213

Espaces de Hilbert, bases hilbertiennes. Exemples et applications

Trinôme D: RAMBAUD Rayane / LOYAN Nicolas / BRUYÈRE Tiphaine

Références : Daniel Li (Cours d'Analyse Fonctionnelle) / Objectif Agrégation / Hirsh

Dans cette leçon, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - Généralités

Def 1 : Soit H un $\mathbb{K}$-ev. On appelle produit scalaire sur H toute forme bilinéaire symétrique (resp hermitienne) qui est définie positive.
On notera $\langle x,y\rangle$ le produit scalaire de $x,y \in H$.

Def 2 : Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appellé espace préhilbertien.

Exemple 3 :
- $\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ sur $\mathbb{C}^n$
- $\int_{\mathbb{R}} f g \, dy$ sur $L^2(\mathbb{R})$

sont des produits scalaire.

Notation : Puisque $\langle x,x\rangle \geq 0$ on peut poser $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$

Prop 4 : $\forall x,y \in H$ on a :
- $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle$ (cas réel)
- $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle)$ (cas complexe)

Théorème 5 : Pour tout $x,y \in H$ on a $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$ (Cauchy-Schwarz).

Corollaire 6 : L'expression $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ définit une norme sur H.

Corollaire 7 : L'application $\langle \cdot, y\rangle$ est continue.
Sa norme dans H^* est $\|\langle \cdot, y\rangle\| = \|y\|$.

Def 8 : On dit que $x,y \in H$ sont orthogonaux si $\langle x,y\rangle = 0$.
On note $x \perp y$.

Exemple 9 : Si $H = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel. $(-1,1) \perp (1,1)$.

Prop 10 (Pythagore) : D'après la prop 4, on a que
$$x \perp y \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \text{(cas réel)}$$
Et dans le cas complexe :
$$x \perp y \Leftrightarrow \left[\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \text{ et } \|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2\right]$$

Def 11 : L'orthogonal d'une partie $A \subseteq H$ est l'ensemble :
$$A^\perp = \{y \in H \mid y \perp x, \ \forall x \in A\}$$

Prop 12 : $A^\perp$ est un sev fermé de H.

Def 13 : (Espace de Hilbert) :
Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet

Exemple 14 :
- Tout espace préhilbertien de dimension finie est complet, donc de Hilbert
- $L^2(\mu)$ pour toute mesure positive
- ℓ_2 est donc aussi de Hilbert

II - Théorème de projection et ses conséquences

Def 15 : C, une partie d'un ev, est dite convexe si $\forall x,y \in C$, $[x,y] \subseteq C$.
où $[x,y] = \{tx + (1-t)y \mid t \in [0,1]\}$

Remarque 16 : Tout sev est convexe ; toute boule est convexe

Lemme 17 : Pour tout $u,v \in H$ on a :
$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

Théorème 18 (Théorème de projection) $\boxed{\text{DEV}}$

Soit H un Hilbert ; et C un convexe non vide de H et fermé
- Alors pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in C$ tel que :
$$\|x-y\| = \mathrm{dist}(x, C)$$
On dit $y = P_C(x)$ est la projection de x sur C.
- Il est caractérisé par :
$$y \in C \quad \text{et} \quad \mathrm{Re}(\langle x-y\rangle, \langle z-y\rangle) \leq 0 \quad \forall z \in C$$
- De plus $\|P_C(x_1) - P_C(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in H$
(donc P_C est continue)

Théorème 19 : F un sev fermé de H.
Alors l'application $P_F : H \to F$ est linéaire continue.
De plus, $P_F(x)$ est l'unique point tel que :
$$P_F(x) \in F \quad \text{et} \quad x - P_F(x) \in F^\perp.$$

Théorème 20 : F est un sev fermé
Alors on a que $H = F \oplus F^\perp$
La projection sur F parallèlement à $F^\perp$ est P_F, qui est continue, la somme directe est donc topologique.
On dit que P_F est la projection orthogonale sur F.

Corollaire 21 : On a que $F^{\perp\perp} = \overline{F}$ pour tout F sev de H.

