Leçon 208 : Espaces vectoriels normés. Applications linéaires continues. Exemples.

E un IK-ev, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Définitions et premières propriétés :

1) Espaces vectoriels normé.

Def 1 : Une norme est une application $E \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \|x\|$ telle que
- i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$
- ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- iii) $\forall (x,y) \in E^2$, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Muni d'une norme, E est un IK-espace vectoriel normé (evn)

Exemple 2 : Dans $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$,
$\|x\|_1 = \sum |x_i|$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum x_i^2}$, $\|x\|_\infty = \sup_{1\leq i \leq n} |x_i|$ sont des normes.

Def 3 : Sur $\mathbb{R}^n$, on définit $\|x\|_p = (\sum_i x_i^p)^{1/p}$, $p \geq 1$

Proposition 4 : Inégalité de Hölder : Pour $p > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$, $\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q$

Proposition 5 : Inégalité de Minkowski : $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$
$\|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$.

Corollaire 6 : $\|.\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$

Exemple 7 : Soit X un ensemble, l'ensemble $\mathcal{B}(X,E)$ des applications bornées de X dans E est un evn muni de la norme $\|.\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$ (norme de la conv unif)

Def / Prop 8 : $d(x,y) = \|x - y\|$ définit une distance sur E. l'evn E est donc un espace métrique muni de d.

Def 9 : Deux normes $\|.\|$ et $\|.\|'$ sur un même ev E sont dites équivalentes si $\exists a, b > 0$ tq $\forall x \in E$,
$a\|x\| \leq \|x\|' \leq b\|x\|$

Remarque 10 : On peut, de la même manière, définir des distances équivalentes.

Exemple 11 : Sur $\mathbb{R}^n$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq p^{1/p} \|x\|_\infty$.

Proposition 12 : Soit $\|.\|$ et $\|.\|'$ deux normes équivalentes sur E.
i) Une suite de E est de cauchy pour $\|.\|$ si elle est de cauchy pour $\|.\|'$.
ii) Une suite de E converge pour $\|.\|$ ssi elle converge pour $\|.\|$ la limite est unique.
iii) $(E, \|.\|)$ est complet (compact / connexe / ouvert) ssi $(E, \|.\|')$ l'est.

Proposition 13 : La norme est continue.

2) Application linéaire continue

Soit E, F, G des IK-ev, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Proposition 14 : Soient $(E, \|\ \|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ 2 IK evn. Soit f une application linéaire de E dans F ($f \in \mathcal{L}(E,F)$)
On a équivalence entre :
(i) f est continue sur E (ii) f continue en 0, (iii) $\exists M > 0$ tq $\forall x \in E$ $\|f(x)\| \leq M \|x\|_E$

Corollaire 15 : Les applications linéaires continues sont lipschitziennes et unif-continues.

Notation 16 : $\mathcal{L}_c(E,F) = \{$application linéaires continues de E ds F$\}$

Proposition 17 : L'application $|||.||| : \mathcal{L}_c(E,F) \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $f \longmapsto |||f||| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|$ est une norme.
De plus, $\sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\| = 1} \|f(x)\| =$ plus petit réel positif M tel que $\|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E$ $\forall x \in E$

Remarque 18 : $\forall x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq |||f|||. \|x\|_E$.

Exemple 19 : Sur $(\mathcal{C}_m([a,b], \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ on a la forme linéaire $\varphi_g : f \in \mathcal{C}_m([a,b], \mathbb{R}) \longmapsto \int_a^b f(t) g(t) dt$, avec $g \in \mathcal{C}_m([a,b], \mathbb{R})$.
Sa norme est : $|||\varphi_g||| = \int_a^b |g(t)| dt$.

Proposition 20 : $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$, $g \in \mathcal{L}_c(F,G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}_c(E,G)$ et $|||g \circ f||| \leq |||g|||\, |||f|||$.

Proposition 21 : Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ deux IK-evn. Soit $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$ l'image d'un borné de E par u est un borné de F.

II Dimension finie.

