205

# Espaces complets. Exemples et applications.

Soit $(E,d)$ un espace métrique

## I - Espaces métriques complets

### a) Premières définitions et propriétés

**Déf 1**: une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy si $\forall \varepsilon>0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p,q \geq N_\varepsilon, d(x_p,x_q) < \varepsilon$.

**Prop 2**: toute suite convergente de E est de Cauchy.

**Prop 3**: toute suite de Cauchy dans E possédant une valeur d'adhérence est convergente.

**Déf 4** (espace complet): un espace métrique dans lequel toutes les suites de Cauchy sont convergentes est appelé espace métrique complet.

**ex 5**: $\cdot$ $(\mathbb{R},|\cdot|)$ et $(\mathbb{C},|\cdot|)$ sont complets.
$\cdot$ $(\mathbb{Q},|\cdot|)$ n'est pas complet car $\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{\lfloor 10^n\sqrt{2}\rfloor}{10^n}}_{\in\mathbb{Q}} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

**Prop 6**: si $f:(E,d)\to(F,d')$ est une application uniformément continue, alors l'image d'une suite de Cauchy de E par f est une suite de Cauchy de F.

**contre-ex 7**: $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $(\mathbb{R}^*,|\cdot|)$, mais son image par $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ $\in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^*)$ est $(n+1)_{n\in\mathbb{N}}$ qui n'est pas de Cauchy.

**Prop 8**: si $F\subset E$ complet, alors $(F,d_F)$ est un espace métrique complet si et seulement si F est un fermé de E.

**Déf 9**: deux distances $d_1, d_2$ sur E sont dites Lipschitz-équivalentes s'il existe $a,b>0$ tels que $ad_1 \leq d_2 \leq bd_1$.

**Prop 10**: si $d_1$ et $d_2$ sont Lipschitz-équivalentes sur E, alors $(E,d_1)$ est complet si et seulement si $(E,d_2)$ est complet.

**Rq 11**: le résultat précédent est faux si on suppose $d_1$ et $d_2$ seulement topologiquement équivalentes (i.e définissant la même topologie). La notion de complétude est donc purement métrique et non topologique.

**Prop 12**: si $(E_1,d_1)$ et $(E_2,d_2)$ sont complets, alors $(E_1\times E_2, \sup(d_1,d_2))$ est complet.

**Rq 13**: idem pour $d_1+d_2$ et $\sqrt{d_1^2+d_2^2}$ qui sont Lipschitz-éq à $\sup(d_1,d_2)$.

### b) Exemples

**ex 14**: $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont complets, munis par exemple de la métrique du sup.

**ex 15**: si X espace topologique, l'ensemble des fonctions bornées de X dans $\mathbb{R}$ muni de $d(f,g) = \sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|$ est complet.

**ex 16**: $(\mathcal{C}^\infty([a,b],\mathbb{R}),d)$ où $d(f,g) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\|f^{(k)}-g^{(k)}\|_\infty}{1+\|f^{(k)}-g^{(k)}\|_\infty}$ est complet.

### c) Théorèmes importants

**Th/déf 17** (complété de E): il existe une injection isométrique $i: E \to \hat{E}$, avec $i(E)$ dense dans $\hat{E}$ complet. De plus, cette injection est unique à isométrie bijective près. On appelle $\hat{E}$ le complété de E.

**ex 18**: $(\mathbb{R},|\cdot|)$ est le complété de $(\mathbb{Q},|\cdot|)$.

**Th 19** (de prolongements): soit $(E,d)$ et $(F,d')$ deux espaces métriques, F complet, et A dense dans E. Si $f: A\to F$ est uniformément continue, alors il existe une unique application continue $\tilde{f}: E\to F$ telle que $\tilde{f}_{|A} = f$. De plus, $\tilde{f}$ est uniformément continue.

**Déf 20**: $f: E\to E$ est dite contractante s'il existe $k\in[0,1[$ tel que $\forall (x,y)\in E^2$, $d(f(x),f(y)) \leq k.d(x,y)$.

