Leçon 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fct° d'une ou plusieurs va[riables]

Réf : [G] Gourdon Analyse — [D] Demailly
[B] Briane - Pagès — [R] Rudin
[C] Candelpergher

Cadre Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré

On note : $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A}, \mu) := \{ f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K})$, mesurable tq $\int_X |f| \, d\mu < +\infty \}$

Sauf mention du contraire, on travaille avec la mesure de Lebesgues

Soit (E, d) un espace métrique

I - Méthodes élémentaires :

1) Primitives :

a) Premières méthodes :

Thm 1 : [G 123] Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fct° continue par morceaux sur $[a,b]$.

Alors l'app $F : [a,b] \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est C^1 par morceaux et continue sur $[a,b]$. De plus F est dérivable à gauche et à droite en tt pt x, et on a $F'_g(x) = \lim_{t \to x, t < x} f(t)$ et $F'_d(x) = \lim_{t \to x, t > x} f(t)$

En particulier si f est continue sur $[a,b]$, alors F est de classe C^1 sur $[a,b]$ et $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$

Cor 2 : [G 123] Toute application $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue admet au moins une primitive F, et pour tt primitive F de f on a :

$\int_a^b f(x)\,dx = [F]_a^b = F(b) - F(a)$.

Déf 3 : [G 143] : Soient $[a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ $(-\infty < a < b \leq +\infty)$ et $f : [a,b[\to \mathbb{C}$ une fct° continue par morceaux.

Si $\ell = \lim_{x \to b, x < b} \int_a^x f(t)\,dt$ existe et est finie, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,dt$ cvge et on pose $\int_a^b f(t)\,dt = \ell$

Ex 4 : [G 133] $\int_0^\infty 1/(1+x^2) \, dx = [\arctan]_0^\infty = \pi/2$

b) Primitives des fractions rationnelles : [G 133]

Soit F une fraction rationnelle de $\mathbb{R}(X)$. Pour calculer $\int F$, on commence par décomposer F en élém^{ts} simples sur $\mathbb{R}$. On est ainsi ramené à calculer les primitives de la forme $\int \frac{dx}{(x-a)^h}$ $(h \in \mathbb{N}^*)$ et $\int \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^h}$ $(c^2 - 4d < 0, h \in \mathbb{N}^*)$

Ex 5 [G 138] On a : $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \log|x| - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2} + k$, $k \in \mathbb{R}$.

2) Intégration par parties :

Thm 6 : [G 123] : Soient $u, v : [a,b] \to \mathbb{C}$ deux fonctions de classe C^1

Alors : $\int_a^b u(x) v'(x)\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x)\,dx$.

Ex 7 [?] $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + c$, $c \in \mathbb{R}$

Ex 8 [G 126] (INTÉGRALES DE WALLIS)

$\forall n \in \mathbb{N}$, on a $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

3) Changem^t de variable :

Thm 9 : [G 123] : Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une applicat° de classe C^1 et $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une applicat° continue par morceaux tq $\varphi([a,b]) \subset I$

Alors : $\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du$.

Ex 10 : [G 135] : (POLYNÔMES EN SIN ET COS)

On veut calculer les primitives $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ où $m, n \in \mathbb{N}$

- Si m ou n est impaire (par ex $n = 2p+1$). On a alors $\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int \sin^m x \,(1 - \sin^2 x)^p \cos x \, dx$

En effectuant le chg^t de var $t = \sin x$, on se ramène à la primitive $\int t^m (1-t^2)^p \, dt$.

- Si m et n paire on linéarise (on exprime $\sin^m x \cos^n x$ comme combinaison linéaire de fct° de la forme $\cos kx$ et $\sin kx$)

Ex 11 [G 135] On a : $\cos^4 x = \frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{2} + 3/8$, on peut donc facilem^t calculer $\int \cos^4 x \, dx$.