1) Propriétés :

Proposition 22 : Dans un evn de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

Exemple 23 : Soit $e_j(t) = e^{ijt}$, $0 \leq j \leq n$ et $E_n = \text{Vect}(e_0, \dots, e_n)$ alors si $f \in E_n$, $f = \sum_{i=0}^{n} C_j e_j$, $\|f\|_1 = \sum_{j=0}^{n} |C_j|$, $\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$

on a $\|f\|_\infty \leq \|f\|_1 \leq \sqrt{m+1}\,\|f\|_\infty$.

Corollaire 24: Toute application linéaire d'un evn de dim finie dans un evn quelconque est continue

C-Exemple 25 : $E = (\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt)$ et $(\mathbb{R}, |.|)$ alors $u : E \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(0)$ est linéaire sur E mais pas continue.

Corollaire 26 : tout evn de dimension finie est complet.

Corollaire 27 : tout sev de dim finie d'un evn est fermé.

Corollaire 28 : les parties compactes d'un evn de dim finie sont les fermés bornés.

Remarque 29 : tous les corollaires sont faux en dim ∞.

Théorème de Riesz 30 : La boule unité fermé d'un evn est compact ssi l'evn est de dim finie.

2) Matrices

L'identification de $M_{m\times1}(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}^m$ permet de considérer de matrices de taille $m\times m$ comme des applications linéaires de $\mathbb{K}^m$ dans $\mathbb{K}^m$.

$$\mathbb{K}^m \longrightarrow M_{m\times1}(\mathbb{K}) \longrightarrow M_{m\times1}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}^n$$
$$x \longmapsto X \longmapsto Y = MX \longmapsto y$$
avec $M \in M_{n,m}(\mathbb{K})$

Donc $y_i = \sum_{j=1}^m m_{ij} x_j$. On a un isomorphisme de $M_{n,m}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$

Proposition 31 : $M_{n,m}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel.

Def 32 : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ le rayon spectral de A est $\rho(A) := \max\{|\lambda| \mid \lambda \in Sp(A)\}$.

Def 33 : Une norme $\|.\|$ sur $M_n(\mathbb{K})$ est dite matricielle si $\forall A, B \in M_n(\mathbb{K})$, $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Def 34 : On appelle norme subordonnées à N (norme) sur $M_n(\mathbb{K})$, la norme définie par : $\|A\|_N := \sup_{x\neq0} \frac{N(ax)}{N(x)}$, noté $|||.|||$

Remarque 35 : $|||.|||$ est une norme matricielle.

Proposition 36 Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, $|||A||| = \sup_{N(x)\leq1} N(ax) = \sup_{N(x)=1} N(Ax)$

Exemple 37 : les normes subordonnées aux normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont $|||A|||_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$
$|||A|||_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$ et $|||A|||_2 = \rho(A^*A)^{1/2}$

Remarque 38 : Si A est hermitienne, $|||A|||_2 = \rho(A)$
Si A est unitaire, $|||A|||_2 = \sqrt{\rho(I)} = 1$

Théorème de Householder 39 :

- Soit A une matrice carré qcq, alors $\rho(A) \leq |||A|||$
- Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\varepsilon > 0$. $\exists$ une norme matricielle subordonnée tel que $|||A||| \leq \rho(A) + \varepsilon$.

Proposition 40 : Soit B une matrice carré. On a equivalence :
i) $\lim_{k\to\infty} B^k = 0$ ii) $\lim_{k\to\infty} B^k v = 0 \ \forall v$
iii) $\rho(B) < 1$ iv) $|||B||| < 1$ Pour au moins une norme $|||.|||$.

Théorème 41 : Soit $B \in M_n(\mathbb{K})$ $\lim |||B^k|||^{1/k} = \rho(B)$

III Espaces vectoriels normés complets.

1) Espaces de Banach :

Définition 42 : Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet pour la distance associée à la norme.

Exemple 43 : $(\mathbb{R}, |.|)$ et $(M_n(\mathbb{K}), |||.|||)$ sont des Banach.

Def 44 Soit E un evn, Une serie de terme générale $(x_n)_n$ est normalement convergente si $\sum_{n=0}^\infty \|x_n\|$ converge.

Proposition 45 : E est un espace de Banach ssi toute serie normalement convergente est convergente.