Corollaire 22 : F sev de H. Alors on a l'équivalence suivante :
- F est dense dans H
- $F^\perp = \{0\}$

Théorème 23: L'espace $\mathcal{H}(\mathbb{R})$ des fonctions continues à support compact est dense dans $L^2(\mathbb{R})$

Corollaire 24: $\mathcal{C}([0,1])$ est dense dans $L^2([0,1])$.

Def 25: On note H^* le dual de H:

$$H^* = \{\varphi : H \to \mathbb{K} \mid \varphi \text{ linéaire continue}\}$$

Théorème 26: (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet)

H un Hilbert. Pour tout $\varphi \in H^*$, il existe un unique $y \in H$ tel que :

$$\varphi(x) = \langle x, y\rangle \quad \forall x \in H$$

Def 27: On appelle opérateur sur H une application linéaire continue $T : H \to H$

Prop 28: Soit T un opérateur sur H.
Il existe T^*, appellé adjoint de T, qui vérifie :

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle \quad \forall x, y \in H$$

De plus, $\|T^*\| = \|T\|$.

III - Base Hilbertienne :

III-1: Espaces séparables

Def 29: Un espace topologique est dit séparable si il existe une partie dense dénombrable.

Def 30: Une partie D est dite totale si $Vect(D)$ est dense dans E.

Prop 31: E un ev normé est séparable ssi il existe une partie dénombrable et totale.

Prop 32: Tout sous-espace d'un espace métrique séparable est séparable.

III-2: Système orthonormé

On supposera H préhilbertien de dimension infini

Def 33: Soit (U_n) une famille d'éléments de H. On dit que c'est une famille orthonormée si

1) $\|U_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$
2) $U_i \perp U_j$, $\forall i \neq j$

Exemple 34:
- Dans ℓ_2, la suite $(e_n)_{n \geq 1}$ est orthonormée
- Dans $L_2([0,1])$ on a : $e_n(t) = e^{2\pi i n t}$ $n \in \mathbb{Z}$ (appelé système trigonométrique)

Prop 35: Si $(u_1, \dots, u_n)$ est orthonormée, alors pour tous $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot u_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2$$

Corollaire 36: Toute famille orthonormée est libre

Prop 37: (Inégalité de Bessel) : H préhilbertien.

Pour toute famille orthonormée (u_i) dans H, on a :

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} |\langle x, u_i\rangle|^2 \leq \|x_i\|^2$$

Prop 38: H préhilbertien et (U_n) orthonormée.
Si $x \in H$ peut s'écrire $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \cdot U_n$ alors forcément $\xi_n = \langle x, U_n\rangle$

Prop 39: H Hilbert et (U_n) orthonormée dans H.
Alors pour toute suite $(\xi_n)_{n \geq 1} \in \ell_2$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \cdot U_n$ converge dans H.

III-3: Bases Hilbertiennes

Def 40: H préhilbertien. $(U_n)_{n \geq 1}$ est une base hilbertienne si :
- $(U_n)_{n \geq 1}$ est orthonormée dans H
- $(U_n)_{n \geq 1}$ est totale dans H.

Théorème 41: H préhilbertien et $(U_n)_{n \geq 1}$ base hilbertienne.
Alors $\forall x \in H$ on a que :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, U_n\rangle . U_n$$

De plus on a les formules de Parseval:

i) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, U_n\rangle|^2$

2) $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, U_n\rangle \overline{\langle y, U_n\rangle}$ (avec convergence absolue)

Théorème 42: Soit H un Hilbert. Les assertions suivantes sont équivalentes:
- H est séparable
- H admet des bases hilbertiennes.

Théorème 43: Tous les espaces de Hilbert séparables, de dimension infinie, sont isomorphes entre eux. Et en particulier à ℓ_2.

Proposition 44 : (procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)

Soit $(V_n)_{n\geq 1}$ une famille libre.

