221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Références : Équa. Diff Florent Berthelin + CV Analystan (DEV 1 et 2)

Trinôme E

Cadre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$

I - Définitions et premières propriétés

Déf 1 : Soient $N, n \in \mathbb{N}^*$, Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times (\mathbb{K})^N$ et $f : \Omega \to \mathbb{K}^n$. On appelle <u>équation différentielle d'ordre n</u> dans $\mathbb{K}^n$ toute équation de la forme $y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ où $(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{K}^N$.

Déf 2 : <u>Une solution d'ordre n</u> de $y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)})$ (E_n) est un couple (I, y) où y est une fction n fois dérivable :

$y : I \to \mathbb{K}^N$ telle que :
i) $\forall t \in I$, $(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \in \Omega$
ii) $\forall t \in I$, $y^{(n)}(t) = f(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$

Déf 3 Soit $(t_0, y_0) \in \Omega$. <u>Le problème de Cauchy</u> avec donnée initiale (t_0, y_0) consiste à trouver la / les solution(s) y de (E_1) sur un intervalle I telle(s) que $t_0 \in I$ et $y(t_0) = y_0$. On dit que la condition $y(t_0) = y_0$ est la condition initiale, ou la condition de Cauchy.

Ex 4 : $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto 2e^{-t}$ est sol de l'équa. diff. $y' + y = 0$ avec la condition de Cauchy $y(0) = 2$.

Déf 5 : On dit que l'équation $y' = f(t, y)$ est <u>une équa. diff. linéaire</u> si $f(t, y) = A(t)y + B(t)$ où A et B sont des fctions du temps à valeurs respectives dans $M_N(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^N$.

Lorsque le second membre $B(t)$ est nul, on parle d'équation différentielle linéaire homogène.

Prop 6 : (Régularité des solutions). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times (\mathbb{K})^N$ et $f : \Omega \to \mathbb{K}^N$. Si f est C^k avec $k \in \mathbb{N}$, alors toute solution de (E_1) est de classe C^{k+1}.

Déf 7 : Soient $y_1 : I_1 \to \mathbb{K}^N$ et $y_2 : I_2 \to \mathbb{K}^N$ (I_1, I_2 des intervalles de $\mathbb{R}$) deux solutions de (E_1). On dit que y_2 est un <u>prolongement</u> de y_1 si $I_1 \subset I_2$ et si la restriction de y_2 à I_1 est y_1.

Lorsque $I_1 \neq I_2$, on parle de prolongement strict.

Déf 8 : Une solution $y : I \to \mathbb{K}^N$ est dite <u>maximale</u> si elle n'admet pas de prolongements stricts.

Prop 9 : Une équation d'ordre n peut se ramener à une équa. différentielle d'ordre 1 : en considérant

$$Y = \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

l'équation diff. (E_n) d'ordre n dans $\mathbb{K}^n$ est équivalente à l'équa. diff. d'ordre 1 suivante :

$$Y' = F(t, Y) \quad \text{où} \quad F(t, Y) = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{n-1} \\ f(t, Y) \end{pmatrix}$$

Ex 10 : On ramène l'équation différentielle $y'' = y' - y$ sous la forme $Y' = f(t, Y)$ en posant $Y = \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ et $F(t, Y) = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_1 - Y_0 \end{pmatrix}$

Prop 11. <u>Lemme de Gronwall</u> Soient $t_0 \in I$, $w \in C^1(I, \mathbb{R})$ et $v \in C(I, \mathbb{R})$. Si $\forall t \in I$, $w'(t) \leq v(t) w(t)$ alors, $\forall t \in I$ tq $t \geq t_0$ $w(t) \leq w(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} v(s) ds}$

Thm 12 : <u>Cauchy-Lipschitz linéaire</u>. Soient $A \in C(I, M_N(\mathbb{K}))$, $B \in C(I, \mathbb{K}^N)$ et $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^N$. Alors il existe une unique solution $y : I : \mathbb{K}^n$ de $y' = A(t).y + B(t)$ $(t, y) \in I \times \mathbb{K}^N$ $(\mathcal{L})$ telle que $y(t_0) = y_0$