Proposition 46 : $(L^p, \|.\|_p)$ est un espace de Banach.

Proposition 47 : si F est complet, $(\mathcal{L}_c(E,F), \|.\|)$ est complet.

Def 48 : Si E est un evn, l'espace dual de E est $E' = \mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$ des formes linéaires continues sur E.

Proposition 49 : Si E est un evn, E' est un espace de Banach

Lemme de Neumann 50 : Si E est un espace de Banach, si $f \in \mathcal{L}_c(E)$ vérifie $|||f||| < 1$. Alors l'application $I - f$ est inversible ie $\exists\, g \in \mathcal{L}_c(E)$ telle que $(I-f)\circ g = g\circ(I-f) = I$

De plus, $|||(I-f)||| \leq \frac{|||f|||}{1-|||f|||}$

Def 51 : On appelle hyperplan d'un ev, un sev de codimension 1, ie, le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Théorème 52 : Soient E un evn et $f \in \mathcal{L}(E)$, f est continue ssi le noyau de f est fermé dans E.

[Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$]

Lemme 53 : Soit E un $\mathbb{R}$-evn. H un hyperplan de E et $f \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$ de norme au plus M. Alors il existe $\tilde{f} \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ de norme au plus M qui prolonge f.

Théorème de Hahn-Banach analytique 54 : E un evn séparable sur $\mathbb{R}$ F un sev de E, $f \in \mathcal{L}_c(F, \mathbb{R})$, $|||f||| \leq M$. Alors il existe $\tilde{f} \in \mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$ $|||\tilde{f}||| \leq M$ qui prolonge f.

Définition 55 : E un evn, $A \subset E$, $B \subset E$, l'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$ sépare A et B au sens large si $f(x) \leq \alpha\ \forall x \in A$ et $f(x) \geq \alpha\ \forall x \in B$ et au sens strict s'$\exists\, \varepsilon > 0$ tq $f(x) \leq \alpha - \varepsilon\ \forall x \in A$ et $f(x) \geq \alpha + \varepsilon\ \forall x \in B$.

Théorème 56 : Hahn-Banach géométrique 56 Soient $A \subset E$, $B \subset E$ deux convexes, non vides et disjoints.

1) Si A ouvert, alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens large.

2) Si A est fermé et B compact, Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict.

2) Espaces de Hilbert

Def 57 : Un produit scalaire est une application $\langle .,. \rangle : \begin{array}{l} E\times E \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \langle x,y\rangle \end{array}$ telle que :

1) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}\ \forall (x,y) \in E^2$

2) $\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x,z\rangle + \mu\langle y,z\rangle$

3) $\langle x,x\rangle \geq 0\ \forall x \in E$

4) $\langle x,x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

Def 58 : Un $\mathbb{R}$-ev E muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien

Proposition 59 : L'application $\|.\| : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \sqrt{\langle x,x\rangle} \end{array}$ est une norme

Donc $(E, \|.\|)$ est un evn

Proposition Inégalité de Cauchy-Schwarz 60 : Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace préhilbertien, Alors $\forall x, y \in E$, $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$.

Exemple 61 :

- Sur $\mathbb{R}^n$: $\langle .,. \rangle : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \sum_{k=1}^{n} x_i y_i \end{array}$ est un produit scalaire dont la norme associée est $\|.\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$
- Sur $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, $\langle\ \rangle : \begin{array}{l} \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (f,g) \longmapsto \int_0^1 fg \end{array}$ est un produit scalaire dont la norme associée est $\|\ \| : \begin{array}{l} \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ f \longmapsto (\int_0^1 f^2)^{1/2} \end{array}$

Remarque 62 : Certaine normes ne sont pas associées à un produit scalaire

Exemple 63 - $\|\ \|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$

Def 64 : Un espace préhilbertien complet est appelé espace de Hilbert.