Alors la famille $(U_n)_{n\geq 1}$ définit comme suit, est orthonormée :

$$\cdot\, U_1 = \frac{V_1}{\|V_1\|} \quad \text{et} \quad U_{n+1}' = P_{F_n^\perp}(V_{n+1}) \;,\; U_{n+1} = \frac{U_{n+1}'}{\|U_{n+1}'\|}$$

où F_n est le sev engendré par $V_1, \dots, V_n$.

De plus, si (V_n) est totale, alors (U_n) est totale.

(ce résultat doit en réalité se placer avant le théorème 42, car utilisé pour sa demonstration).

Exemple 45 : • La famille $(t \mapsto e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de l'espace $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$

La décomposition d'un élement $f \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ suivant cette famille, correspond à la décomposition de f en série de Fourier

Def 46 : Soit I un interval de $\mathbb{R}$.

Alors $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive est appellée fonction poids si :

$$\int_I |x|^n \cdot \rho(x)\,dx < +\infty \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Def 47 : On appelle $L^2(I,\rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue, c'est à dire muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle_\rho = \int_I f(x)\overline{g(x)}\,\rho(x)\,dx$$

Prop 48 : $L^2(I,\rho)$ est un espace de Hilbert.

Prop 49 : Il existe une unique famille de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unitaires orthogonaux deux à deux tels que $\deg(P_n) = n$

Cette famille s'appelle la famille des polynômes orthogonaux associée à la fonction poids ρ.

Prop 50 : Soit I interval de $\mathbb{R}$. et ρ une fonction poids.

On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tq $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,dx < +\infty$

Alors les polynômes orthogonaux associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$. ← $\boxed{\text{DEV}}$

Exemple 51 (Polynômes de Hermite)

Soit $I = \mathbb{R}$ et $\rho(x) = e^{-x^2}$

Les polynômes associés à ρ sont appellés polynômes de Hermite.

Exemple 52 : (Polynômes de Legendre) :

Soit $I = [-1,1]$ et $\rho(x) = 1$.

Les polynômes associés à ρ sont appellés polynômes de Legendre.

Densité des polynômes orthogonaux

Leçons : 201, 202, 207, 209, 213, 234, 239, 245, 250
Référence :Beck - Objectif agrégation page 110-140

Définition 1 • *Pour I un intervalle de $\mathbb{R}$, on appelle fonction de poids une fonction $\rho : I \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive, et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x)\,\mathrm{d}x < \infty$.*

• *On note $L^2(I,\rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue.*
Il est muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle_\rho = \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)\,\mathrm{d}x$. C'est un espace de Hilbert qui contient les polynômes.

• *Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux deux à deux, et vérifiant $degP_n = n$. On l'appelle « famille des polynômes orthogonaux associé à ρ ». On l'obtient en appliquant le procédé de Gram-Schimdt à la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Théorème 1 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction de poids.*
On suppose : $\exists a > 0$, $\int_I e^{a|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x < \infty$.
Alors les polynômes orthogonaux associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

Preuve :

Étape 1 : $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée. Il suffit de montrer qu'elle est totale *i.e* $Vect((P_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est dense dans $L^2(I,\rho)$, c'est-à-dire que $Vect((P_n)_{n\in\mathbb{N}})^\perp = \{0\}$.
Par construction, on a : $Vect((P_n)_{n\in\mathbb{N}}) = Vect((X^n)_{n\in\mathbb{N}})$.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n : x \longmapsto x^n$.
On va donc montrer que $\forall f \in L^2(I,\rho)$, $[\forall n \in \mathbb{N},\ \langle f, g_n\rangle_\rho = 0] \Rightarrow [f = 0]$.
Dans la suite, on fixe $f \in L^2(I,\rho)$ et vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $\langle f, g_n\rangle_\rho = 0$.

Étape 2 : On pose $\varphi = f\rho\mathbf{1}_I$. Montrons que $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$
On rappelle que : $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $t \leq \frac{1+t^2}{2}$. Ainsi pour tout $x \in I$, $|\varphi(x)| \leq \frac{1+|f(x)|^2}{2}\rho(x)$.
Mais ρ est intégrable sur I car c'est une fonction de poids et $\rho|f|^2$ aussi car $f \in L^2(I,\rho)$.
En conséquence, $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$.