**Th 21** (point fixe): si $(E,d)$ est complet non vide, toute application $f: E\to E$ contractante admet un unique point fixe.

**contre-ex 22**: $f: ]0,1] \to ]0,1]$, $x \mapsto \frac{x}{2}$ est contractante mais n'admet pas de point fixe.

**Déf 23**: soit U un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$, $f: U\to\mathbb{R}^d$ est dite localement lipschitzienne en la variable d'état si $\forall (t_0,z_0)\in U, \exists C_0 := [t_0-\tau, t_0+\tau]\times\bar{B}(z_0,r) \subset U$ et $K>0$ t.q $\forall (t,z_1),(t,z_2)\in C_0$, $\|f(t,z_1)-f(t,z_2)\| \leq K.\|z_1-z_2\|$.

**Appli 24**: Théorème de Cauchy-Lipschitz (DEV 1): soit U un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$, $f: U\to\mathbb{R}^d$ continue et localement lipschitzienne en la variable d'état, $(t_0,y_0)\in U$. Alors il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy $(\mathcal{C}): \begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

Déf 25 : $(E,d)$ est dit précompact si $\forall \varepsilon>0$, il existe un recouvrement fini de $E$ par des boules (ouvertes) de rayon $\varepsilon$.

Prop 26 : On a équivalence entre :
i) $(E,d)$ est compact
ii) $(E,d)$ est précompact et complet.

ex 27 : On munit $[0,1]^{\mathbb{N}}$ de $d(x,y)=\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n-y_n|}{2^{n+1}}$.
Alors $([0,1]^{\mathbb{N}},d)$ est compact.

Déf 28 : soit $A$ un ensemble et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $A$ dans $(E,d)$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme si : $\forall\varepsilon>0, \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}, \forall p,q\geq N_\varepsilon, \forall x\in A, d(f_p(x),f_q(x))\leq\varepsilon$.

Th 29 : si $(E,d)$ est complet, toute suite qui vérifie le critère de Cauchy uniforme converge uniformément.

Th 30 : un espace vectoriel normé $E$ est complet (pour la distance $\|x-y\|$) si et seulement si toute série absolument convergente $(x_n)$ (i.e telle que $\sum_{n=0}^{+\infty}\|x_n\|<+\infty$) est convergente dans $E$.

Th 31 : soit $X, Y$ deux espaces topologiques, $(E,d)$ complet, $a\in\bar{A}\subset X$, $b\in\bar{B}\subset Y$ et $f: A\times B\to E$. On suppose qu'il existe $g: A\to E$ et $h: B\to E$ telles que $f(x,y)\xrightarrow[y\to b]{} g(x)$ uniformément sur $A$ et $f(x,y)\xrightarrow[x\to a]{} h(y)$ simplement sur $B$. Alors $f$ a une limite en $(a,b)$ et
$\lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,y)) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x,y))$.

## II - Espaces de Banach

### a) Exemples

Déf 32 (espace de Banach) : un espace vectoriel normé complet (pour la distance $d(x,y)=\|x-y\|$) est appelé espace de Banach.

ex 33 : tout $\mathbb{R},\mathbb{C}$-e.v.n de dimension finie est de Banach.

ex 34 : si $E$ est un e.v.n, $F$ de Banach, $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de $E$ dans $F$ muni de $\|f\|_\infty = \sup_{\|x\|=1}\|f(x)\|$ est de Banach.

ex 35 : $(B(X,\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$ défini dans ex. 15 où $\|f\|_\infty=\sup_{x\in X}|f(x)|$ est de Banach.

ex 36 : soit $\Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}^k_b(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $k$-fois différentiables à valeurs dans $\mathbb{C}$ de dérivées continues bornées, muni de $\|f\| = \sum_{|\alpha|\leq k}\sup_{\Omega}|\partial^\alpha f(x)|$, est de Banach.

