229. FONCTIONS MONOTONES. FONCTIONS CONVEXES. EXEMPLES ET APPLICATIONS

I) FONCTIONS MONOTONES

1) Définit° et premières propriétés

Def 1 : Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f est croissante si $\forall (x,y) \in D^2$ $(x<y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$. On dit que f est strict. croissante si l'inégalité est stricte.

Def 2 : Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f est $\searrow$ si $\forall (x,y) \in D^2$ $(x<y \Rightarrow f(x) \geq f(y))$. On dit que f est strict. $\searrow$ si l'inégalité est stricte.

Def 3 : Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f est monotone (resp. strict monotone) si f est $\nearrow$ ou $\searrow$ (resp. strict $\nearrow$ ou strict $\searrow$)

Ex 4 :
- $x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ croissante mais pas strict.
- $x \mapsto x^2$ décroissante sur $\mathbb{R}_-$, croissante sur $\mathbb{R}_+$ pas monotone sur $\mathbb{R}$
- $x \mapsto F_X(x)$ (où F_X est la f° de répartit° associée à X var.) est monotone ($\nearrow$)

Prop 5 : • la somme de 2 fonctions monotones n'est pas forcément monotone

Ex 6 : $f : x \mapsto x^3$ $g : x \mapsto -x$ $f+g$ non monotone

Prop 7 : La composée de 2 fonctions monotones est monotone

Def 8 : Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$. On note $sub([a,b])$ l'ens. des subdivisions σ de $[a,b]$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est à variation bornée si $\sup\limits_{\sigma \in sub([a,b])} \sum\limits_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| < \infty$.

Prop 9 : Une fonction est à variations bornées ssi elle est la différence de deux fonctions $\nearrow$ sur $[a,b]$

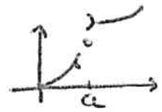
2) Limite et monotonie

THM 11 : Soient $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ monotone, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ tq $a \in \overline{D \cap]a,+\infty[}$ (resp. $\overline{D \cap]-\infty,a[}$). Alors f admet une limite finie ou infinie à droite (resp. à gauche) en a.

Cor 12 : Si $f : D \to \mathbb{R}$ croissante, $a \in \overline{D \cap]a,+\infty[}$, alors f admet une limite finie à droite au point a ssi f est minorée sur $D \cap]a,+\infty[$.

Cor 13 : $I \subset \mathbb{R}$ intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ monotone, $a \in I$.
- si $a \neq \sup I$, f admet une limite à droite (finie) $f(a^+)$.
- si $a \neq \inf I$, f admet une limite à gauche (finie) $f(a^-)$

Ex 14 :



THM 15 : Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes réelles, continues et définies sur $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$. Si $f_n \xrightarrow{CS} f$ et f continue alors $f_n \xrightarrow{CU} f$.

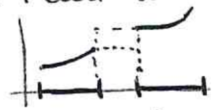
3) Continuité et monotonie

THM 16 : $I \subset \mathbb{R}$ intervalle. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ monotone. L'ensemble E des points de discontinuité de f est au plus dénombrable

Ex 17 : $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \text{Ent}(x)$
f est $\nearrow$ avec une infinité dénombrable de points de discontinuités

THM 18 : $I \subset \mathbb{R}$ intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ monotone.
f continue sur $I \iff f(I)$ est un intervalle

Rqe 19 : Faux si I pas intervalle



f continue sur I mais $f(I)$ non intervalle

Cor 20 : $I \subset \mathbb{R}$ intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ C^0 et strict. monotone alors $f(I)$ est un intervalle et f induit un homéomorphisme de I sur $f(I)$.

THM 21 : $I, J \subset \mathbb{R}$ intervalles, f homéo de I sur J. Alors f est strict. monotone.