Ex 12 [G 135] Règle de Bioche

App 13 : [G 135]. On a : $\int \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x} \, dx = \cos x - 2\arctan(\cos x) + k$, $k \in \mathbb{R}$.

II - Méthodes liées aux intégrales multiples et à paramètre :

1) Intégrales dépendant d'un paramètre :

Dans cette partie, on se placera, sauf mention contraire, sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Thm 14 : [B 134] : (THM DE CONVERGENCE DOMINÉE)

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite d'élém^{ts} de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ vérifiant

i) $\mu(dx)$-pp, $f_n(x)$ cvge (ds $\mathbb{K}$) qd $n \to \infty$

ii) $\exists g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ tq $\forall n \geq 1$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\mu(dx)$-pp

Alors $\exists f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ tq
- $f_n(x)$ cvge vers $f(x)$ $\mu(dx)$-pp
- $\lim_n \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$

Ex 15 [?] : $\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty \frac{e^{-nx}}{1+x^2} \, dx = 0$.

Thm 16 [B 138] Soit $u_0 \in E$, Soit $f : E \times X \to \mathbb{K}$

Si i) $\forall u \in E$, $x \mapsto f(u,x)$ est mesurable de $(X, \mathcal{A})$ ds $(\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$

ii) $\mu(dx)$-pp, $u \mapsto f(u,x)$ est continue en u_0

iii) $\exists g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ tq $\forall u \in \mathcal{E}$, $|f(u,x)| \leq g(x)$ $\mu(dx)$-pp.

Alors la fct° $F(u) := \int_X f(u,x)\,dx$ est définie en tt pt $u \in \mathcal{E}$ et est continue en u_0.

Thm17 [B 141]: On suppose ici que $\mathcal{E} = I$, où I désigne un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Soit $u_0 \in I$.

Si la fct° f vérifie

i) $\forall u \in I$, $f(u,\cdot) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$

ii) $\mu(dx)$-pp, $u \mapsto f(u,x)$ est dérivable sur tt intervalle I

iii) $\mu(dx)$-pp, $\forall u \in I$, $\left|\frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\right| \leq g(x)$ où $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$

Alors la fct° $F(u) := \int_X f(u,x)\,\mu(dx)$ est définie et dérivable sur tt l'intervalle I, de dérivée :

$$F'(u) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\,\mu(dx).$$

App18 [B 142] (TRANSFORMÉE DE FOURIER)

Si f et $(x \mapsto x f(x)) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$ alors $\hat{f}(u) := \int_{\mathbb{R}} e^{iux} f(x)\,\lambda(dx)$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall u \in \mathbb{R}$:

$$\hat{f}'(u) = i\int_{\mathbb{R}} e^{iux} x f(x)\,\lambda(dx) = i\,\widehat{xf(x)}(u).$$

Ex19 [G 164] : On a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin xt}{t} e^{-t}\,dt = \arctan x \quad \forall x \geq 0.$

2) Intégration dans $\mathbb{R}^n$:

Thm20 [B 221] (THM FUBINI-TONELLI)

Soient $f : (X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fct° mesurable, μ, ν deux mesures σ-finies, respectivem^t^ sur $(X,\mathcal{A})$ et $(Y,\mathcal{B})$,

a) les fct° partielles df $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,\nu(dy)$ et $y \mapsto \int_X f(x,y)\,\mu(dx)$ sont respectivem^t^ $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ - mesurables

b) $\displaystyle\int_{X\times Y} f\, d\mu\otimes\nu = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\nu(dy)\right)\mu(dx)$

$$= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mu(dx)\right)\nu(dy)$$

Thm21 [B 222] (THM FUBINI-LEBESGUE)

On considère à nouveau les espaces mesurés du thm précédent.

Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu\otimes\nu)$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Alors : a) $\begin{cases} \mu(dx)\text{-pp} & y \mapsto f(x,y) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\nu) \\ \nu(dy)\text{-pp} & x \mapsto f(x,y) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu) \end{cases}$

b) $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,\nu(dy) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ et

$y \mapsto \int_X f(x,y)\,\mu(dx) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\nu)$ ces fct° étant df respectivem^t^ μ-pp et ν-pp

c) $\displaystyle\int_{X\times Y} f\,d\mu\otimes\nu = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\nu(dy)\right)\mu(dx)$

$$= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mu(dx)\right)\nu(dy)$$

Ex22 [C 217] Calculer de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ en utilisant la fct° : pour $A > 0$

$$f :]0,A[\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto e^{-xy}\sin x.$$

Ex23 [?] (FORMULE DE STIRLING)

On a : $n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

] DEV 4

Ex24 [G 158] (LA FONCTION GAMMA)

La fct° gamma est une fct° df par : $\Gamma :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt$$

La fct° Γ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ et pour tt $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\log t)^n e^{-t} t^{x-1}\,dt$$

On a de plus la relation fonctionnelle $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ $\forall x > 0$

en particulier : $\Gamma(1) = 1$, et $\Gamma(n+1) = n!$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

] DEV 2

Ex25 [C 221] (VOLUME DE LA BOULE UNITÉ)

On a : $\lambda_n(B_n(0,1)) = \dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$

Thm26 [C 221] (CHANGEM^t^ DE VAR DS $\mathbb{R}^n$)

Soit φ un C^1-difféomorphisme de U sur V où U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Une fct° mesurable f est intégrable sur V ssi $(f\circ\varphi)\,|\det(J_\varphi)|$ est intégrable sur U et dans ce cas on a :

$$\int_V f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n = \int_U f(\varphi(u_1,\dots,u_n))\,|\det J_{\varphi(u_1,\dots,u_n)}|\,du_1\dots du_n$$

Ex27 [C 223] (PASSAGE EN POLAIRE DS $\mathbb{R}^2$)

Soit D la demi-droite $]-\infty,0]\times\{0\}$ de $\mathbb{R}^2$ et φ df par :

$$]0,+\infty[\times]-\pi;\pi[\to \mathbb{R}^2\setminus D, \quad (r, \theta) \mapsto (x_1 = r\cos\theta,\ x_2 = r\sin\theta)$$

Ex 28 [C 223] (INTEGRALE DE GAUSS)

On a : $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

App 29 [G] (INTEGRALE DE FRESNEL)

On a l'égalité suivante $\int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\pi/4}$] DEV 3

III - Analyse Complexe :

Déf 30 [R 247] Soit γ un chemin fermé, Ω le complémentaire de γ^* (relative au plan complexe), on définit l'indice de γ par rapport à $z \in \Omega$:

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}$$

Thm 31 [R 260] (THM DE CAUCHY)

Soit f une fct° holomorphe de Ω un ouvert qq du plan. Pour tt chemin γ de Ω tq $\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha) = 0$ $\forall \alpha \notin \Omega$ (γ chemin fermé)

On a : $f(z) \cdot \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw$ pour $z \in \Omega \setminus \gamma^*$

et $\int_\gamma f(z) dz = 0$.

App 32 : (TRANSFORMÉE DE FOURIER DE LA GAUSSIENNE)

On considère l'application $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \to C_0(\mathbb{R}^d)$

$f \longmapsto \hat{f}(u) := \int_{\mathbb{R}} e^{-iux} f(x) dx$

Alors on a : $\mathcal{F}(e^{-ax^2})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\xi^2/4a}$ $\forall a > 0$] DEV 4

Déf 33 [R 265] Soient f une fct° holomorphe sur la couronne $K(a, \rho_1, \rho_2)$ et $\sum c_n (z-a)^n$ son dév en série de Laurent. On appelle le résidu de f en a (noté $\mathrm{Res}(f, a)$) le coeff a_{-1} du dév en série de Laurent de f.