Théorème de projection 65 : Soit $(H, \langle,\rangle)$ un espace de Hilbert, K un convexe fermé non vide. Alors $\forall f \in H$, $\exists!\, u \in K$ tel que $\|f - u\| = d(f, K)$ De plus, u est caractérisé par : $\forall v \in K$, $Re\langle v - u, f - u\rangle \leq 0$

Corollaire 66 : F un sev fermé de $(H, \langle,\rangle)$ un hilbert, alors $\forall x \in H$, si $y \in F$ $x - y$ est orthogonale à F ssi $\|x - y\| = d(x, F)$

Notation 67 : Dans le cas du corollaire 66, on note $y = P_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F.

Corollaire 68 : la projection orthogonale $P_F : H \to F$. $\in \mathcal{L}_c(H, F)$

Théorème 69 Représentation de Riesz : Pour toute forme linéaire continue Φ sur H un espace de Hilbert, $\exists!\, y \in H$ tel que $\forall x \in H$ $\Phi(x) = \langle x, y\rangle$ et de plus, $|||\Phi||| = \|y\|$

Théorème de Riesz-Fischer

L^p est un espace de Banach pour tout $p \in [1,+\infty]$.
(On ne fera la démonstration que dans le cas où p est fini.)

Démo : (On admet l'inégalité de Hölder).

- ETAPE 1 : Montrons que L^p est un evn.

Soient $f, g \in L^p$.

* Si $p=1$, $f+g \in L^1$, par l'inégalité triangulaire de $|\cdot|$ sur $\mathbb{R}$

* Si $p>1$: $|f(x)+g(x)|^p \leq (|f(x)|+|g(x)|)^p \leq 2^p(|f(x)|^p+|g(x)|^p)$

donc $f+g \in L^p$

donc L^p est un ev $\forall p \in [1,+\infty[$.

Montrons maintenant que $\|\cdot\|_{L^p} : f \longmapsto \|f\|_{L^p} = \left(\int |f|^p\right)^{1/p}$ est une norme

i) Soit $f \in L^p$. $\|f\|_{L^p} \geq 0$ car $|f|^p \geq 0$

et $\|f\|_{L^p} = 0 \iff \int |f|^p = 0 \iff f = 0$ p.p.

ii) Soit $f \in L^p$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda f\|_{L^p} = \left(\int |\lambda f|^p\right)^{1/p} = |\lambda| \, \|f\|_{L^p}$

iii) (inégalité de Minkowski).

* si $p=1$: Par l'inégalité triangulaire de $|\cdot|$ sur $\mathbb{R}$, on a $\|f+g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}$

* si $p \in]1,+\infty[$: Soient $f, g \in L^p$.

$$\|f+g\|_{L^p}^p = \int |f+g|^p = \int |f+g|^{p-1}|f+g| \leq \int |f+g|^{p-1}|f| + \int |f+g|^{p-1}|g|$$

On pose q tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. On a donc $q(p-1)=p$.

$(|f+g|^{p-1})^q = |f+g|^p$. Comme $f+g \in L^p$, $|f+g|^{p-1} \in L^q$.

Par l'inégalité de Hölder, on a donc :

$$\|f+g\|_{L^p}^p \leq \|(f+g)^{p-1}\|_{L^q} \|f\|_{L^p} + \|(f+g)^{p-1}\|_{L^q} \|g\|_{L^p}$$

Or $\|(f+g)^{p-1}\|_{L^q} = \left(\int (|f+g|^{p-1})^q\right)^{1/q} = \left(\int |f+g|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} = \|f+g\|_{L^p}^{p-1}$

d'où $\|f+g\|_{L^p}^p \leq \|f+g\|_{L^p}^{p-1} \|f\|_{L^p} + \|f+g\|_{L^p}^{p-1} \|g\|_{L^p}$

donc $\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$.

donc L^p est un evn $\forall p \in [1,+\infty[$.

- ETAPE 2 : Montrons que L^p est complet.

Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $L^p(\mu)$. On va montrer qu'une sous-suite $(f_{n_k})_k$ de $(f_n)_n$ converge dans L^p.

En effet, soit $\varepsilon>0$. Si d'une part, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$, $\forall k \geq k_0$, $\|f_{n_k} - f\|_{L^p} \leq \frac{\varepsilon}{2}$

et d'autre part, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n,m \geq N_0$, $\|f_n - f_m\|_{L^p} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors, en posant $N = \max(k_0, N_0)$, on a $\forall n \geq N$, $\|f - f_n\|_{L^p} \leq \varepsilon$.