Th 37 (Riesz) : soit $E$ un $K$-e.v.n, $B$ sa boule unité fermée. On a équivalence entre : i) $\dim E<+\infty$
ii) $B$ est compacte.

contre-ex 38 : la topologie de $(\mathcal{C}^\infty([a,b],\mathbb{R}),d)$ n'est pas normable.

### b) Le théorème de Baire et ses conséquences

Prop 39 : soit $(E,d)$ complet, $(F_n)$ une suite décroissante de fermés non vides de $E$ telle que $\lim_{n\to+\infty}\operatorname{diam}(F_n)=0$. Alors il existe $x\in E$ t.q $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n=\{x\}$.

Th 40 (Baire) : si $(E,d)$ est complet non vide, et si $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une est une suite d'ouverts denses de $E$, alors $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n} = E$.

Appli 41 : $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable ($\mathbb{R}=\bigcup_{x\in\mathbb{R}} B_f(x,0)$).

Th 42 (application ouverte) : soit $E,F$ de Banach, $T: E\to F$ linéaire continue surjective. Alors $T$ est ouverte.

Cor 43 (th de Banach) : soit $E,F$ de Banach, $T: E\to F$ linéaire continue bijective. Alors $T^{-1}$ est continue.

Th 44 (Banach-Steinhaus) : soit $E$ de Banach, $F$ un e.v.n, $\mathcal{L}_c(E,F)$ comme dans l'ex. 34 et $H\subset\mathcal{L}_c(E,F)$. Alors ou bien $(\|f\|_\infty)_{f\in H}$ est bornée, ou bien il existe $x\in E$ tel que $\sup_{f\in H}\|f(x)\|=+\infty$.

Déf 45 : une intersection dénombrable d'ouverts est appelé un $G_\delta$.

Appli 46 (DEV2) : on note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continues et $2\pi$-périodiques, muni de $\|f\|_\infty=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$. Alors :
1. $\forall x_0\in\mathbb{R}$, il existe un $G_\delta$ dense $D$ de $(\mathcal{C}_{2\pi},\|\cdot\|_\infty)$ tel que $\forall f\in D$, $\sup_{n\in\mathbb{N}}|S_n(f)(x_0)|=+\infty$ où $S_n(f)=\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\exp(ik\cdot)$.
2. Il existe un $G_\delta$ dense $\Delta$ de $(\mathcal{C}_{2\pi},\|\cdot\|_\infty)$ tel que $\forall f\in\Delta$, l'ensemble $\{x\in\mathbb{R}, \sup_{n\in\mathbb{N}}|S_n(f)(x)|=+\infty\}$ soit un $G_\delta$ dense de $(\mathbb{R},|\cdot|)$.

Th 47 (graphe fermé) : soit $E,F$ de Banach, $T\in\mathcal{L}(E,F)$ de graphe fermé dans $E\times F$, i.e $\forall (x_n)\in E^{\mathbb{N}}, (x,y)\in E\times F$, $[x_n\to x$ et $T(x_n)\to y] \Rightarrow [T(x)=y]$. Alors $T\in\mathcal{L}_c(E,F)$.

c) Espaces $L^p$

Déf 48 : soit $1 \leq p \leq +\infty$, $(X,\mu)$ un espace mesuré, $\mu$ positive, on note pour $f : X \to \mathbb{C}$ mesurable, $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ si $p < +\infty$, et $\|f\|_\infty = \inf\{M \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M \text{ p.p. } \forall x \in X\}$ sinon. On note $L^p(\mu)$ l'ensemble des classes de fonctions (pour la relation d'équivalence "être égal p.p") pour lesquelles $\|f\|_p < +\infty$.

Prop 49 (inégalité de Hölder) : soit $p, q$ conjugués, $1 < p \leq +\infty$, $f \in L^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$, alors $fg \in L^1(\mu)$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p . \|g\|_q$.

Prop 50 (inégalité de Minkowski) : si $f, g \in L^p(\mu)$, alors $f+g \in L^p(\mu)$ et $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Th 51 (Riesz-Fisher) : $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.

