220

Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'étude de solutions en dimension 1 et 2

I - Définitions et théorèmes généraux

1) Définition du problème de Cauchy.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On s'intéresse aux équations de la forme $X'(t) = f(t, X(t))$. (E)

Déf 1: Une solution de (E) est un couple (X, J) où $J \subset I$ est un intervalle et $X \in \mathcal{C}^1(J, \Omega)$ vérifie (E) en tout point de $\mathring{J}$.

Déf 2 (Pb de Cauchy): Soit $(t_0, X_0) \in I \times \Omega$. Le pb de Cauchy consiste à trouver une solution (X, J) de (E) t.q. $t_0 \in J$ et $X(t_0) = X_0$.

Déf 3 (Solution globale): Soit (X, J) une solution de (E). Si $J = I$, on dit que la solution est globale.

Déf 4: Soient (X_1, J_1), (X_2, J_2) deux solutions. On dit que (X_1, J_2) prolonge (X_1, J_1) si $J_1 \subset J_2$ et $X_1 = X_2|_{J_1}$

Déf 5 (Solution maximale): (X, J) est dite maximale si elle n'admet aucun prolongement strict.

Ex 6: Le pb de Cauchy $\begin{cases} y' = 2y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ admet la solution globale (donc maximale) $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{2t}$

Ici $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (t, y) \mapsto 2y$.

Rem 7: Les équations de la forme $X^{(N)} = g(t, X, X', \dots, X^{(N-1)})$ où $g : I \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{nN} \to \mathbb{R}^n$ se ramènent à des équations de la forme (E).

2) Théorèmes d'existence et d'unicité

Déf 8 (Glob. Lip.): Une fonction continue $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ est dite globalement lipschitzienne par rapport à la var. d'état, uniformément par rapport à la var. de tps si pour tout intervalle compact $J \subset I$, $\exists k \geq 0$ t.q. $\forall (t, y_1), (t, y_2) \in J \times \Omega$, $\| f(t, y_1) - f(t, y_2) \| \leq k \| y_1 - y_2 \|$

Déf 9 (loc. lip): f est dite localement lipschitzienne par rapport à t si $\forall (t_0, y_0) \in I \times \Omega$, $\exists T, r > 0, k \geq 0$ t.q. $\forall (t, y_1), (t, y_2) \in [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r)$ on a $\| f(t, y_1) - f(t, y_2) \| \leq k \| y_1 - y_2 \|$.

Rem 10: Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors f est localement lipschitzienne.

Thm 11 (C-L, cas glob. lip.): Si f est comme dans Déf 8, alors le pb de Cauchy $\begin{cases} X' = f(t, X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ admet une unique sol. globale.

Cor 12: Dans le cas linéaire, i.e. $f(t, X) = A(t) X + B(t)$ avec $A \in \mathcal{C}(I, M_n(\mathbb{R}))$, $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$, le pb de Cauchy $\begin{cases} X' = AX + B \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ admet une unique solution globale.

Cor 13: Les équations différentielles $y'' + a_1 y' + a_2 y = a_3$ et $\begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases}$ où $a_1, a_2, a_3, a, b, c, d, e, f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ admettent des solutions globales.

Thm 14 (C-L cas loc. lip.): Si f est comme dans Déf 9 alors le pb de Cauchy $\begin{cases} X' = f(t, X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ admet une unique solution max (X, J), avec J ouvert. DV 1

Ex 15: Le pb de Cauchy $\begin{cases} x' = x^2 \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases}$ admet pour unique sol. max. $\left(t \mapsto \frac{x_0}{1 - x_0 t}, \left] -\infty, \frac{1}{x_0} \right[\right)$

Contre-Ex 16 (Cas où f est seulement continue): Le pb de Cauchy $\begin{cases} x' = 2\sqrt{x} \\ x(0) = 0 \end{cases}$ admet une infinité de sol. globales.

Thm 17 (Cauchy-Arzela-Peano): L'équation (E) admet une solution maximale t.q. $X(t_0) = X_0$, $\forall (t_0, X_0) \in I \times \Omega$

3) Critères de prolongement des solutions

Thm 18 (Sortie de H compact). On suppose $f :]a,b[\times \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue. Soit $(X,]T_*, T^*[)$ une sol. max. de $X' = f(t,X)$. Alors on a :
1) ou bien $T^* = b$, ou bien $T^* < b$ et $\forall K \subset \Omega$ compact, $\exists t < T^*$ t.q. $x(t) \notin K$.
2) Énoncé analogue pour T_*.