Étape 3 : Comme $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ on peut considérer sa transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ définie par :

$$\forall \omega \in \mathbb{R},\ \widehat{\varphi}(\omega) = \int_I f(x)e^{-i\omega x}\rho(x)\,\mathrm{d}x.$$

Montrons que $\widehat{\varphi}$ se prolonge en une fonction holomorphe F sur la bande $B_a = \left\{z \in \mathbb{C};\ |Im(z)| < \frac{a}{2}\right\}$.
Soit $z \in B_a$. On pose $g(z,x) := e^{-izx}f(x)\rho(x)$.
On a alors :

$$\begin{aligned}\int_I |g(z,x)|\,\mathrm{d}x &= \int_I e^{Im(zx)}|f(x)|\rho(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_I e^{\frac{a|x|}{2}}|f(x)|\rho(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \left(\int_I e^{a|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_I |f(x)|^2\rho(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} < \infty \quad \text{(C-S)}\end{aligned}$$

La fonction $F : \left| \begin{array}{ccc} B_a & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\int_I g(z,x)\,\mathrm{d}x \end{array} \right.$ est donc bien définie.

On va utiliser le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale :
-$\forall z \in B_a$, $x \mapsto g(z,x)$ est mesurable.
-Pour presque tout $x \in I$, $z \mapsto g(z,x)$ est holomorphe sur B_a.
-$\forall z \in B_a$, $|g(z,x)| \leq e^{\frac{a|x|}{2}}|f(x)|\rho(x)$ est une fonction de x, indépendante de z et est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Donc F est holomorphe sur B_a et coïncide sur $\mathbb{R}$ avec $\widehat{\varphi}$.

Étape 4 :On calcul les dérivés de F en 0
Le théorème précédent nous permet également de calculer les dérivées de F :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in B_a,\ F^{(n)}(z) = (-i)^n \int_I x^n e^{-izx} f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

Ainsi, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F^{(n)}(0) = (-i)^n \int_I x^n f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x = (-i)^n \langle f, g_n \rangle_\rho = 0$$

Par unicité du développement en série entière d'une fonction holomorphe, il existe un voisinage de 0 sur lequel $F \equiv 0$. Par le théorème de prolongement analytique, on en déduit que $F \equiv 0$ sur B_a.
Ainsi, $\widehat{\varphi} = F|_{\mathbb{R}} \equiv 0$.
Comme φ est intégrable, on peut invoquer l'injectivité de la transformée de Fourier pour obtenir la nullité presque partout de φ sur $\mathbb{R}$.
Par stricte positivité de ρ, on en déduit que f est nulle presque partout sur I, autrement dit $f = 0$ dans $L^2(I, \rho)$.

□

Questions :
•Pourquoi montrer que $Vect((P_n)_{n\in\mathbb{N}})^\perp = \{0\}$ revient à montrer que $Vect((P_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est dense dans $L^2(I,\rho)$.

Théorème 2 *Si F est un sous-espace vectoriel fermé de H alors $p_F : H \to F$ est une application linéaire continue, et $p_F(x)$ est l'unique point $y \in F$ tel que :*

$$y \in F \text{ et } x - y \in F^\perp$$

Théorème 3 *Si H est un espace de Hilbert, alors pour tout sous-espace vectoriel fermé on a :*

$$H = F \oplus F^\perp$$

Preuve :
On a $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$ avec $x - p_F(x) \in F^\perp$, par le théorème 2. D'autre part, si $x \in F \cap F^\perp$, on a en particulier $< x, x >= 0$ donc $x = 0$.