Prop 13 : <u>Structure de S_H</u>, l'ensemble des solutions maximales de $y' = A(t)y + 0$ $(\mathcal{L}H)$. Soit $A \in C(I, M_N(\mathbb{K}))$. Alors :
i) S_H est un sev de $C(I, \mathbb{K}^N)$
ii) $\forall t_0 \in I$, l'application $\phi_{t_0} : S_H \to \mathbb{K}^N$, $y \mapsto y(t_0)$ est un isomorphisme d'esp. vect de $C(I, \mathbb{K}^N)$
iii) S_H est de dimension N

Prop 14 : <u>Structure de S</u>, l'ensemble des solutions maximales de $y' = A(t)y + B(t)$ $(\mathcal{L})$ avec $A \in C(I, M_N(\mathbb{K}))$ et $B \in C(I, \mathbb{K}^N)$.

S est un $\mathbb{K}$-espace affine de direction S_H.

II - Méthodes de résolution

1) Système fondamentale de solutions

Déf 15: Un système fondamental de solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{L}_H)$ est une famille $(y_1, \dots, y_N)$ de N solutions indépendantes de $(\mathcal{L}_H)$. La matrice $\Phi(t) = (y_1(t), \dots, y_N(t))$, constituée de ces N solutions écrites comme des vecteurs colonnes, est appelé Wronskien de ce système fondamentale.

Prop 16. Forme des solutions de $(\mathcal{L}_H)$.

1) Soient $y_1, \dots, y_N$ des sol. indépendantes de $(\mathcal{L}_H)$. Si y est une solution de $(\mathcal{L}_H)$, alors $\exists$ des constantes $C_1, \dots, C_N \in \mathbb{K}$ telles que:

$$y = C_1 y_1 + \dots + C_N y_N.$$

i) Soit $\phi(t)$ une matrice fondamentale du système $(\mathcal{L}_H)$. Alors les solutions de $(\mathcal{L}_H)$ s'écrivent: $y(t) = \phi(t) \times C$ où $C \in \mathbb{K}^n$.
= vecteur constant

DEV 1

Application 17: Soient $p, q : I \to \mathbb{R}$ deux fct° continues. On considère une fonction f non nulle, solution de l'équa. diff.: $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$. Si g est une autre solution, linéairement indépdte de f, alors leurs zéros sont entrelacés.

2) Rappels sur l'exponentielle de Matrice.

Déf 18: Exp. de Matrice. Pour $A \in M_N(\mathbb{K})$, on pose $e^A = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A^p}{p!}$. Cette quantité est appelée l'exp. de la matrice A.

Prop 19. Soit $t \in \mathbb{R}$, on pose $\phi(t) = e^{tA}$. Alors ϕ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\phi'(t) = A.e^{tA} = e^{tA}.A \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Prop 20: L'exponentielle de matrice vérifie:

i) Soient $A, B \in M_N(\mathbb{K})$ tq $AB = BA$. Alors $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$.

ii) Soit $A \in M_N(\mathbb{K})$. Alors e^A est inversible et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

iii) Soit $A \in M_N(\mathbb{K})$. Alors $(e^A)^* = e^{A^*}$ où $*$ désigne l'adjointe sur $\mathbb{C}$ et la transposée sur $\mathbb{R}$.

Prop 21: (Matrice fondamentale dans le cas constant).
Une matrice fond. pour le système $(\mathcal{L}_H)$ est $\phi(t) = e^{tA}$.
Les solutions de $(\mathcal{L}_H)$ sont les $y(t) = e^{tA} \times C$ où C est un vecteur constant de $\mathbb{K}^N$. Pour $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{K}^N$, la solution de $(\mathcal{L}_H)$ tq $y(t_0) = y_0$ s'écrit $y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0$.