Cor 19 (thm des bouts) : $I =]a,b[$ et $\Omega = \mathbb{R}^n$. Toute sol. max. $(X,]T_*, T^*[)$ vérifie :
1) ou bien $T^* = b$, ou bien $T^* < b$ et $\lim_{t \to T^*} \|X(t)\| = +\infty$.
2) Énoncé analogue pour T_*.

Rem 20 : En pratique on utilise souvent la contraposée du Cor 19.

Cor 21 : Soit $f :]a,b[\times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue et bornée, alors toute sol. de (E) est globale.

Ex 22 : Le pb de Cauchy $\begin{cases} x' = \dfrac{x^2}{1+x^2} \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$ admet une unique solution globale.

Lemme 23 (Gronwall) : Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $t_0 \in I$, $a \in \mathbb{R}$ et $u, v \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Si $v \geq 0$ et
$$u(t) \leq a + \int_{t_0}^{t} v(s) u(s)\, ds \quad \forall t \geq t_0,\ t \in I, \text{ alors}$$
$$u(t) \leq a \exp\left(\int_{t_0}^{t} v(s) ds\right) \quad \forall t \geq t_0,\ t \in I.$$

Cor 24 : Soit $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue vérifiant $\begin{cases} \forall K \subset I \text{ compact}, \exists c_1, c_2 > 0 \text{ t.q.} \\ \|f(t,x)\| \leq c_1\|x\| + c_2 \ \forall (t,x) \in K \times \mathbb{R}^n \end{cases}$ Alors H solution de $X' = f(t,X)$ est globale.

II - Quelques exemples de résolutions explicites

1) Système d'équations linéaires à coef. constants

Prop 25 : Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors la solution de $\begin{cases} y' = Ay \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$ s'écrit $y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0$.

Ex 26 : La solution de $\begin{cases} x' = 2x + y \ ; \ x(0) = x_0 \\ y' = 2y \qquad y(0) = y_0 \end{cases}$ s'écrit
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 e^{2t} + y_0 t e^{2t} \\ y_0 e^{2t} \end{pmatrix}$$

2) E.D. à variables séparables :

Def 27 : On dit que l'E.D. $y' = f(t,y)$ est à variables séparables si f est de la forme $f(t,y) = g(y)h(t)$ avec g et h continues, $y, t \in \mathbb{R}$.

Prop 28 : Sur $]y_1, y_2[\subset \{y : g(y) \neq 0\}$, l'ED $y' = g(y)h(t)$ est équivalente à $\dfrac{y'}{g(y)} = h(t)$ et les solutions obtenues sont de la forme $y(t) = G^{-1}(H(t) + C)$, où $C \in \mathbb{R}$, G est une primitive de $1/g$ sur $]y_1, y_2[$ et H une primitive de h.

Ex 29 : Le pb de Cauchy $\begin{cases} y' = t\sqrt{y} \\ y(t_0) = y_0 > 0 \end{cases}$ avec $t_0^2 \geq \sqrt{2y_0}$ possède l'unique solution $y : t \mapsto \left(\dfrac{t^2 - t_0^2}{4} + \sqrt{y_0}\right)^2 \ \forall t \in \mathbb{R}$.

3) E.D. de Bernoulli

L'E.D. de Bernoulli est de la forme (B) $\begin{cases} y' + ay = by^m \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ avec $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et $t_0 \in I$, $m \neq 0, 1$.

Prop 30 : La fonction $y : t \mapsto (z(t))^{\frac{1}{1-m}}$ est solution de (B) sur un sous-intervalle de I où la fonction $z : t \mapsto y_0^{1-m} e^{\int_{t_0}^{t} (m-1)a(s)ds} + \int_{t_0}^{t} (1-m) b(s) e^{\int_{s}^{t} (m-1) a(\sigma) d\sigma}$ est strictement positive.

Ex 31 : Résolution de $\begin{cases} y' + ty = ty^3 \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$

Le changement de variable $z = 1/y^2$ donne à résoudre $z' - 2tz = -2t$ soit $z(t) = 1 + Ce^{t^2}$, puis on a $y(t) = \frac{1}{\sqrt{1+Ce^{t^2}}}$ $C = -1 + \frac{1}{y_0^2}$

III - Equations autonomes, étude qualitative, stabilité.