□

•**Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.**

> **Théorème 4** *(Inégalité de Cauchy-Schwarz)*
> *Soit $(E, <.,.>)$ une espace préhilbertien réel ou complexe. Alors, pour tous vecteurs x et y de E,*
> $$|<x,y>| \leq ||x|| \; ||y||$$
> *De plus, les deux membres sont égaux si et seulement si x et y sont liés.*

Preuve :
On suppose $y \neq 0$ (sinon c'est évident). On suppose que le nombre $<x,y>$ est réel quitte à multiplié x ou y par un nombre complexe convenable de module 1 (par exemple $\frac{\overline{<x,y>}}{|<x,y>|}$).
Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(t) = ||x+ty||^2 = ||x||^2 + 2t <x,y> + t^2||y||^2$.
Comme y est non nul et le produit scalaire défini, $||y||^2$ est non nul également. Par construction, cette fonction polynomiale du second degré est positive ou nulle pour tout réel t. On en déduit que son discriminant est négatif ou nul :

$$4 <x,y>^2 - 4||x||^2 \; ||y||^2 \leq 0$$

d'où l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Si x et y sont liés alors $x = \lambda y$ pour un certain scalaire λ et l'on en déduit immédiatement :

$$|<x,y>| = |\lambda| \; ||y||^2 = ||x|| \; ||y||$$

Réciproquement, si $|<x,y>| = ||x|| \; ||y||$, alors le discriminant ci-dessus est nul donc P admet une racine double t, et pour ce t on a $||x+ty||^2 = P(t) = 0$ donc $x = -ty$, si bien que x et y sont liés.

□

•**Pourquoi a-t-on unicité du développement en série entière d'une fonction holomorphe ?**

Une fonction holomorphe f est analytique c'est à dire que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ donc f est indéfiniment dérivable et la dérivée n-ième en un point $a \in U$ où U est un ouvert de $\mathbb{C}$ est $f^{(n)}(a) = n! a_n$. Le développement de f en série entière au voisinage de chaque point a de U est donc unique.

•**Démontrer le théorème de prolongement analytique.**

> **Théorème 5** *Soit F une fonction holomorphe dans un domaine Δ. Si F est nulle en tout point d'un disque ouvert inclus dans Δ, F est nulle sur Δ.*

Preuve :
On définit sur Δ une fonction φ de la manière suivante :
-$\varphi(z) = 0$ si $F^{(k)}(z) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$
-$\varphi(z) = 1$ sinon
Si $\varphi(z) = 0$ alors φ est nulle dans tout un voisinage de z (F est analytique). Si $\varphi(z) = 1$ il existe k tel que $F^{(k)}(z) \neq 0$ et la continuité de $F^{(k)}$ entraine que $\varphi(z) = 1$ dans tout un voisinage de z. Autrement dit, φ est localement constante.
Il en résulte que φ est continue,et dérivable avec $\varphi' = 0$. Fixons $z_0 \in \Delta$. Pour tout $z \in \Delta$, soit γ_z un chemin qui relie z_0 à z dans Δ. On a :

$$\varphi(z) - \varphi(z_0) = \int_{\gamma_z} \varphi'(u) \, du = 0$$

Donc φ est constante sur Δ. En prenant z_0 dans un disque ouvert où F est identiquement nulle, on voit que $\varphi(z) = 0$ partout. Ce qui revient à dire que F est identiquement nulle.

$\square$

•Montrer l'injectivité de la transformée de Fourier.

Proposition 1 *La transformation de Fourier est injective.*

<u>**Preuve**</u> **:**
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On suppose que la transformée de Fourier $\widehat{f} = 0$. Montrons que $f = 0$. Comme $\widehat{f} = 0 \in L^1(\mathbb{R})$ on peut utiliser la formule d'inversion de la transformée de Fourier. On obtient pour presque tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\widehat{\widehat{f}}(-x) = 2\pi f(x)$$

Or $\widehat{\widehat{f}}(x) = 0$ donc $f(x) = 0$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. D'où l'injectivité.