4) Dérivabilité et monotonie

THM 22 : $I \subset \mathbb{R}$ intervalle. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ C^0 sur I et dérivable à droite sur $\mathring{I}$.
- i) f constante ssi $\forall t \in \mathring{I}$ $f'_d(t) = 0$
- ii) f croissante ssi $\forall t \in \mathring{I}$ $f'_d(t) \geq 0$
- iii) f décroissante ssi $\forall t \in \mathring{I}$ $f'_d(t) \leq 0$.

Rqe 23 : f strict. croissante $\not\Rightarrow f' > 0$
cex : $x \mapsto x^3$

THM 24 : $I \subset \mathbb{R}$ intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ C^0 sur I, dérivable à droite sur $\mathring{I}$.

[f strict. $\nearrow$ (resp. strict $\searrow$) sur I]

$\Updownarrow$

[$f'_d \geq 0$ (resp. $f'_d \leq 0$) et $X = \{ t \in \mathring{I} \mid f'_d(t) = 0 \}$ soit d'intérieur vide]

Rqe 25 : f peut être strict. $\nearrow$ sans que $X = \emptyset$
ex : $x \mapsto x^3$

II) FONCTIONS CONVEXES

1) Ensembles convexes

Def 26 : Soit C une partie de E. On dit que C est convexe si $\forall (x,y) \in C^2$ $\forall \lambda \in [0,1]$ $\lambda x + (1-\lambda) y \in C$

Ex 27 :
- Un intervalle dans $\mathbb{R}$ est convexe
- Un demi-espace associé à f (une forme linéaire sur E) et $\alpha \in \mathbb{R}$ défini comme l'ensemble des points situés d'un côté de l'hyperplan $H = \{ x \in E \; f(x) = \alpha \}$, est un ensemble convexe.

2) Fonctions convexes d'une variable réelle

Def 27 : Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si $\forall (a,b) \in I^2$ $\forall \lambda \in [0,1]$ $f(\lambda a + (1-\lambda) b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$. Elle est dite strict. convexe si l'inégalité est stricte. Elle est dite concave si $-f$ est convexe.

Def 28 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle de $\mathbb{R}$. L'épigraphe de f est la partie de $I \times \mathbb{R}$ définie par $epi(f) = \{ (x,y) \in I \times \mathbb{R} \,.\, f(x) \leq y \}$

Prop 29 : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont convexes et $g \nearrow$ alors $g \circ f$ est convexe.

THM 30 : $I \subset \mathbb{R}$ intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$. Les assert° suivantes sont équivalentes.

i) $\forall (x,y) \in I^2$ $\forall \lambda \in [0,1]$ $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

ii) $\forall (x,y,z) \in I^3$ $\left(x < y < z \Rightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \right)$

iii) $\forall a \in I$ $t \mapsto \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$

iv) $\forall (x,y,z) \in I^3$
$$\left(x < y < z \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ f(x) & f(y) & f(z) \end{vmatrix} \geq 0 \right)$$

v) L'épigraphe de f est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$

Ex 31 :
- Une fonction affine est convexe, concave mais pas strictement convexe, et son épigraphe est un demi espace de $I \times \mathbb{R}$
- $x \mapsto x^2$ est convexe

3) Continuité et dérivabilité

THM 32 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle de $\mathbb{R}$, convexe. Alors f est continue sur $\mathring{I}$, f admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche en tout $a \in \mathring{I}$, et $f'_g(a) \leq f'_d(a)$. D'autre part, si $(a,b) \in I^2$ et $a < b$, on a $f'_d(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_g(b)$. Enfin, f'_g et f'_d sont $\nearrow$ sur $\mathring{I}$.

Rqe 33 : f peut être convexe sur I sans être continue
ex : $I = [0,1]$ $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t \in]0,1[\\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}$

THM 33 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
f convexe $\Leftrightarrow$ f continue sur I et admet une dérivée à droite $\nearrow$ sur I

Cor 34 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervalle) 2 fois dérivable.
f convexe $\Leftrightarrow f'' \geq 0$.