Th 52 : soit $(f_n)$ de Cauchy dans $L^p(\mu)$ possédant une limite $f$. Alors il existe une sous-suite de $(f_n)$ qui converge ponctuellement p.p vers $f$.

Appli 53 : Inégalité de Hardy (DEV3) :
soit $1 < p < +\infty$. $\forall f \in L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on pose $T_f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \end{array}$
Alors $T_f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ et $\|T_f\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p$.

Supposons maintenant que $X = \mathbb{R}^k$ et $\mu$ = mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^k$.

Th 54 : soit $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^k)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact, où $supp(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^k, f(x) \neq 0\}}$. Pour $1 \leq p < +\infty$, $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^k)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^k)$, qui réalise donc une complétion de $(\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^k), \|\cdot\|_p)$.

Déf 55 : on dit qu'une fonction s'annule à l'infini si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K \subset \mathbb{R}^k$ compact tel que $|f(x)| < \varepsilon \; \forall x \notin K$. On note l'espace correspondant $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^k)$.

Th 56 : $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^k)$ est le complété de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^k)$ muni de $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^k} |f(x)|$.

III - Espaces de Hilbert

Déf 57 : un espace H muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, complet pour la distance associée à la norme $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, est appelé espace de Hilbert.

Rq 58 : un Hilbert est aussi un Banach, en posant $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Prop 59 (inégalité de Cauchy-Schwartz) : soit $x, y \in H$ Hilbert. Alors $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| . \|y\|$, avec égalité si et seulement si $x$ et $y$ sont liés.

ex 60 : $(L^2(\mu), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ où $\langle f, g \rangle = \int_X f . \overline{g} \, d\mu$ est un espace de Hilbert.

Prop 61 (projection sur un convexe fermé) : soit K un convexe fermé de H Hilbert et $x \in H$. Alors :
i) $\exists ! \, x' \in K$ t.q $\|x - x'\| = dist(x, K)$
ii) $x'$ est caractérisé par $Re(\langle x - x', u - x' \rangle) \leq 0 \; \forall u \in K$
iii) $\|x' - y'\| \leq \|x - y\| \; \forall x, y \in H$.

Déf 62 : si $A \subset H$, on note $A^\perp := \{x \in H, \langle x, a \rangle = 0 \; \forall a \in A\}$.

Prop 63 (projection orthogonale) : soit $F \subset H$ fermé $\neq \{0\}$. Alors :
i) $\exists$ une projection continue P de H sur F telle que $\|P\| = 1$
ii) $Ker P = F^\perp$ et donc $H = F \oplus F^\perp$. $\forall x \in H$, $\|x\|^2 = \|P(x)\|^2 + \|x - P(x)\|^2$
iii) $P(x)$ est caractérisé par $\langle x - P(x), y \rangle = 0 \; \forall y \in F$. En particulier, $(dist(x, F))^2 = \|x - P(x)\|^2 = \|x\|^2 - \langle P(x), x \rangle$.

Déf 64 : une base $(e_i)_{i \in I}$ de H est dite orthonormale si $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.

Prop 65 : H possède toujours une base orthonormale et deux bases orthonormales ont le même cardinal.

Références :


- Les maths en tête, Gourdon
- Topologie des espaces métriques, Blanloeil
- Analyse pour l'agrégation, Zuily-Queffélec
- Analyse réel et complexe, Rudin

Pour les développements :

Analyse pour l'agrégation de mathématiques, Bernis.

# Inégalité de Hardy

**Théorème :**
*Soit $p \in ]1, +\infty[$. Pour tout $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on pose*

$$T_f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \end{array} \right.$$

*Alors $T_f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+)$ et $||T_f||_{\mathbb{L}^p} \leq \frac{p}{p-1}||f||_{\mathbb{L}^p}$.*

*Démonstration :*
Déjà, par l'inégalité de Hölder, la quantité $T_f(x)$ est bien définie. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$|T_f(x)| \leq \frac{1}{x}x^{\frac{1}{q}}||f||_{\mathbb{L}_p} = x^{-\frac{1}{p}}||f||_{\mathbb{L}_p} < +\infty, \text{ où } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}_+^*)$. On la prolonge naturellement de manière continue à $\mathbb{R}_+$ en lui attribuant la valeur 0 en 0.