Thm 34 [R 265] Soit f fct° holomorphe sur $\Omega \setminus A$ avec $A = \{z_1, \dots, z_n\}$. Si γ est un chemin fermé continu tq $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$ $\forall z \in \Omega$.

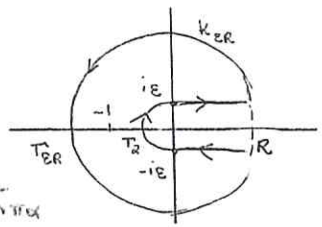
Alors $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz = \sum_{a \in A} \mathrm{Res}(f, a) \cdot \mathrm{Ind}_\gamma(a)$

App 35 : (FORMULE DES COMPLÉMENTS)

Pour $z \in \mathbb{C}$ tq $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$

$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$

en utilisant $\forall \alpha \in (0,1)$, $\int_0^\infty \frac{dt}{t^\alpha (1+t)} = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}$] DEV 5



IV - Méthodes de Calcul Approché. [D 56]

Soit $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ fct° continue.

On se propose de chercher des formules approchées pour l'intégrale $\int_\alpha^\beta f(x) dx$. Pour cela on choisit d'abord une subdivis° $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k = \beta$ de l'intervalle $[\alpha, \beta]$. On aura : $\int_\alpha^\beta f(x) dx = \sum_{i \le k} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x) dx$.

Méthode de Quadrature élémentaires :

$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x) dx \simeq (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \sum_{j \le \ell_i} \omega_{i,j} f(\xi_{i,j})$ où $\xi_{ij} \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ $0 \le j \le \ell_i$ et $\sum_{j \le \ell_i} \omega_j = 1$

Cas 1 : $\ell_i = 0$ $\forall i$, on choisit 1 seul pt $\xi_i \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$

On a alors $\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x) dx \simeq (\alpha_{i+1} - \alpha_i) f(\xi_i) \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x) dx \simeq \sum_{i \le k} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) f(\xi_i)$

c.à.d on approxime l'intégrale par une somme de Riemann relative à la subdivision (α_i).

Cas 2 : Méthode des Rectangles à gauche $\xi_i = \alpha_i$ Soit $R_n(f) = \frac{\beta - \alpha}{n} \sum_{i \le k} f(\alpha_i)$

$\int_\alpha^\beta f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{k} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) f(\alpha_i)$

Cas 3 : Méthode des Rectangles à droite $\xi_i = \alpha_{i+1}$

$\int_\alpha^\beta f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{k} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) f(\alpha_{i+1})$

Cas 4 : Méthode du pt milieu $\xi_i = \frac{\alpha_i + \alpha_{i+1}}{2}$, Soit $P_n(f) = \frac{\beta - \alpha}{n} \sum_{i \le k} f\left(\frac{\alpha_i + \alpha_{i+1}}{2}\right)$

$\int_\alpha^\beta f(x) dx \simeq \sum_{i \le k} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) f\left(\frac{\alpha_i + \alpha_{i+1}}{2}\right)$

Cas 5 : Méthode des trapèzes, on choisit $\ell_i = 1$ $\forall i$ $\xi_{i,0} = \alpha_i$ $\xi_{i,1} = \alpha_{i+1}$

$f \simeq p_1(x) = \frac{(x - \alpha_i) f(\alpha_{i+1}) - (x - \alpha_{i+1}) f(\alpha_i)}{\alpha_{i+1} - \alpha_i}$

Méthode de Monte Carlo : [OUVRARD 128]

Soient D un domaine de $\mathbb{R}^d$ et f une fct° réelle déf sur $\mathbb{R}^d$ mes. tq $\mathbb{1}_D f$ soit Lebesgue intégrable.

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de VAR aléatoires réelles indépendantes, de loi uniforme sur $[0,1]$.