Ex 35 : $x \mapsto \exp(x)$ convexe car $\exp(x)'' = \exp x > 0$

Prop 36 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervalle).
f convexe $\Leftrightarrow$ f continue, dérivable à droite (resp. à gauche) et vérifiant $\forall (a,x) \in I^2$ $f(x) \geq f(a) + (x-a) f'_d(a)$ (resp. $\forall (a,x) \in I^2$ $f(x) \geq f(a) + (x-a) f'_g(a)$)

App 37 : $\forall x > -1$ $\ln(1+x) \leq x$

4) Fonctions convexes à plusieurs variables

THM 38 : Soit U ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$. Si f est diff sur U, alors les prop. suivantes sont éq :
(i) f est convexe

ii) Le graphe de f est « au dessus de ses tangentes » : $\forall x,y \in U \quad f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle$

iii) l'applicat° $\nabla f : U \to \mathbb{R}^n$ est « monotone » :
$$\forall x,y \in U \quad \langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y-x \rangle \geq 0$$

De plus, si f est 2 fois différentiable sur U,

iv) $Hf(x)$ est positive $\forall x, h \in U \quad \langle Hf(x)h, h \rangle \geq 0$

Rqe 39 : ⚠ il faut que U soit ouvert sinon ceo : $(x,y) \mapsto f(x,y) = x^2 - y^2$ convexe sur $\mathbb{R} \times \{0\}$ mais $Hf(x,y)$ non positive

Ex 40 : Fonctions quadratiques : Soit $A \in S_n$, on a : $x \mapsto \langle Ax, x \rangle$ convexe $\Leftrightarrow$ A est positive

Ex 41 : $(x,y) \mapsto \exp(x+y)$ est convexe sur $\mathbb{R}^2$

III) APPLICATIONS

1) Inégalités de convexité

Prop 42 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Si $(\lambda_i)_{i \leq p} \subset \mathbb{R}$ tq $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$ alors $\forall (x_1, \dots, x_p) \in I^p$, $f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)$

Prop 43 : (Classement des moyennes) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ $\dfrac{n}{1/x_1 + \dots + 1/x_n} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \dfrac{x_1 + \dots + x_n}{n}$

Prop 44 : (Hölder) Soient deux nombres réels $p, q > 0$ tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. $\forall a_1, \dots, a_n \geq 0$ et $b_1, \dots, b_n \geq 0$, on a
$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$$

Cor 45 : (Minkowski) Soit $p \geq 1$ et $x_1, \dots, x_n \geq 0$ $y_1, \dots, y_n \geq 0$.
Alors $\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p}$

Prop 46 : $a, b \in \mathbb{R}$ $a \leq b$. Soit f convexe, C^1, sur $[a,b]$.
Alors $(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq (b-a) \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$

Ex 47 : $f(t) = \frac{1}{t}$ sur $[2,4]$
$$2\left(\tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{2}{3} \leq \int_2^4 \tfrac{1}{t}\,dt = \ln(2) \leq 2 \times \frac{1/2 + 1/4}{2} = 3/4$$

2) Suites récurrentes

Def 48 : Soit $(u_n)_n \subset \mathbb{R}$. On dit qu'elle est récurrente si elle est définie par la relat° de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : I \to \mathbb{R}$ est continue

Prop 49 : - Si $f \nearrow$ alors (u_n) monotone
- Si $f \searrow$ (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens de variat° opposés.

Ceo 50 : $u_{n+1} = u_n^2$, $u_0 = -2$. $(u_n) \nearrow$, donc monotone mais $f : x \mapsto x^2$ sur $[-2, +\infty[$ n'est pas $\nearrow$

Ex 51 : $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 2 \\ u_0 = 1 \end{cases}$. $f : x \mapsto 3x+2$ est $\nearrow$ et (u_n) est monotone.