Pour commencer, on suppose $f$ positive. $T_f$ est donc positif.
D'après le théorème fondamental de l'analyse, $T_f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$T_f'(x) = \frac{1}{x}(f(x) - T_f(x)).$$

soit

$$T_f(x) = f(x) - xT_f'(x). \tag{1}$$

Pour tout $0 < \varepsilon < R$, en multipliant (1) par $T_f^{p-1}(x)$ puis en intégrant :

$$\int_\varepsilon^R T_f^p(x)dx = \int_\varepsilon^R T_f^{p-1}(x)f(x)dx - \int_\varepsilon^R T_f^{p-1}(x)xT_f'(x)dx \,;$$

et comme les fonctions $\frac{1}{p}T_f^p$ et $\mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*}$ sont éléments de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$, par intégration par parties, on obtient :

$$\int_\varepsilon^R T_f^p(x)dx = \int_\varepsilon^R T_f^{p-1}(x)f(x)dx - \left[\frac{x}{p}T_f^p(x)\right]_\varepsilon^R + \frac{1}{p}\int_\varepsilon^R T_f^p(x)dx.$$

On obtient finalement :

$$\frac{p-1}{p}\int_\varepsilon^R T_f^p(x)dx = \int_\varepsilon^R T_f^{p-1}(x)f(x)dx + \frac{\varepsilon T_f^p(\varepsilon)}{p} - \frac{RT_f^p(R)}{p} \tag{2}$$

Or, on a $|f(t)| = \underset{t\to 0^+}{o}(1)$, donc par intégration des relations de comparaison de fonctions positives,

$$\left|\int_0^x f(t)dt\right| \leq \int_0^x |f(t)|dt = \underset{x\to 0^+}{o}\left(\int_0^x 1dt\right) = \underset{x\to 0^+}{o}(x),$$

et donc $T_f(x) = \underset{x\to 0^+}{o}(1)$.

Donc en laissant tendre $\varepsilon$ vers 0 dans (2), pour tout $R > 0$, on a :

$$\frac{p-1}{p}\int_0^R T_f^p(x)dx = \int_0^R T_f^{p-1}(x)f(x)dx - \frac{RT_f^p(R)}{p}.$$

La positivité de $T_f$ donne alors :

$$\frac{p-1}{p}\int_0^R T_f^p(x)dx \leq \int_0^R T_f^{p-1}(x)f(x)dx.$$

L'inégalité de Hölder, appliquée aux fonctions $T_f^{p-1}$ et $f$, pour les réels conjugués $\frac{p}{p-1}$ et $p$, nous donne alors :

$$\frac{p-1}{p}\int_0^R T_f^p(x)dx \leq \left(\int_0^R T_f^p(x)dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_0^R f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Comme $f^p$ est positive et continue, à support compact, elle est intégrable. Ainsi, on obtient finalement :

$$\left(\int_0^R T_f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1}\left(\int_0^{+\infty} f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Comme $T_f^p$ est positive, la majoration précédente indique que son intégrale sur $\mathbb{R}_+$ est finie, autrement dit que $T_f$ est un élément de $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+)$. L'inégalité voulue en découle alors par passage à la limite sur $R$.

Dorénavant, $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}_+^*)$ n'est plus supposée positive.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$|T_f(x)| \leq \frac{1}{x}\int_0^x |f(x)|dx = T_{|f|}(x).$$

Comme $|f|$ est un élément positif de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}_+^*)$, il est loisible de lui appliquer l'inégalité $||T_{|f|}||_{\mathbb{L}^p} \leq \frac{p}{p-1}|| \, |f| \, ||_{\mathbb{L}^p} = \frac{p}{p-1}||f||_{\mathbb{L}^p}$.