Méthode de variation de la constante:

Supposons connues les solution de l'eq. diff. homogène $y' = A(t)y$ $(\mathcal{L}_H)$
On veut maintenant résoudre l'eq. diff avec second membre:
$y' = A(t)y + B(t) \quad (t, y) \in I \times \mathbb{K}^N \quad (\mathcal{L})$. Les solutions de $(\mathcal{L}_H)$ s'écrivent sous la forme $t \mapsto \phi(t) \times C$ où C est un vecteur colonne constant et $\phi(t)$ une matrice fond. de $(\mathcal{L}_H)$. On cherche les solutions de $(\mathcal{L})$ sous la forme: $y(t) = \phi(t) \times C(t)$, où cette fois $C(t)$ est un vecteur variable en fonction du temps.

On calcule $y'(t) = \phi'(t)C(t) + \phi(t)C'(t) = A(t)\phi(t)C(t) + \phi(t)C'(t)$ ainsi y est solution de $(\mathcal{L})$ ssi $C'(t) = \phi(t)^{-1} \times B(t)$. Par un calcul de primitive, on obtient $C(t) = C(t_0) + \int_{t_0}^{t} \phi(s)^{-1} B(s) ds$, alors $y(t) = \phi(t)C(t_0) + \int_{t_0}^{t} \phi(t)\phi(s)^{-1} B(s) ds$
Ensuite la condition initiale $y(t_0) = y_0$ permet d'obtenir $C(t_0)$:
$C(t_0) = \phi(t_0)^{-1}$ donc $y(t) = \phi(t)\phi(t_0)^{-1} y_0 + \int_{t_0}^{t} \phi(t)\phi(s)^{-1} B(s) ds$

si A est constante, alors $y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} B(s) ds$.

III- Stabilité des solutions

1) Stabilité

(E_1) : $y' = f(t,y)$. On suppose dans cette sous partie que les conditions de C.L. linéaire sont vérifiées.

Notation 22 : $\forall (t_0,y_0) \in I \times \Omega$, on note y_{t_0,y_0} la solution du problème de Cauchy : $y' = f(t,y)$ avec $y(t_0) = y_0$.

Déf 23 : (Stabilité). La solution y_{t_0,y_0} est stable lorsque :

i) $\exists \alpha > 0$, $\forall y_1 \in \Omega$ / $\|y_1 - y_0\| \leq \alpha$, la fonction y_{t_0,y_0} est définie $\forall t \geq t_0$.

ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta \in]0,\alpha]$, / $\forall y_1 \in \Omega$: $\|y_1 - y_0\| \leq \eta \Rightarrow \|y_{t_0,y_1}(t) - y_{t_0,y_0}(t)\| \leq \varepsilon$ $\forall t \geq t_0$.

Déf 24 : (Attractivité). La solution $y_{t_0,y_0}(t)$ est attractive s'il existe $\delta > 0$ / $y_{t_0,y_1}(t) - y_{t_0,y_0}(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ $\forall y_1 \in \Omega$ / $\|y_1 - y_0\| \leq \delta$.

Prop 25 : Toutes les solutions ont le même comportement ds le cas linéaire homogène.

Soit $A \in C([t_0,+\infty[, M_n(K))$ avec $t_0 \in \mathbb{R}$.
Soit $\phi(t)$ une matrice fondamentale pour $(\mathcal{L})$: $y' = A(t)y$

Alors on a l'équivalence entre :
i) $(\mathcal{L})$ a une solution stable
ii) Toutes les solutions de $(\mathcal{L})$ sont stables.
iii) La matrice $\phi(t)$ est bornée pour $t \geq t_0$.

On a également l'équivalence entre :
i) $(\mathcal{L})$ a une solution attractive.
ii) Toutes les solutions de $(\mathcal{L})$ sont attractives.
iii) $\phi(t)$ tend vers 0 quand $t \to +\infty$.

2) Cas des systèmes linéaires de deux équa. diff. scalaires à coefficients constants.

Dans cette partie on considère le système linéaire d'eq. diff. : $Y' = AY$ avec $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $A \in M_2(\mathbb{R})$

Dessins : Pour A diagonalisable de valeurs propres λ et $\mu \in \mathbb{R}$ de vecteurs propres $\vec{e_\lambda}$ et $\vec{e_\mu}$.