THM 52 : METHODE DE NEWTON Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$, $c<d$, C^2 tq $f(c) < f(d)$ et $f'(x) > 0$ $\forall x \in [c,d]$. Alors $\exists! a \in]c,d[$ $f(a) = 0$. Le but est d'approcher a. On définit $F : [c,d] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Pour $x_0 \in [c,d]$, on pose $x_{n+1} = F(x_n)$. Alors $\exists \alpha > 0$ tq si $x_0 \in [a-\alpha, a+\alpha]$ $(x_n)_n$ converge de façon quadratique vers a

Ex 53 : $a \mapsto \sqrt{a}$ $a > 0$

Ceo 54 : $f(x) = \sqrt{|x|}$

3) Probabilités : processus de Galton-Watson

Notations 55 : X v.a int à valeurs dans $\mathbb{N}$
$p_k = \mathbb{P}(X = k)$, $m = \mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k < \infty$ $0 < p_0 < 1$
$(X_{i,n})$ iid suivant la loi $\mathbb{P}_X$.
$(Z_n)_n = \begin{cases} Z_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n} \end{cases}$ $\quad \pi_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$
$\mathbb{P}_{ext} = \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N} \ Z_n = 0)$

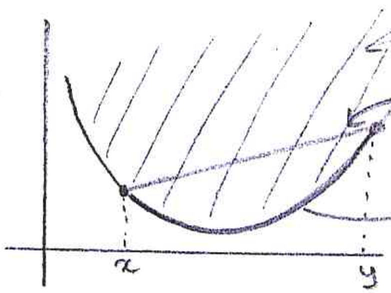
Def 56 : On appelle fonction génératrice de X la série entière suivante : $G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$

Prop 57 : 1) G est bien définie sur $[0,1]$ et est C^1
2) a) G est strict $\nearrow$ sur $]0,1[$
b) G est convexe sur $]0,1[$
c) G est strict. convexe sur $]0,1[$ $\Leftrightarrow$ $p_0 + p_1 < 1$

THM 58 : Soit $(X_i^n)_{i \geq 1, n \geq 1}$ une famille de v.a iid à valeurs dans $\mathbb{N}$. On considère $(Z_n)_{n \geq 0}$. On suppose $\mathbb{P}(Z_1 = 1) \neq 1$, alors
- si $m \leq 1$ $\mathbb{P}_{ext} \xrightarrow{n \to \infty} 1$
- sinon $\mathbb{P}_{ext}$ est l'unique point fixe de G sur $]0,1[$ (i.e. $\exists c > 0$ $\mathbb{P}(Z_n > 0) \geq c$ $\forall n \geq 0$).

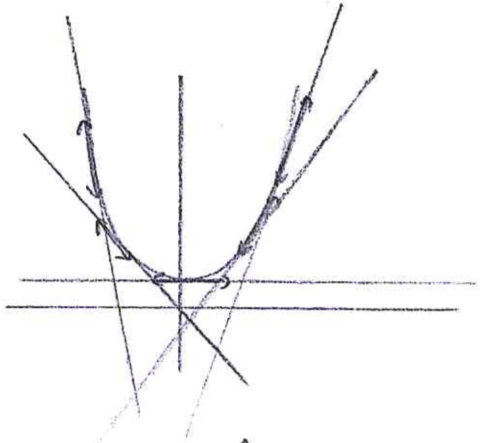
Prop 59 : $\mathbb{E}[Z_n] = m^n$

ANNEXE

- 

f convexe sur I : $\forall x,y \in I \quad \forall \lambda \in [0,1]$

$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$

- 

f convexe $\Leftrightarrow$ le graphe de f est au dessus de ses tangentes

Références

- Gourdon
- Objectif agrégat°
- Topologie et éléments d'analyse (de Ramis Deschamps)
- 66 leçons pour l'agrégat° (de Mathieu Kieffer)

COT p 72

Processus de Galton-Watson.

Prop : 1. G est bien définie sur $[0,1]$ et est de classe $\mathcal{C}^1$.

2. (a) G est strictement croissante sur $]0,1[$.
   (b) G est convexe sur $]0,1[$.
   (c) G est strictement convexe sur $]0,1[$ $\Leftrightarrow$ $p_0+p_1<1$.