Soit donc $(n_k)_k$ une suite croissante d'entiers telle que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall n,m \geq n_k$, $\|f_n - f_m\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k}$. Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k}$.

On note $\hat{f}_k := f_{n_k}$. On a alors $\|\hat{f}_{k+1} - \hat{f}_k\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k}$.

On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n = \sum_{k=0}^{n} |\hat{f}_{k+1} - \hat{f}_k|$.

On a donc $\|g_n\|_{L^p} \leq \sum_{k=0}^{n} \|\hat{f}_{k+1} - \hat{f}_k\|_{L^p} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \leq 2$. donc $g_n \in L^p$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

(g_n) étant une suite croissante de fonctions positives, elle converge ponctuellement p.p. vers une fonction g définie p.p. De plus, comme les fonctions g_n sont à valeurs dans $[0,+\infty]$, on a, par le lemme de Fatou : $\|g\|_{L^p}^p = \int_\Omega |g(x)|^p dx = \int_\Omega \liminf |g_n(x)|^p dx \leq \liminf \int_\Omega |g_n(x)|^p dx \leq 2^p$

donc $g \in L^p$.

Pour presque tout $x \in \Omega$, $\forall m \geq n \geq 1$: $|\hat{f}_m(x) - \hat{f}_n(x)| \leq |\hat{f}_m(x) - \hat{f}_{m-1}(x)| + \dots + |\hat{f}_{n-1}(x) - \hat{f}_n(x)|$
$\leq g_{m-1}(x) - g_{n-1}(x)$.

donc pour presque tout $x \in \Omega$, $(\hat{f}_n(x))$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ (complet) donc elle converge vers une limite $\hat{f}(x)$.

De plus, $\forall m \geq n \geq 1$, pour presque tout $x \in \Omega$, $|\hat{f}_m(x) - \hat{f}_n(x)| \leq g_{m-1}(x)$

Par passage à la limite $m \to +\infty$, $|\hat{f}(x) - \hat{f}_n(x)| \leq g(x)$.

En particulier, $\|\hat{f}\|_{L^p} \leq \|g\|_{L^p} + \|\hat{f}_1\|_{L^p} < \infty$ donc $\hat{f} \in L^p$.

Or, pour presque tout $x \in \Omega$, $|\hat{f}(x) - \hat{f}_n(x)| \leq (g(x) - g_{n-1}(x))^p \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

et $|\hat{f}(x) - \hat{f}_n(x)|^p \leq g(x)^p$ avec $g \in L^p$.

Par convergence dominée, on a donc $\|\hat{f} - \hat{f}_n\|_{L^p} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

d'où le résultat. □

Sources: Brézis - Analyse Fonctionnelle

Projection sur un convexe fermé

Leçons: 205, 213, 208, 219, 253

Théorème:

Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. Soit $K \subset H$ un convexe fermé non vide.
Alors, pour tout $f \in H$, $\exists ! u \in K$ tel que $\|f-u\| = \min_{v \in K} \|f-v\|$.

De plus, u est caractérisé par $Re(\langle f-u ; v-u \rangle) \leq 0 \quad \forall v \in K$.

Démonstration:

#1: Existence:

Soit $(v_n)_n$ une suite de K tel que $\underbrace{\|f-v_n\|}_{:=d_n} \longrightarrow \underbrace{\inf_{v \in K} \|f-v\|}_{:=d}$

Mq $(v_n)_n$ est de Cauchy. Soient $n, m \in \mathbb{N}$,

On utilise l'identité du parallélogramme $\left(2\left[\|a\|^2 + \|b\|^2\right] = \|a+b\|^2 + \|a-b\|^2\right)$ avec $a = f - v_n$ $b = f - v_m$; on a:

$$\|2f - v_n - v_m\|^2 + \|v_m - v_n\|^2 = 2\left(\|f-v_n\|^2 + \|f-v_m\|^2\right) = 2\left(d_m^2 + d_n^2\right)$$