1. $\lambda < \mu < 0$ noeud impropre attractif
2. $0 < \lambda < \mu$: noeud impropre répulsif
3. $\lambda < 0 < \mu$: point selle
4. $\mu = \lambda < 0$: noeud propre attractif.
5. $0 < \mu = \lambda$: noeud propre répulsif.

Pour A de vp $\lambda \in \mathbb{R}$, A non diagonalisable. $A = P \times \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $P \in GL_2(\mathbb{R})$: $P = (\vec{v_1}, \vec{v_2})$.

6. $\lambda > 0$: noeud dégénéré répulsif.
7. $\lambda < 0$: noeud dégénéré attractif.

Pour A de vp. complexes : $\lambda \in \mathbb{C}$ / $\mu = \bar{\lambda} \in \mathbb{C}$ $\vec{e_\lambda}$ vect. propre de λ
$\lambda = \alpha + i\beta$

8. $\alpha = 0$ centre
9. $\alpha > 0$. spirale instable
10. $\alpha < 0$: spirale stable

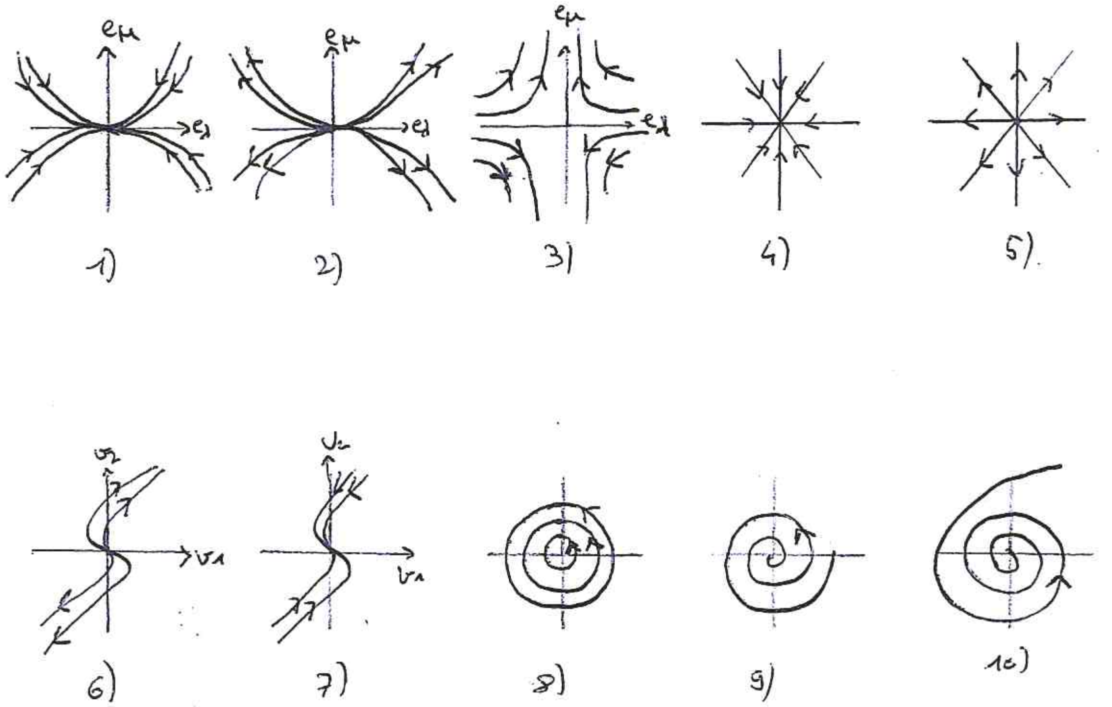
IV- Applications

App 26 : Calcul de l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ } DEV 2

App 27 : Le mouvement de l'oscillateur harmonique est décrit par l'équation différentielle :
$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ où $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$, $\omega > 0$.