La croissance de la fonction $u \mapsto u^p$, de l'intégrale et de la fonction $u \mapsto u^{\frac{1}{p}}$ indiquent alors que $T_f$ est un élément de $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+)$ et qu'on a :

$$||T_f||_{\mathbb{L}^p} \leq \frac{p}{p-1}||f||_{\mathbb{L}^p}.$$

Nous allons à présent prolonger l'opérateur $T$.

Munissons les espaces vectoriels $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}_+^*)$ et $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+)$ de la norme $||\cdot||_{\mathbb{L}^p}$. Nous venons de montrer que l'application, manifestement linéaire,

$$T : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_c(\mathbb{R}_+^*) & \to & \mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+) \\ f & \mapsto & T_f \end{array} \right.$$

est continue et vérifie l'inégalité

$$||T||_{\mathscr{L}_c(\mathcal{C}_c(\mathbb{R}_+^*),\mathbb{L}^p)} \leq \frac{p}{p-1}.$$

Comme l'opérateur $T$ est linéaire continue, il est uniformément continue. De plus, $(\mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+), ||\cdot||_{\mathbb{L}^p})$ est un espace de Banach dans lequel $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}_+^*)$ est dense.
Donc par le **théorème de prolongement des applications uniformément continues sur un espace complet**, il existe une unique application linéaire $\tilde{T} \in \mathscr{L}_c(\mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+))$ qui prolonge $T$ et vérifie :

$$||\tilde{T}||_{\mathscr{L}_c(\mathbb{L}^p)} = ||T||_{\mathscr{L}_c(\mathcal{C}_c(\mathbb{R}_+^*),\mathbb{L}^p)} \leq \frac{p}{p-1}. \tag{3}$$

Prolongeons à présent l'inégalité de Hardy.

Soit $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+)$. On dispose d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}_+^*)$ telle que :

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+)} f.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. D'après l'inégalité de Hölder, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} |T_{f_n}(x) - T_f(x)| &\leq \frac{1}{x}\int_0^x |f_n(t) - f(t)|dt \\ &\leq \frac{1}{x} x^{\frac{p-1}{p}} ||f_n - f||_{\mathbb{L}^p} \end{aligned}$$

et donc $|T_{f_n}(x) - T_f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Autrement dit, la suite $(T_{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $T_f$.
Or, $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+)} f$ donc par continuité de $\tilde{T}$, on a :

$$T_{f_n} = \tilde{T}_{f_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+)} \tilde{T}_f.$$

Donc, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(T_{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\lambda$-presque partout vers $\tilde{T}_f$. Par unicité de la limite, pour presque tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$T_f(x) = \tilde{T}_f(x),$$

ce qui implique en particulier que $T_f$ est un élément de $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+)$, puisque $\tilde{T}_f$ l'est.
De plus, d'après (3), on a

$$||T_f||_{\mathbb{L}^p} = ||\tilde{T}||_{\mathbb{L}^p} \leq \frac{p}{p-1}||f||_{\mathbb{L}^p}.$$

□

**Optimalité de l'inégalité :**

Montrons que $||T||_{\mathscr{L}_c(\mathbb{L}^p)} = \dfrac{p}{p-1}$.
Soit $R > 0$. Pour tout $\eta \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$f_\eta : t \mapsto \mathbf{1}_{]0,R[}(t)t^{\eta-\frac{1}{p}}$$

La positivité de $T_{f_\eta}$ donne :

$$\begin{aligned} ||T_{f_\eta}||_{\mathbb{L}^p}^p &\geq \int_0^R T_{f_\eta}^p(x)dx \\ &= \int_0^R \frac{1}{x^p}\frac{1}{(\eta-\frac{1}{p}+1)^p}x^{\eta p-1+p}dx \text{ car } x \leq R \\ &= \left(\frac{p}{p-1+\eta p}\right)^p ||f_\eta||_{\mathbb{L}^p}^p. \end{aligned}$$

On en déduit donc que pour tout $\eta \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\frac{p}{p-1+\eta p} \leq ||T||_{\mathscr{L}_c(\mathbb{L}^p)} \leq \frac{p}{p-1}.$$

Comme le réel $\eta$ est quelconque, on a bel et bien : $||T||_{\mathscr{L}_c(\mathbb{L}^p)} = \dfrac{p}{p-1}$, ce qui démontre l'optimalité de l'inégalité de Hardy.