1. La série entière $\sum p_k s^k$ a un rayon de convergence ≥ 1 car $0\leq p_k\leq 1 \Rightarrow \forall s\in]0,1[, p_k s^k \leq s^k$ et $\sum s^k$ a un RdC $=1$.
De plus $\sum p_k 1^k = \sum p_k = 1 < +\infty$ donc la série converge aussi en tous les points de module 1, donc en 1. Donc $[0,1]$ est inclus dans l'intervalle de convergence de $\sum p_k s^k$. Donc G est bien définie sur $[0,1]$ et de classe $\mathcal{C}^1$.

2. La série entière $\sum_{k\geq 0} p_k s^k$ ayant un rayon de convergence ≥ 1, on a par théorème de dérivation terme à terme d'une série entière : $\forall s\in]0,1[$, $G'(s)=\sum_{k\geq 1} k p_k s^{k-1}$ et $G''(s)=\sum_{k\geq 2} k(k-1)p_k s^{k-2}$.
Comme $p_0<1$, on a : $\exists k_0>0$, $p_{k_0}>0$. Ainsi :

(a) $\forall s\in]0,1[$, $G'(s)\geq k_0 p_{k_0} s^{k_0-1}>0$ et G est strictement croissante sur $]0,1[$.

(b) $\forall s\in]0,1[$, $G''(s)\geq k_0(k_0-1)p_{k_0}s^{k_0-2}\geq 0$ et G est convexe sur $]0,1[$.

(c) • Si $p_0+p_1=1$ alors $G(s)=p_0+sp_1$ donc G est affine donc n'est pas strictement convexe sur $]0,1[$.
• Si $p_0+p_1<1$ alors on peut avoir $k_1>1$ tq $p_{k_1}>0$ et $G''>0$ sur $]0,1[$ d'où la stricte convexité.

Prop : Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a $G_n = \underbrace{G\circ\dots\circ G}_{n \text{ fois}}$ (sur $[0,1]$).

On a $G_{n+1}(s)=\sum_{k\geq 0}\mathbb{P}(Z_{n+1}=k)s^k$. On procède par récurrence :

(I) $G_1(s)=\mathbb{E}[s^{Z_1}]=\mathbb{E}[s^{X_{1,0}}]=\mathbb{E}[s^X]=G(s)$.

(H) Supposons $G_n=G\circ\dots\circ G$.

$$G_{n+1}(s)=\mathbb{E}[s^{Z_{n+1}}]=\mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^{Z_n}X_{i,n}}\right]=\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{Z_n}s^{X_{i,n}}\right]$$
$$=\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\prod_{i=1}^{k}s^{X_{i,n}}\mathbb{1}_{Z_n=k}\right)\right]$$
$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{k}s^{X_{i,n}}\mathbb{1}_{Z_n=k}\right] \text{ par Fubini-Tonelli car c'est} >0.$$
$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{k}s^{X_{i,n}}\right]\mathbb{E}[\mathbb{1}_{Z_n=k}] \text{ car } Z_n \perp\!\!\!\perp X_{i,n}.$$

$$G_{n+1}(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \prod_{i=1}^{k} \mathbb{E}[s^{X_{i,n}}]\, \mathbb{P}(Z_n=k) \quad \text{car les } X_{i,n} \perp\!\!\!\perp.$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}[s^X]^k\, \mathbb{P}(Z_n=k) \quad \text{car les } X_{i,n} \text{ ont même loi.}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n=k)\, G(s)^k = G_n(G(s)) = G_0 \circ \dots \circ G(s).$$

Puis, on a par récurrence immédiate $\pi_{n+1} = G(\pi_n)$

Prop : La probabilité P_{ext} est le plus petit point fixe de G.

- Comme $\pi_{n+1} = G(\pi_n)$, par continuité de G sur $[0,1]$, $P_{ext} = G(P_{ext})$.
- Soit $u>0$ un autre point fixe de G. Montrons que $\pi_n < u$.