App 28 : Au comptes bancaires. L'équation $x' = p(t)x + q(t)$ représente l'évolution du solde d'un compte en banque, bénéficiant d'un taux d'intérêt $p(t)$ variable en fct° du temps ; $q(t)$ représente le taux de dépôt (valeurs positives) ou de retrait (valeurs négatives)

Elle n'est linéaire que si
* p ne dépend que du temps
* q ne dépend que du temps et pas du solde du compte.



eμ
eλ
v1
v2
1)
2)
3)
4)
5)
6)
7)
8)
9)
10)

Énoncé : $\forall t \geq 0$ on pose

$$h(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}\,dx.$$

Calculer $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

Solut° :

①. On va Mq h est bien définie et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Pour commencer on pose $f(x,t) = \dfrac{e^{-tx^2}}{1+x^2}$ $\forall x,t \geq 0$.

* Définie :

- $t=0$: $h(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\arctan x]_0^{+\infty} = \pi/2 < +\infty$.
- $t>0$: On a $x \mapsto f(x,t)$ C^0 sur $\mathbb{R}^+$ donc seul problm en $+\infty$.
  On $x^2 f(x,t) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ par ↗ comparées donc qd $x \to +\infty$: $f(x,t) = o(1/x^2)$ et $1/x^2$ intégrable en $+\infty$ par le critère de Riemann.

Donc $\forall t \geq 0$ $h(t) < +\infty$.

* Continue : On utilise le Th. de C^0té pour les intégrales à paramètre.

(i) $\forall t \geq 0$: $x \mapsto f(x,t)$ est C^0 sur $\mathbb{R}^+$ (donc C^0p.m (donc mesurable))

(ii) $\forall x \geq 0$: $t \mapsto f(x,t)$ est C^0 sur $\mathbb{R}^+$.

(iii) $\forall x,t \geq 0$: $|f(x,t)| \leq \dfrac{1}{1+x^2}$ ⫫ de t et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Donc h est C^0 sur $\mathbb{R}^+$.

② On va Mq h est C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ grâce aux théorèmes pour les intégrales à paramètre (Th de dérivabilité + C^0té sous le signe intégrale).

(i) $\forall t > 0$: $x \mapsto f(x,t)$ est C^0 et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ par ①.

(ii) $\forall x \geq 0$: $t \mapsto f(x,t)$ est C^0 et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ de dérivée :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \frac{-x^2}{1+x^2} e^{-tx^2} \quad \text{qui est } C^0 \text{ en les 2 variables sur } \mathbb{R}^{+*}.$$

(iii) Soit $a>0$.

$\forall x,t \in [0,+\infty[\times [a,+\infty[$: $\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq e^{-tx^2} \leq e^{-ax^2}$ (par ↘ de $t \mapsto e^{-tx^2}$ $\forall x \geq 0$)

⫫ de t et intégrable ($1°$ C^0 et $o(1/x^2)$ en $+\infty$).

Donc on a h C^1 sur $[a,+\infty[$ $\forall a>0$

$\Rightarrow h$ C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On peut donc dériver h et on a :

$$h'(t) = -\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} e^{-tx^2}\,dx = -\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1-1}{1+x^2} e^{-tx^2}\,dx.$$

$$= -\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\,dx + h(t)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du + h(t)$$

$u = \sqrt{t}\,x$ difféo. $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ $\Rightarrow dx = \dfrac{du}{\sqrt{t}}$.

On obtient donc :

$$(E) \quad h'(t) - h(t) = -\frac{1}{\sqrt{t}} I.$$

③ On cherche les h solut° de (E).

* $S_H = \{C e^t,\ C \in \mathbb{R} \text{ cnste}\}$ les solut° de l'équation homogène associée : $h'(t) - h(t) = 0$.

* Pour la solut° particulière on utilise la méthode de variation de la cnste : $h(t) = C(t)e^t$.