On déf $\forall n$, la var aléatoire $\underline{U_n}$ à val de $\mathbb{R}^d$ par :

$\underline{U_n} = (U_{nd+1}, U_{nd+2}, \dots, U_{nd+d})$ et la VAR avec réelle $X_n = (\mathbb{1}_D f)(\underline{U_n})$

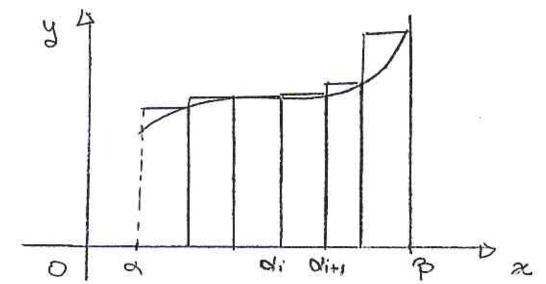
Alors la suite de terme général $S_n = \frac{1}{n} \sum_{j \le n} X_j$ cvge $\mathbb{P}_{ps}$ vers l'intégrale $I = \int_{D \cap [0,1]^d} f(x) dx$.

Estimation de l'erreur : (des méthodes de quadrature élémentaires)

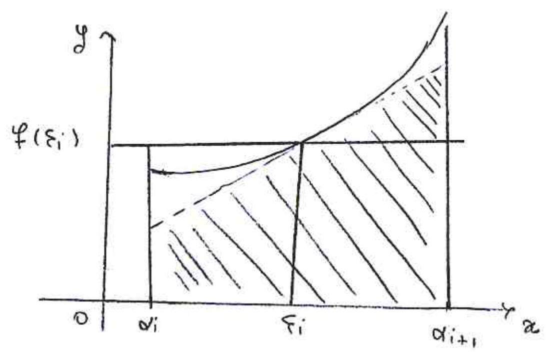
INCERTITUDE	Méthode des rectangles	Méthode du pt milieu
	Soit $f \in C^1([a,b], \mathbb{R})$ dont la dv est bornée par un réel M_1 sur $[a,b]$. On a : $\left| \int_a^b f(t) dt - R_n(f) \right| \le \frac{M_1 (b-a)^2}{2n}$	Soit $f \in C^2([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ dont la dv seconde est bornée par un réel M_2 sur $[\alpha, \beta]$. On a : $\left| \int_\alpha^\beta f(t) dt - P_n(f) \right| \le \frac{M_2 (\beta - \alpha)^3}{24 n^2}$

ANNEXE :

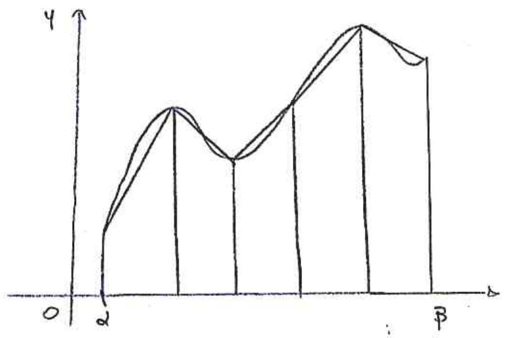
- Méthode des rectangles à droite :



- Méthode du point milieu :



- Méthode des trapèzes :



Développement 2 : **Leçon n°** 2.36 Intégrale de Fresnel.

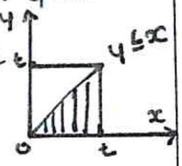
$$\boxed{\varphi = \int_0^{+\infty} e^{ix^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{i\pi/4}}$$

Nous allons étudier $F(t) = \iint_{[0,t]^2} e^{i(x^2+y^2)}\,dx\,dy$, $f(r) = \int_0^t e^{ix^2}\,dx$ et $I(T) = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\,dt$.

- Exprimons $F(t)$ de deux manières :

$\#1$: La fonction $(x,y) \longmapsto e^{i(x^2+y^2)}$ est C^0 sur le pavé compact $[0,t]^2$.
En appliquant Fubini on a $F(t) = \int_0^t e^{ix^2}\,dx \int_0^t e^{iy^2}\,dy = (f(t))^2$.