(I) Par croissance de G, $\pi_1 = p_0 = G(0) \leq G(u) = u$

(H) Si $\pi_n < u$, $\pi_{n+1} = G(\pi_n) \leq G(u) = u$.

Par passage à la limite, on a nécessairement que P_{ext} est le plus petit point fixe de G sur $]0,1[$.

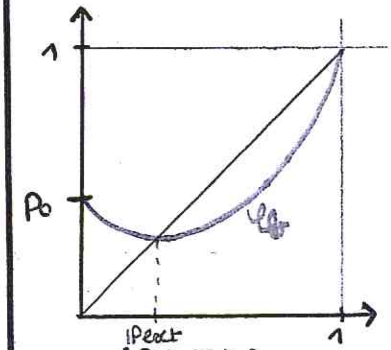
Théorème : • Si $m \leq 1$ alors $P_{ext} = 1$

• Si $m > 1$, alors P_{ext} est l'unique point fixe de G sur $]0,1[$.

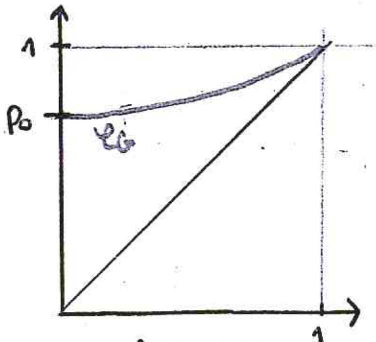
Puisque $G(1) = 1$, le graphe de G coupe la droite $y = x$ sur $[0,1]$ au moins au point $(1,1)$.

On a deux cas :

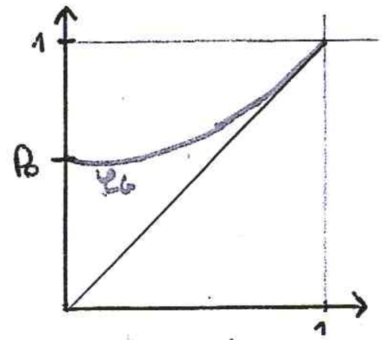
- Si $p_0 + p_1 = 1$, le graphe de G est une droite et ce point d'intersection est le seul puisque $G(0) = p_0 \neq 0$.
- Sinon, G est strictement convexe et il existe au plus un autre point d'intersection sur $]0,1[$.



Cas $m > 1$



Cas $m < 1$



Cas $m = 1$ et $p_0 + p_1 < 1$

Processus de Galton - Watson (suite).

• <u>Supposons $m > 1$</u> : Alors $G' - 1$ est une fonction croissante de $p_1 - 1 < 0$ (car $p_1 = 1 \Rightarrow m = 1$ ou bien car $p_0 > 0$) à $m - 1 > 0$, donc elle s'annule en un point $\alpha \in]0,1[$.
La fonction $G - Id$ est alors décroissante sur $[0,\alpha]$ puis croissante sur $[\alpha, 1]$.
Comme $G(0) - 0 = p_0 > 0$ et $G(1) - 1 = 0$, il existe un point dans $]0,\alpha]$ où $G - Id$ s'annule.
P_{ext} est donc l'unique point fixe de G sur $]0,1[$ (car G en a au plus 2).

x	0	P_{ext}	α		1
$G'(x) - 1$	$p_1 - 1$	$-$	0	$+$	$m - 1$
$G(x) - x$	p_0 ↘	0	↘ ↗		0

• <u>Supposons $m \leq 1$</u> : Alors $G' - 1$ est une fonction croissante sur $[0,1]$, négative ou nulle en 1, donc négative sur $[0,1[$.
Donc $G - Id$ est décroissante sur $[0,1]$ et s'annule en 1.
Comme cette fonction s'annule au plus 2 fois, elle s'annule qu'en 1 (sinon elle s'annulerait sur un intervalle non réduit à un singleton). Par conséquent, $P_{ext} = 1$.

x	0		1
$G'(x) - 1$	$p_1 - 1$	$-$	$m - 1$
$G(x) - x$	p_0	↘	0