$\Rightarrow \quad C'(t)e^{t} + \cancel{C(t)e^{t}} - \cancel{C(t)e^{t}} = -\frac{1}{\sqrt{t}} I.$

$\Rightarrow C'(t) = -\frac{1}{\sqrt{t}} I e^{-t}.$

$\Rightarrow C(t) = -I \int_0^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = -2I \int_0^{\sqrt{t}} e^{-v^2} dv$

$v = \sqrt{u}$. difféo. $]0,t[\to]0,\sqrt{t}[$.
$\Rightarrow u = v^2$
$\Rightarrow du = 2v\,dv$.

ccl : $h(t) = Ce^{t} - 2I \int_0^{\sqrt{t}} e^{-v^2+t} dv$. avec $C \in \mathbb{R}$ cste. $(*)$

④ On cherche C.
On a $h(0) = \pi/2$ par ① et on a par $(*)$: $\lim_{t \to 0^+} h(t) = C$ par le Th. de cvD. ($|\mathbb{1}_{]0,\sqrt{t}[}(v) e^{-v^2}| \leq e^{-v^2}$ intégrable $\forall t$.)

Donc comme par ① h est C^0 en 0 : $C = \pi/2$.

⑤ Trouver I. (On veut ds $(*)$ retrouver le I grâce à $\int_0^{\sqrt{t}} e^{-v^2+t} dv$, donc on fait $t \to +\infty$).
On a $\forall x > 0$: $\lim_{t \to +\infty} f(x,t) = 0$ Donc par le Th. de cvD (tjrs comme ds ① $|f(x,t)| \leq \frac{1}{1+x^2}$ $\forall t$ et intég. $\forall x,t > 0$).

$$\lim_{t \to +\infty} h(t) = \int_0^{+\infty} \lim_{t \to +\infty} f(x,t)\, dx = 0.$$

$\Rightarrow \lim_{t \to +\infty} h(t) e^{-t} = 0$ car $e^{-t} \xrightarrow[+\infty]{} 0$.

$\overset{(*)}{\Rightarrow} \lim_{t \to +\infty} \left(C - 2I \int_0^{\sqrt{t}} e^{-v^2} dv \right) = 0$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - 2I \int_0^{+\infty} e^{-v^2} dv = 0$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - 2I^2 = 0$

$\Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

Question possible:

* Calculer l'intégrale de Gauss d'une autre façon. $I^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r\, dr\, d\theta.$
$= 2\pi \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^{+\infty} = \frac{2\pi}{2} = \pi \Rightarrow I = \sqrt{\pi}$

* Pourquoi montrer h C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pas seulement dérivable ?
On a : $h'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} I + h(t) = f(t,h)$ avec f C^0 en les deux variables sur $\mathbb{R}^{+*}$
$\Rightarrow$ si h solut° alors h' est C^0. Il faut donc bien le caractère C^1

Pourquoi ds la variat° de la cste on a $\int_0^t C'(t) dt = C(t)$? $C(0) = 0$?
Car on peut le prendre $= 0$ car on va ajouter plus tard les S_H pour les solut° finales. Il suffit de l'écrire pour se rendre compte qu'on peut le faire : $C'(t) = -\frac{1}{\sqrt{t}} I e^{-t} \Rightarrow C(t) = -2I \int_0^{\sqrt{t}} e^{-v^2} dv - C(0)$
ccl : $h(t) = Ce^{t} - 2I \int_0^{\sqrt{t}} e^{-v^2+t} dv - C(0)e^{t} = \underbrace{(C - C(0))}_{\tilde{C}} e^{t} - 2I \left(\int_0^{\sqrt{t}} e^{-v^2+t} dv \right)$. donc on peut prendre $C(0) = 0$.

Developpement n°1 Leçon n° 221:

Reference : Carnet de voyage en Analystan p 147 exercice 60

Entrelacement des zeros d'une equation differentielle

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour $p,q : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues données, on considere une fonction f solution de l'equation differentielle : $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ (E)

On supposera f non nulle.

- Montrons d'abord que f n'a pas de zeros communs avec sa derivée.

Par l'absurde supposons qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $f(t_0) = f'(t_0) = 0$

Le probleme de Cauchy suivant : $\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \\ y(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 0 \end{cases}$ admet alors deux solutions, la fonction f et la fonction nulle.