1- Equations autonomes

Déf 32 : Une E.D. autonome est une E.D. de la forme

(A) $y' = f(y)$, où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est continue (loc. lip. pour la suite).

Déf-Prop 33 (Orbite) : Soit $y_0 \in \Omega$. L'orbite de l'E.D. (A) issue du point y_0 est l'unique trajectoire $\{y(t), t \in I\} \subset \Omega$ de la solution maximale y qui passe par y_0.

Déf-prop 34 (Portrait de phase) : Le portrait de phase de l'E.D. (A) est la partition de Ω en orbites.

Ex 35 : Portrait de phase de $y' = Ay$ dans $\mathbb{R}^2$ en fonction des valeurs propres de $A \in M_2(\mathbb{R})$ (voir annexe).

2) Stabilité : définitions et propriétés

On considère l'E.D. $y' = f(t, y)$ (E) avec $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ comme dans Déf 9. On note y_{t_0, y_0} la sol. max. de (E) t.q. $y(t_0) = y_0$.

Déf 36 (Stabilité) : La solution y_{t_0, y_0} est stable (à droite) si i) $\exists \alpha > 0$ t.q., $\forall y_1 \in \Omega$ t.q. $\|y_1 - y_0\| \leq \alpha$, y_{t_0, y_1} est définie pour tout $t \geq t_0$.

ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta \in]0, \alpha[$ t.q. $\forall y_1 \in \Omega$, si $\|y_1 - y_0\| \leq \eta$ alors $\|y_{t_0, y_1}(t) - y_{t_0, y_0}(t)\| \leq \varepsilon$ $\forall t \geq t_0$.

Déf 37 (attractivité) : y_{t_0, y_0} est dite attractive si $\exists \delta > 0$ t.q. $y_{t_0, y_1}(t) - y_{t_0, y_0}(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ $\forall y_1 \in \Omega \cap \overline{B}(y_0, \delta)$.

Déf 38 : y_{t_0, y_0} est dite asymptotiquement stable si elle est stable et attractive.

Ex 39 : La solution $y_{0,1} : t \mapsto e^{-t}$ de l'E.D $y' + y = 0$ est asymptotiquement stable.

Prop 40 : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ de valeurs propres $(\lambda_j)_{j=1}^n$. Les solutions de $y' = Ay$ sont :

i) stables ssi, $\forall j$, ($Re(\lambda_j) < 0$ ou ($Re(\lambda_j) = 0$ et le bloc de Jordan correspondant est diagonalisable))

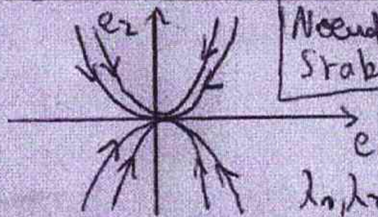
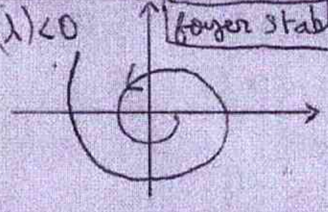
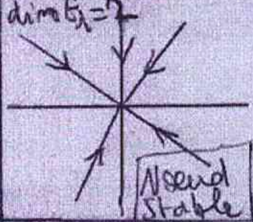
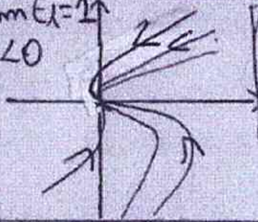
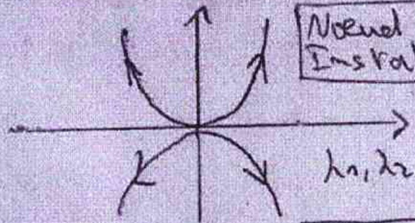
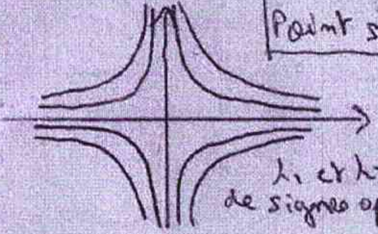
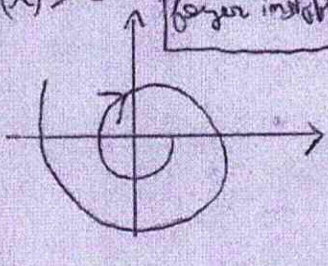
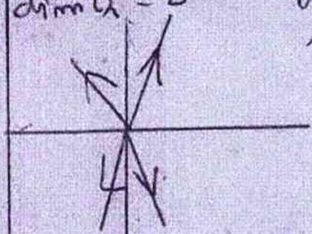
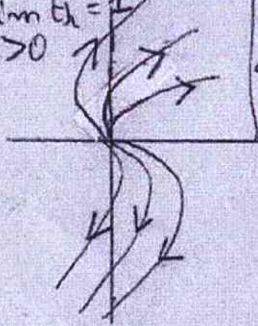
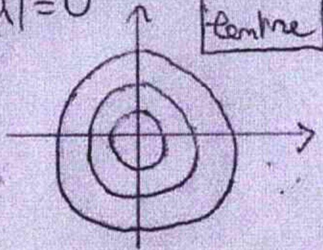
ii) asymp. stables ssi $Re(\lambda_j) < 0$ $\forall j \in [\![1, n]\!]$.