$\square$

Projection sur un convexe fermé

Leçons : 205, 208, 213, 219, 253

Référence : Francinou-Gianella analyse 3 page 152

Théorème 1 *Soient H un espace de Hilbert et $x \in H$. Si C est est un convexe fermé non vide de H alors :*
- *$\exists!\ y = p_C(x) \in C$ vérifiant $||x - y|| = d(x, C) = \inf_{z \in C} ||x - z||$*
- *$p_C(x)$ est caractérisé par $\forall z \in C$, $\Re e(< x - y, z - y >) \leq 0$.*
- *L'application $x \mapsto p_C(x)$ est 1-lipschitzienne.*

Preuve :

Étape 1 : Existence.
On note $d = d(x, C)$. Par définition de d et caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de C telle que $||x - y_n||^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}$.
On va montrer que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
Soient p, $q \in \mathbb{N}$. On applique l'identité du parallélogramme à $(x - y_p)$ et $(x - y_q)$ on obtient :

$$||(x - y_p) + (x - y_q)||^2 + ||(x - y_p) - (x - y_q)||^2 = 2||x - y_p||^2 + 2||x - y_q||^2$$

On a donc

$$\begin{aligned} ||y_p - y_q||^2 &= 2||x - y_p||^2 + 2||x - y_q||^2 - ||2x - y_p - y_q||^2 \\ &= 2||x - y_p||^2 + 2||x - y_q||^2 - 4\left|\left|x - \frac{y_p + y_q}{2}\right|\right|^2 \\ &\leq 2||x - y_p||^2 + 2||x - y_q||^2 - 4d^2 \text{ car } \frac{y_p + y_q}{2} \in C \text{ qui est convexe} \\ &\leq \frac{2}{p} + \frac{2}{q} \end{aligned}$$

Ainsi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Comme H est un espace de Hilbert, il est complet donc $y_n \to y \in H$. Or C est fermé donc $y \in C$.
Par définition $||x - y|| \geq d$ et on a : $||x - y_n||^2 \leq d^2 + \dfrac{1}{n}$ donc par passage à la limite et par continuité de la norme on a $||x - y|| \leq d$. D'où $||x - y|| = d(x, C)$.

Étape 2 : Unicité.
Par l'absurde on suppose qu'il existe y, $y' \in C$ distincts tels que $||x-y|| = d(x, C) = ||x- y'||$.
On applique l'identité du parallélogramme à $(x - y)$ et $(x - y')$, on a :

$$||2x - y - y'||^2 + ||y - y'||^2 = 2||x - y||^2 + 2||x - y'||^2 = 4d^2$$

Donc par les mêmes arguments que précédemment on obtient :

$$||y - y'||^2 = 4d^2 - 4\left|\left|x - \frac{y + y'}{2}\right|\right|^2 \leq 0 \Rightarrow ||y - y'|| = 0$$

On a donc bien $y = y'$ d'où l'unicité.

Étape 3 : Caractérisation.
Soit $x \in C$ et $t \in [0,1]$, alors $(1-t)y+tz \in C$ (car C convexe), donc $||x-((1-t)y+tz)||^2 \geq ||x-y||^2$ par définition de l'inf. Or :

$$\begin{aligned}||x-((1-t)y+tz)||^2 &=< x-((1-t)y+tz), x-((1-t)y+tz) >\\ &= ||x-y||^2 + t^2||z-y||^2 - 2\Re e(< x-y, z-y >)\\ &\geq ||x-y||^2\end{aligned}$$

Donc $\forall t > 0$, on a $t||z-y||^2 - 2\Re e(< x-y, z-y >) \geq 0$
Ainsi pour $t \to 0$ on a : $-\Re e(< x-y, z-y >) \geq 0 \Rightarrow \Re e(< x-y, z-y >) \leq 0$

Réciproquement, soit $z \in C$:

$$||x-z||^2 = ||x-y+y-z||^2 = ||x-y||^2 + \underbrace{||y-z||^2}_{\geq 0} - \underbrace{2\Re e(< x-y, z-y >)}_{\leq 0} \geq ||x-y||^2$$

D'où $||x-y|| = inf(||x-z||)$ par unicité de la projection.