□

# Séries de Fourier des applications continues

On notera $C_{2\pi}$ l'espace des fonctions continues $2\pi$-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et $S_N(f) : t \mapsto \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{int}$ la série de Fourier d'ordre $N \in \mathbb{N}$ d'une fonction $f \in C_{2\pi}$, où $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$. On rappelle que $C_{2\pi}$ muni de la norme infini est un espace de Banach. Nous allons démontrer les résultats suivant.

**Théorème 1.**

1. *Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe un $G_\delta$ dense (i.e. une intersection dénombrable d'ouverts denses) $U$ de $(C_{2\pi}, ||.||_\infty)$ tel que, pour tout $f \in U$*
$$\sup_{N\in\mathbb{N}} |S_N(f)(x_0)| = +\infty$$
2. *Il existe un $G_\delta$ dense $V$ de $(C_{2\pi}, ||.||_\infty)$ tel que, pour tout $f \in V$, l'ensemble*
$$\{x \in \mathbb{R} | \quad \sup_{N\in\mathbb{N}} |S_N(f)(x)| = +\infty\}$$
*soit un $G_\delta$ dense de $(\mathbb{R}, |.|)$.*

On rappelle que la série de Fourier $S_N(f)$ peut s'exprimer sous la forme du produit de convolution $S_N(f) = D_N * f : x \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)f(x-t)dt$, où $D_N$ est le noyaux de Dirichlet définie par $D_N(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} e^{inx}$.
On peut dès maintenant observer que $S_N(f)(x_0) = D_N * f(x_0) = D_N * T_{x_0}(f)(0) = S_N(T_{x_0}(f))(0)$, où $T_{x_0} : f \mapsto f(\cdot + x_0)$ est un homéomorphisme de $C_{2\pi}$ transformant les ensembles $G_\delta$ denses en $G_\delta$ denses. Il suffit donc de démontrer le 1) pour $x_0 = 0$. Un calcul simple donne également, pour tout $x$ différent de 0 modulo $2\pi$, l'expression utile
$$D_N(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$
Introduisons la forme linéaire continue
$$\begin{array}{cccc} l_N & : & C_{2\pi} & \to & \mathbb{C} \\ & & f & \mapsto & S_N(f)(0) \end{array}$$
En tirant parti du fait que $l_N(f) = D_N * f(0)$, nous allons montrer que $\lim_{N\to+\infty} \|l_N\| = +\infty$. La contraposée du théorème de Banach-Steinhaus permettra ensuite de conclure qu'il existe un $G_\delta$ dense $U$ de $C_{2\pi}$ tel que $\sup_{N\in\mathbb{N}} |S_N(f)(0)| = +\infty$ pour tout $f$ dans $U$.

Commençons par calculer la norme de $l_N$. Pour tout $f \in C_{2\pi}$, on a $|l_N(f)| = |D_N * f(0)| \leq \|f\|_\infty \|D_N\|_1$ donc $\|l_N\| \leq \|D_N\|_1$.
Pour démontrer l'inégalité inverse, posons $f_\varepsilon = \frac{D_N}{|D_N|+\varepsilon}$, avec $\varepsilon > 0$. On a
$$l_N(f_\varepsilon) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{D_N(t)^2}{|D_N(t)|+\varepsilon}dt \geq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{D_N(t)^2-\varepsilon}{|D_N(t)|+\varepsilon}dt = \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)| - \varepsilon dt = \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)|dt - 2\pi\varepsilon$$
On a ainsi $|l_N(f_\varepsilon)| \geq \|D_N\|_1 - 2\pi\varepsilon$, d'où $\|l_N\| \geq \|D_N\|_1$ car $\varepsilon$ est arbitraire et $\|f_\varepsilon\|_\infty \leq 1$.
Il vient donc que $\|l_N\| = \|D_N\|_1$. Or on a
$$\pi \|D_N\|_1 = \int_0^{\pi} \left|\frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right| dt = \int_0^{\pi(N+\frac{1}{2})} \left|\frac{\sin(x)}{\sin\left(\frac{x}{2N+1}\right)(N+\frac{1}{2})}\right| dx$$