Prop 41 (Liapounov) : Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ t.q. $f(0) = 0$ et $Df(0)$ à toutes ses valeurs propres < 0. Alors 0 est une solution asymptotiquement stable du système $y' = f(y)$ en $t_0 = 0$. DV 2

Ex 42 : Stabilité asymptotique du pendule avec frottement

La fonction nulle est une solution asymptotiquement stable de l'E.D. $y'' + Ky + C\sin y = 0$ avec $K, C > 0$.

Références : - équations différentielles, Berthelin
- Analyse pour l'agrégation, Queffélec-Zuily.

Nature du pt d'équilibre 0 \ Valeurs propres λ_1, λ_2	réelles distinctes	complexes conjuguées	égales
Asymptotiquement stable	 Noeud stable $\lambda_1, \lambda_2 < 0$	$Re(\lambda) < 0$  foyer stable	dim $E_\lambda = 2$  Noeud stable ; dim $E_\lambda = 1$, $\lambda < 0$  Noeud dégénéré stable
Instable	 Noeud Instable $\lambda_1, \lambda_2 > 0$;  Point selle λ_1 et λ_2 de signes opposés	$Re(\lambda) > 0$  foyer instable	dim $E_\lambda = 2$  noeud instable ; dim $E_\lambda = 1$, $\lambda > 0$  Noeud dégénéré instable
Stable		$Re(\lambda) = 0$  Centre	

Théorème de Liapounov

On considère le système différentiel $y' = f(y)$, $y(0) = x_0$ où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f(0) = 0$. Si Df_0 a ses valeurs propres de partie réelle strictement négative, alors 0 est un point d'équilibre attractif du système différentiel.

Lemme : On note $A = Df_0$. Il existe des constantes $\alpha > 0$ et $M > 0$ telles que $|||e^{tA}||| \leqslant Me^{-\alpha t}$ pour t suffisamment grand.

Démonstration : On utilise la décomposition de Dunford de A : $A = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente et D et N commutent. On a $e^{tA} = e^{tD}e^{tN}$.

$$D = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} \text{ et } e^{tD} = P \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\left|\left|\left| \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} \right|\right|\right| = \max_{\lambda \in Sp(D)} |e^{t\lambda}| = e^{-\mu t} \text{ où } \mu = - \max_{\lambda \in Sp(D)} Re(\lambda) > 0.$$

Par sous-multiplicativité de la norme, $|||e^{tD}||| \leqslant |||P|||e^{-\mu t}|||P^{-1}||| = O(e^{-\mu t})$.

Comme N est nilpotente d'ordre $d \leqslant n$, $|||e^{tN}||| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{d} \frac{|||N^k|||}{k!}|t^k| = O(t^d)$.

Ainsi, $|||e^{tA}||| \leqslant |||e^{tD}|||\,|||e^{tN}||| = O(t^d e^{-\mu t}) = O(e^{-\frac{\mu}{2}t})$ par croissance comparée.