Comme p et q sont continues sur l'intervalle I donc d'apres le theoreme de Cauchy-Lipschitz lineaire on a une unique solution pour ce probleme de Cauchy donc la fonction f est la fonction nulle. Ceci est une contradiction avec les hypotheses donc f et f' n'ont pas de zeros commun.

- Montrons ensuite que tout zeros t_0 de f possede un voisinage ouvert sur lequel f ne s'annule qu'en t_0.

Soit $t_0 \in I$ un zero de f, au voisinage de t_0 on a : $f(t_0+h) = f(t_0) + f'(t_0)h + o(h) = f'(t_0)h + o(h)$

Ainsi si $h=0$ on en deduit $f(t_0+h) = 0$ et si $h \neq 0$ $f(t_0+h) = f'(t_0)h + o(h)$ avec $f'(t_0) \neq 0$ d'apres ce qui precede. Il existe donc un reel $h>0$ tel que le seul zero de f dans l'intervalle ouvert $]t_0-h, t_0+h[$ soit t_0. On a donc bien montre que tout zero de f possede un voisinage ouvert sur lequel f ne s'annule qu'en ce zero.

- Soit J un segment $\subset I$. Montrons que f ne possede qu'un nombre fini de zeros dans J.

Supposons par l'absurde qu'il existe une suite infinie $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de zeros de f dans $J = [a,b] \subset I$.

Le segment J etant un compact d'apres le theoreme de Bolzano-Weierstrass on peut extraire une sous-suite $(t_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un reel $l \in [a,b]$. Autrement dit $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |t_{\varphi(n)} - l| \leq \varepsilon$ $\Rightarrow t_{\varphi(n)} \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$. f est continue sur I on en deduit donc par passage à la limite que $f(l) = 0$.

l est donc un zero de f et tout voisinage de l contient des zeros de f. C'est une contradiction avec ce qui precede donc f ne possede qu'un nombre fini de zero sur J.

- Soit g une autre solution de (E) lineairement independante de f.

f et g sont lineairement independantes donc leur wronskien $w = fg' - f'g$ ne s'annule pas sur I donc $w_{f,g}(t) \neq 0$ $\forall t \in I$.

- Montrons que f et g n'ont pas de zeros commun

Supposons par l'absurde que f et g possede un zero commun. On a donc $w_{f,g}(t_0) = f(t_0)g'(t_0) - f'(t_0)g(t_0) = 0$. Or c'est impossible donc f et g n'ont pas de zeros commun.

- Supposons qu'il existe t_0 et t_1 deux zeros consecutif de f dans I. On a donc $f(t_0) = 0 = f(t_1)$ ce qui implique que $w_{f,g}(t_0) = -f'(t_0)g(t_0) \neq 0$ (1) de meme $w_{f,g}(t_1) = -f'(t_1)g(t_1) \neq 0$ (2).

Le wronskien de f et g ne s'annule pas sur I donc $w_{f,g}(t_0)$ et $w_{f,g}(t_1)$ sont de meme signe donc $w_{f,g}(t_0)w_{f,g}(t_1) > 0$ (3)

De plus t_0 et t_1 sont deux zeros consecutif de f qui est continue donc $f'(t_0)$ et $f'(t_1)$ sont de signe contraire c'est à dire $f'(t_0)f'(t_1) < 0$. En combinant (1),(2) et (3) on obtient que $g(t_0)g(t_1) < 0$. On a donc que $g(t_0)$ et $g(t_1)$ qui sont de signe contraire ~~et g~~ continue donc d'apres le theoreme des valeurs intermediaires il existe $\alpha \in]t_0, t_1[$ tel que $g(\alpha) = 0$ On a donc prouvé l'existence.

- Montrons maintenant l'unicité.

Supposons par l'absurde que g possede deux zeros dans $]t_0, t_1[$ x_0 et x_1. En inversant les roles de f et g on obtient qu'il existe un zero de f compris entre x_0 et x_1. C'est une contradiction car t_1 et t_0 sont des zeros consecutif de f. On a donc bien l'unicité.