Donc $\left\|f - \frac{v_n+v_m}{2}\right\| + \frac{1}{4}\|v_m - v_n\|^2 = \frac{1}{2}\left(d_m^2 + d_n^2\right)$

Or, $\frac{v_n+v_m}{2} \in K$ donc $\left\|f - \frac{v_n+v_m}{2}\right\| \geq d$

Donc $\frac{1}{4}\|v_m - v_n\|^2 \leq \frac{1}{2}\left(d_m^2 + d_n^2\right) - d^2$

On a donc, par passage à la limite $\|v_m - v_n\| \to 0$

Ainsi, la suite $(v_n)_n$ est de Cauchy dans K complet en tant que fermé d'un complet.

Ainsi, la suite converge dans K.

#2: Caractérisation:

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $u \in K$ tel que $\|f-u\| = \min_{v \in K} \|f-v\|$

Soit $w \in K$.

On a, pour tout $t \in]0;1]$, $v = (1-t)u + tw \in K$

on a donc $\|f-u\| \leq \|f-v\| = \|f - [(1-t)u - tw]\| = \|(f-u) - t(w-u)\|$

Donc $\|f-u\|^2 \leq \langle (f-u) - t(w-u) ; (f-u) - t(w-u) \rangle$

$$\leq \|f-u\|^2 - t\left(\langle f-u ; w-u \rangle + \langle w-u ; f-u \rangle\right) + t^2\|w-u\|^2$$

$$\leq \|f-u\|^2 - t\left(\langle f-u ; w-u \rangle + \overline{\langle f-u ; w-u \rangle}\right) + t^2\|w-u\|^2$$

$$\leq \|f-u\|^2 - 2t \, Re(\langle f-u ; w-u \rangle) + t^2\|w-u\|$$

Donc $2t \, Re(\langle f-u ; w-u \rangle) \leq t^2\|w-u\|$

Donc $2 Re(\langle f-u ; w-u \rangle) \leq t\|w-u\|$

On fait tendre $t \to 0$; on obtient $2Re(\langle f-u ; w-u \rangle) \leq 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $u \in K$ tel que $Re\langle f-u ; v-u\rangle \leq 0$ pour tout $v \in K$

Alors, pour tout $v \in K$,

$$\begin{aligned}\|f-u\|^2 - \|v-f\|^2 &= \|u\|^2 + 2Re(\langle v-u ; f\rangle) - \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 + 2Re(\langle f ; v-u\rangle) - \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 + 2Re(\langle f-u ; v-u\rangle) + 2Re(\langle v-u ; u\rangle) - \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 - \|v\|^2 + 2Re(\langle f-u ; v-u\rangle) + 2Re(\langle v ; u\rangle) - 2\|u\|^2 \\ &= 2Re(\langle f-u ; v-u\rangle) - \|u-v\|^2 \\ &\leq 0\end{aligned}$$

D'où le résultat

#3: Unicité

Soit $u_1, u_2 \in K$ tq:

$$Re(\langle f-u_1 ; v-u_1\rangle) \leq 0 \quad \forall v \in K$$
$$Re(\langle f-u_2 ; v-u_2\rangle) \leq 0 \quad \forall v \in K$$

On applique la première inégalité u_2 et à la deuxième inégalité u_1.

On a donc : $Re(\langle f-u_1 ; u_2-u_1\rangle) \leq 0$

$Re(\langle f-u_2 ; u_1-u_2\rangle) \leq 0$

En additionnant, on a:

$$Re(\langle f-u_1 ; u_2-u_1\rangle) + Re(\langle f-u_2 ; u_1-u_2\rangle) \leq 0$$
$$\Leftrightarrow Re(\langle f-u_1 ; u_2-u_1\rangle) + Re(\langle u_2-f ; u_2-u_1\rangle) \leq 0$$
$$\Leftrightarrow Re(\langle u_2-u_1 ; u_2-u_1\rangle) \leq 0$$
$$\Leftrightarrow Re(\|u_2-u_1\|^2) \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \|u_2-u_1\|^2 \leq 0$$

donc $u_2 = u_1$ $\square$