où l'on a effectué le changement de variable $x = (N + \frac{1}{2})t$. Comme $|\sin\left(\frac{x}{2N+1}\right)(N + \frac{1}{2})| \leq x$ sur $\mathbb{R}_+$, on peut conclure par divergence de l'intégrale $\int_0^R \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| dx$ en $+\infty$ que $\|D_N\|_1 \to +\infty$ lorsque $N$ tend vers l'infini. On a ainsi montré que $\lim_{N\to+\infty} \|l_N\| = +\infty$. La proposition suivante permet alors de conclure le premier point du théorème, en remplaçant $E$ par $C_{2\pi}$, $F$ par $\mathbb{C}$ et $A$ par la famille de formes linéaires $\{l_N, N \in \mathbb{N}\}$.

**Proposition 1.** *Soit $E$ un espace de Banach, $F$ un espace vectoriel normé et $A \subset \mathcal{L}(E, F)$ tel que $\sup_{f\in A} \|f\| = +\infty$. Alors il existe un $G_\delta$ dense $U$ de $E$ tel que $\sup_{f\in A} \|f(x)\|_E = +\infty$ pour tout $x \in U$.*

*Démonstration.* Soit $n$ un entier positif, on pose

$$U_n = \cup_{f\in A}\{x \in E|\ \|f(x)\| > n\} = \{x \in E|\quad \exists f \in A \quad \text{t.q.} \quad \|f(x)\| > n\}$$

Les ensembles $U_n$ sont ouverts par continuité des éléments de $A$. Si $U_n$ n'était pas un ensemble dense de $E$, alors le fermé $F_n = \{x \in E|\ \|f(x)\| \leq n \quad \forall f \in A\}$ contiendrait une boule ouverte $B(x_0, r)$. Ainsi, pour tout $u \in E\backslash\{0\}$, on aurait $\frac{ru}{2\|u\|} + x_0 \in F_n$, donc $\frac{\|f(u)\|}{\|u\|} \leq \frac{2}{r}(n + \|f(x_0)\|)$. Cette dernière inégalité est absurde car elle contredit le caractère non borné de $\|f\|$, les $U_n$ sont donc des ouverts denses. Comme $E$ est complet, le théorème de Baire affirme que $U = \cap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est dense, ce qui termine la preuve. □

Passons à la preuve du second point. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dense de $\mathbb{R}$. Par le premier point du théorème, il existe pour tout $k \in \mathbb{N}$ un $G_\delta$ dense $U_k$ de $C_{2\pi}$ tel que $\sup_N |S_N(f)(x_k)| = +\infty$ pour tout $f \in U_k$. L'ensemble $V = \cap_{k\in\mathbb{N}} U_k$ est donc également un $G_\delta$ dense comme intersection dénombrable de $G_\delta$ denses dans un espace complet.
Soit $f \in V$, il vient alors que l'ensemble ouvert $W_p = \cup_{N\in\mathbb{N}}\{x \in \mathbb{R} \quad \text{t.q.} \quad |S_N(f)(x)| > p\}$ est dense dans $\mathbb{R}$ car il contient la suite $(x_k)$. On applique à nouveau le théorème de Baire pour voir que l'ensemble

$$\cap_{p\in\mathbb{N}} W_p = \{x \in \mathbb{R}| \quad \sup_{N\in\mathbb{N}} |S_N(f)(x)| = +\infty\}$$

est un $G_\delta$ dense de l'espace complet $(\mathbb{R}, |.|)$.