Étape 4 : L'application est 1-lipschitzienne.
Soient x, $x' \in H$ distincts, de projetés respectifs y et y'. On cherche à montrer que l'application $x \mapsto y = p_C(x)$ est 1-lipschitzienne c'est-à-dire que $||y-y'|| \leq ||x-x'||$.
On a :

$$\begin{aligned}||y-y'||^2 &= \Re e(||y-y'||^2) = \Re e(< y-y', y-y' >) = \Re e(< y-x+x-x'+x'-y' >)\\ &= \underbrace{\Re e(< y-x, y-y' >)}_{\leq 0} + \Re e(< x-x', y-y' >) + \underbrace{\Re e(< x'-y', y-y' >)}_{\leq 0}\\ &\leq \Re e(< x-x', y-y' >)\\ &\leq |< x-x', y-y' >|\\ &\leq ||x-x'||\ ||y-y'|| \quad \text{Par Cauchy-Schwarz}\end{aligned}$$

Donc comme $||y-y'|| \neq 0$ on a le résultat.

□

Questions :
•Démontrer l'identité du parallélogramme.
Comme $||x+y||^2 =< x+y, x+y >= ||x||^2 + < x,y > + < y,x > + ||y||^2$
Et $||x-y||^2 =< x-y, x-y >= ||x||^2 - < x,y > - < y,x > + ||y||^2$. En additionnant on obtient le résultat.

•Un petit mot sur la caractérisation séquentielle de l'inf ?

> **Proposition 1** *Soit G une partie non vide de $\mathbb{R}$ admettant une borne inférieure et m un minorant de G alors la caractérisation séquentielle de la borne inférieure est la suivante :*
> $$m = inf(G) \Leftrightarrow \exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G^{\mathbb{N}},\ \lim_{n\to+\infty} y_n = m$$

Preuve :
On suppose déjà que m est un minorant, cela revient donc à démontrer que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in G,\ x - m < \varepsilon \Leftrightarrow \exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G^{\mathbb{N}},\ \lim_{n\to+\infty} y_n = m$$

Supposons que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in G,\ x - m < \varepsilon$. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\exists x_n \in G,\ x_n - m < \varepsilon_n = \frac{1}{n+1}$$

m étant un minorant, la suite (x_n) vérifie alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - m| < \frac{1}{n+1}$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = m$.
Supposons $\exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G^{\mathbb{N}},\ \lim\limits_{n \to +\infty} y_n = m$
Par définition :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ |y_n - m| < \varepsilon$$

Ce qui implique, comme m est un minorant et (y_n) est une suite de G :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in G,\ x - m < \varepsilon$$

□

•Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Théorème 2 *(Inégalité de Cauchy-Schwarz)*
Soit $(E, <.,.>)$ une espace préhilbertien réel ou complexe. Alors, pour tous vecteurs x et y de E,

$$| < x, y > | \leq ||x||\ ||y||$$

De plus, les deux membres sont égaux si et seulement si x et y sont liés.

<u>Preuve</u> :
On suppose $y \neq 0$ (sinon c'est évident). On suppose que le nombre $< x, y >$ est réel quitte à multiplié x ou y par un nombre complexe convenable de module 1 (par exemple $\frac{\overline{<x,y>}}{|<x,y>|}$).
Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(t) = ||x + ty||^2 = ||x||^2 + 2t < x, y > +t^2||y||^2$.
Comme y est non nul et le produit scalaire défini, $||y||^2$ est non nul également. Par construction, cette fonction polynomiale du second degré est positive ou nulle pour tout réel t. On en déduit que son discriminant est négatif ou nul :

$$4 < x, y >^2 -4||x||^2\ ||y||^2 \leq 0$$

d'où l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Si x et y sont liés alors $x = \lambda y$ pour un certain scalaire λ et l'on en déduit immédiatement :

$$| < x, y > | = |\lambda|\ ||y||^2 = ||x||\ ||y||$$

Réciproquement, si $| < x, y > | = ||x||\ ||y||$, alors le discriminant ci-dessus est nul donc P admet une racine double t, et pour ce t on a $||x + ty||^2 = P(t) = 0$ donc $x = -ty$, si bien que x et y sont liés.

□