On introduit maintenant la fonction de Liapounov :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, b(x, y) = \int_0^{\infty} < e^{tA}x, e^{tA}y > \mathrm{d}t.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, $|< e^{tA}x, e^{tA}y >| \leqslant ||e^{tA}x||_2||e^{tA}y||_2 \leqslant M^2e^{-2\mu t}||x||_2||y||_2$.
Donc, la fonction $t \mapsto < e^{tA}x, e^{tA}y >$ est intégrable et b est bien définie.
Montrons que b est un produit scalaire :
Par linéarité de l'intégrale, b est bilinéaire.
$b(x, x) = \displaystyle\int_0^{\infty} ||e^{tA}x||_2^2 \mathrm{d}t \geqslant 0$ et $||e^{tA}x||_2^2 = 0$ ssi $x = 0$. b est bien définie positive.

Notons $q(x) = b(x, x)$ la forme quadratique associée à b, $\sqrt{q}$ est donc une norme sur $\mathbb{R}^n$. On a :

$$q(x + h) = q(x) + 2b(x, h) + \underbrace{q(h)}_{o(h)}.$$

Donc, $Dq_x(h) = 2b(x,h)$.

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une solution Y maximale de l'équation différentielle définie sur un intervalle I contenant 0 et

$$q(Y)' = Dq_Y(Y') = 2b(Y,Y') = 2b(Y,f(Y)).$$

Posons $r(Y) = f(Y) - AY$. On a $q(Y)' = 2b(Y,r(Y)) + 2b(Y,AY)$. Calculons $2b(Y,r(Y))$ et $2b(Y,AY)$.

$$2b(Y,AY) = 2\int_0^{\infty} < e^{tA}Y, e^{tA}Ay > \mathrm{d}t = [||e^{tA}Y||_2^2]_0^{\infty} = -||Y||_2^2 \leqslant -kq(Y).$$

La dernière inégalité résulte de l'équivalence des normes en dimension finie.

$r(Y) = f(Y) - f(0) - Df_0(Y) = o(Y)$. Donc, comme $\sqrt{q}$ est une norme, $\forall \varepsilon > 0, \exists a > 0, q(Y) \leqslant a \Rightarrow \sqrt{q(r(Y))} \leqslant \varepsilon\sqrt{q(Y)}$. Donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$2b(Y,r(Y)) \leqslant 2\sqrt{q(Y)q(r(Y))} \leqslant 2\varepsilon q(Y).$$

En prenant $\varepsilon \leqslant \frac{k}{4}$, on a $q(Y) \leqslant a \Rightarrow q(Y)' \leqslant -\beta q(Y)$ avec $\beta > 0$.
On suppose que $q(x_0) < a$. Montrons que $q(Y(t)) < a$ pour tout $t \in I \cap \mathbb{R}^+$. On suppose par l'absurde qu'il existe $t^* \in I \cap \mathbb{R}^+$ tel que $q(Y(t)) \geqslant a$:
L'ensemble $\{t \in I \cap \mathbb{R}^+, q(Y(t)) \geqslant a\})$ est non vide et sa borne inférieure t_0 est atteinte par continuité de q et de Y ; on a de plus $q(Y(t_0)) = a$ car il existe t' tel que $q(Y(t')) = a$ par le théorème des valeurs intermédiaires. Alors $q(Y(t_0)) = a \Rightarrow q(Y)'(t_0) \leqslant -\beta q(Y(t_0)) < 0$.

Il existe donc $0 < t_1 < t_0$ tel que $q(Y(t_1)) > q(Y(t_0)) \geqslant a$, d'où la contradiction.

Donc, $\forall t \in I \cap \mathbb{R}^+, q(Y(t)) < a$. On pose $\varphi(t) = e^{\beta t}q(Y(t))$, $\varphi'(t) = e^{\beta t}(\beta q(Y(t)) + q(Y)'(t)) \leqslant 0$.

Donc,

$$\forall t \in I \cap \mathbb{R}^+, e^{\beta t}q(Y(t)) \leqslant \varphi(0) = q(x_0) \Rightarrow q(Y(t)) \leqslant q(x_0)e^{-\beta t}$$

Enfin, comme Y est bornée pour tout $t \geqslant 0$, le théorème des bouts montre que la solution est définie sur $\mathbb{R}^+$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Théorème :
Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, $f : U \to \mathbb{R}^d$ continue et localement lipschitzienne en la variable d'état, $(t_0, y_0) \in U$. Alors il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy
$(C) : \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

Démonstration :
Nous allons aborder la preuve en trois étapes :
· Etape 1 : existence et unicité locale de la solution grâce au théorème du point fixe de Banach.
· Etape 2 : unicité de la solution sur tout intervalle.
· Etape 3 : existence d'une solution maximale.

