflexions orthogonales. Prenons une paire de réflexions orthogonales τ_1, τ_2 ; alors on peut trouver une paire de retournements σ_1, σ_2 telle que : $\tau_1\tau_2 = \sigma_1\sigma_2$. En effet : soient H_1 et H_2 les hyperplans laissés fixes par τ_1 et τ_2 et soit V un sev de $H_1 \cap H_2$ qui soit de dimension $n - 3$. Alors $\tau_1\tau_{2|V} = \mathrm{Id}$ et donc $\tau_1\tau_2\left(V^\perp\right) \subset V^\perp$. Mais d'après le cas $n = 3$, on peut écrire $\tau_1\tau_{2|V^\perp} = \sigma_1\sigma_2$, où les σ_i sont des retournements de $V^\perp$. Il ne reste qu'à les prolonger par l'identité sur V, et on a gagné.

Soient (e_1, e_2) et (e'_1, e'_2) des bases orthonormales de $D^\perp$ et de $D'^\perp$.
On a donc construit deux bases orthonormales de $\mathbb{R}^3$; la matrice de passage P de l'une à l'autre est donc dans $O_3(\mathbb{R})$.
Mais quitte à changer d' en $-d'$, on peut supposer que $P \in SO_3(\mathbb{R})$. ■

Soient R_D et $R_{D'}$ deux retournements de $\mathbb{R}^3$ d'axes respectifs D et D'.
Par le lemme, il existe $S \in SO_3(\mathbb{R})$ envoyant D sur D'.
Alors $SR_DS^{-1} \in SO_3(\mathbb{R})$ est semblable à R_D ; c'est donc un retournement de $\mathbb{R}^3$.
Soit $x \in D'$, on a : $SR_D \underbrace{S^{-1}x}_{\in D} = SS^{-1}x = x$; ainsi l'axe de SR_DS^{-1} est D', id est : $SR_DS^{-1} = R_{D'}$. On a ainsi montré que tous les retournements sont conjugués dans $SO_3(\mathbb{R})$.
Reste à trouver un retournement dans H.
Soit $h \in H$ avec $h \neq I_3$. On pose : $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} SO_3(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & \mathrm{tr}\left(ghg^{-1}h^{-1}\right) \end{array} \right.$.
φ est une application continue, donc $\varphi\left(SO_3(\mathbb{R})\right)$ est un compact connexe de $\mathbb{R}$, un segment.
$\forall g \in SO_3(\mathbb{R}), ghg^{-1}h^{-1} \in SO_3(\mathbb{R})$ donc $\varphi(g)$ est de la forme $1 + 2\cos\theta$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ (par le théorème de réduction des éléments de $SO_3(\mathbb{R})$).
Comme en plus $\varphi\left(I_3\right) = 3$, on en déduit que $\varphi\left(SO_3(\mathbb{R})\right) = [a, 3]$, pour un certain réel a.
Par l'absurde, supposons que $a = 3$.
Alors $\forall g \in SO_3(\mathbb{R}), \mathrm{tr}\left(ghg^{-1}h^{-1}\right) = 3$, et donc $ghg^{-1}h^{-1} = I_3$.
En conséquence, $h \in Z\left(SO_3(\mathbb{R})\right) = \{I_3\}$, ce qui est exclu.[3]
On a donc bien $a < 3$.
La suite $\left(1 + 2\cos\frac{\pi}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant 3 pour limite, on peut prendre $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a < 1 + 2\cos\frac{\pi}{n} < 3$.
Soit alors $g_n \in SO_3(\mathbb{R})$ tel que $\varphi\left(g_n\right) = 1 + 2\cos\frac{\pi}{n}$.
On pose $h_n = g_nhg_n^{-1}h^{-1}$; $h_n \in H$, car H est conjugué dans $SO_3(\mathbb{R})$ et car $h \in H$.
Comme $\mathrm{tr}\, h_n = 1 + 2\cos\frac{\pi}{n}$, on obtient que h_n est une rotation d'angle $\pm\frac{\pi}{n}$; ainsi $h_n^n \in H$ est une rotation d'angle π, autrement dit, un retournement. Ce qui conclut la preuve. ■

Références

[H2G2] P. CALDERO et J. GERMONI – *Histoires hédonistes de groupes et de géométries*, Calvage & Mounet, 2013.

[Per] D. PERRIN – *Cours d'algèbre*, Ellipses, 1996.

3. En effet, soit $n \geqslant 2$, et $h \in Z\left(SO_n(\mathbb{R})\right)$; on va montrer que h est une homothétie.
Soit D une droite de $\mathbb{R}^n$; on a : $R_{h(D)} = hR_Dh^{-1} = R_D$, car h est central.
Donc h laisse stables toutes les droites de $\mathbb{R}^n$, c'est donc une homothétie (c'est facile : on prend deux vecteurs non-colinéaires, ce sont des vecteurs propres de h, leur somme également, et on montre que tous les vecteurs sont de même valeur propre.)