Etape 1 :

f est localement lipschitzienne en la variable d'état donc il existe $T > 0$, $R > 0$, $k > 0$ tels que $C_0 := [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, R) \subset U$ et $\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\forall z_1, z_2 \in \overline{B}(y_0, R)$, $||f(t, z_1) - f(t, z_2)|| \leq k||z_1 - z_2||$. On fixe donc ces paramètres.
De plus, f est continue donc $M := \sup\limits_{C_0} ||f|| < +\infty$.
Soit $\tau = min(T, \frac{R}{M}, \frac{1}{2k})$.
On pose alors : $X := \mathcal{C}^0([t_0 - \tau, t_0 + \tau], \overline{B}(y_0, R))$ et

$$\begin{array}{rccl} F: & X & \to & \mathcal{C}^0([t_0 - \tau, t_0 + \tau], \mathbb{R}^d) \\ & z & \mapsto & t \mapsto y_0 + \int_{t_0}^t f(s, z(s))ds \end{array}$$

$(X, ||.||_\infty)$ est un espace de Banach. On va donc montrer que $F : X \to X$ est contractante pour lui appliquer le théorème du point fixe de Banach, ce qui montrera bien l'existence et l'unicité locale de la solution.
Déjà, si $z \in X$ et $t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$,

$$\begin{aligned} ||F(z)(t) - y_0|| &\leq |t - t_0|M \\ &\leq \tau M \\ &\leq R \end{aligned}$$

donc $F(z)(t) \in \overline{B}(y_0, R))$, donc $F(X) \subset X$.

De plus, si $z_1, z_2 \in \overline{B}(y_0, R)$,

$$\begin{aligned}
||F(z_1) - F(z_2)||_\infty &= \sup_{t\in[t_0-\tau,t_0+\tau]} || \int_{t_0}^{t} (f(s, z_1(s)) - f(s, z_2(s)))ds|| \\
&\leq \sup_{t\in[t_0-\tau,t_0+\tau]} \int_{t_0}^{t} k||z_1(s) - z_2(s)||ds \\
&\leq \sup_{t\in[t_0-\tau,t_0+\tau]} k|t - t_0|.||z_1 - z_2||_\infty \\
&\leq k\tau||z_1 - z_2||_\infty \\
&\leq \frac{1}{2}||z_1 - z_2||_\infty
\end{aligned}$$

$F : X \to X$ est donc bien contractante. On a donc trouvé une solution unique dans l'ensemble X.

Etape 2 :

Soit x et y deux solutions de l'équation définies sur un intervalle J ouvert, qui coïncident en un point de J. Montrons que $x = y$.
Soit $\Omega = \{t \in J,\ x(t) = y(t)\}$. Ω est un fermé non vide de J.
Soit $t_0 \in \Omega$ et $y_0 = x(t_0) = y(t_0)$.
D'après l'étape 1, il existe τ assez petit tel que $x = y$ sur $[t_0-\tau, t_0+\tau]$, donc $[t_0-\tau, t_0+\tau] \subset \Omega$.
Ω est donc un ouvert de J.
J étant connexe, on en déduit que $\Omega = J$, donc $x = y$.

Etape 3 :

Soit $\mathcal{F} = \{J$ intervalle non réduit à un point tel que $t_0 \in J$ et il existe une solution de $(\mathcal{C})$ sur $J\}$. D'après l'étape 1, cet ensemble est non vide puisque $[t_0 - \tau, t_0 + \tau] \in \mathcal{F}$.

Posons alors $I = \bigcup_{J\in\mathcal{F}} J$. I est un intervalle par union d'intervalle ayant un point commun (c'est t_0).

En notant y_{J_1} et y_{J_2} deux solutions définies sur $J_1, J_2 \in \mathcal{F}$, par l'étape 2, y_{J_1} et y_{J_2} coïncident sur $J_1 \bigcap J_2$.
Il existe alors une solution de $(\mathcal{C})$ définie sur I : en effet, la fonction y qui coïncide avec y_J $\forall J \in \mathcal{F}$ est solution de $(\mathcal{C})$ sur tout sous-intervalle de I, donc sur I tout entier.
De plus, cette solution est maximale car si $\tilde{y}$ prolonge y sur $\tilde{I} \supset I$, alors $\tilde{I} \in \mathcal{F}$ donc $\tilde{I} \subseteq I$ donc $\tilde{I} = I$.