$\#2$: Le domaine d'intégration et l'intégrande sont symétriques par rapport à la droite $y = x$, on écrit donc : $F(t) = 2\int_0^t \int_0^x e^{i(x^2+y^2)}\,dy\,dx$



On passe alors en coord. polaires : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

Bornes : On avait : $- \; 0 \le x \le t \Rightarrow 0 \le r\cos\theta \le t \Rightarrow 0 \le r \le \frac{t}{\cos\theta}$

$- \; 0 \le y \le x \Rightarrow 0 \le r\sin\theta \le r\cos\theta \Rightarrow 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$.

on a donc $F(t) = 2\int_0^{t/\cos\theta}\int_0^{\pi/4} e^{ir^2} r\,d\theta\,dr$. Fubini

$$= 2\int_0^{\pi/4}\int_0^{t/\cos\theta} e^{ir^2} r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/4}\left[\frac{1}{2i}e^{ir^2}\right]_0^{t/\cos\theta} d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{2i}e^{it^2/\cos^2\theta} - \frac{1}{2i}\right) d\theta$$

$$= \frac{\pi}{4}i - i\int_0^{\pi/4} e^{it^2/\cos^2\theta}\,d\theta$$

- En injectant dans $I(T)$ on obtient :

$$I(T) = \frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{\pi}{4}i - i\int_0^{\pi/4} e^{it^2/\cos^2\theta}\,d\theta\right)dt = \frac{\pi}{4}i - \frac{i}{T}\int_0^T\int_0^{\pi/4} e^{it^2/\cos^2\theta}\,d\theta\,dt$$

La fonction $(t,\theta) \longmapsto e^{it^2/\cos^2\theta}$ est C^0 et intégrable sur $[0,T]\times[0,\frac{\pi}{4}]$ donc mesurable et par Fubini on a : $I(T) = \frac{\pi}{4}i - \frac{i}{T}\int_0^{\pi/4}\int_0^T e^{it^2/\cos^2\theta}\,dt\,d\theta$

Faisons le changement de variables : $u = \frac{t}{\cos\theta} \Rightarrow du = \frac{dt}{\cos\theta}$

Alors $I(T) = \frac{\pi}{4}i - \frac{i}{T}\int_0^{\pi/4}\int_0^{T/\cos\theta} e^{iu^2}\cos\theta\,du\,d\theta$

$$= \frac{\pi}{4}i - \frac{i}{T}\int_0^{\pi/4} f\left(\frac{T}{\cos\theta}\right)\cos\theta\,d\theta$$

On veut maintenant mq $f(t) = \int_0^t e^{ix^2}\,dx$ converge.

Faisons le changement de variables $v = x^2 \Rightarrow dv = 2x\,dx$
$= 2\sqrt{v}\,dx$

D'où $f(t)=\int_0^{t^2}\frac{e^{iv}}{2\sqrt{v}}\,dv$, or $\left|\int_0^{t^2} e^{iv}\,dv\right|$ bornée, $v\longmapsto \frac{1}{2\sqrt{v}}$ C^0 positive et décroissante vers 0; donc par la règle d'Abel, $f(t)$ converge. Donc f est bornée au vois. de ∞ et $\lim_{T\to\infty}\frac{i}{T}\int_0^{\pi/4} f\left(\frac{T}{\cos\theta}\right)\cos\theta\,d\theta = 0$, d'où $\lim_{T\to\infty} I(T)=\frac{\pi}{4}i$

Par ailleurs la relation trouvée en "#1" entraîne que $\forall T>0$, $I(T)=\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt$.
Or la fonction $t\longmapsto f^2(t)$ converge vers φ^2 lorsque $t\to+\infty$. On en déduit que $\lim_{T\to\infty} I(T)=\varphi^2$ (par Césaro).
Par unicité de la limite on a : $\varphi^2=\frac{\pi}{4}i = \pm\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{i\pi/4}$

- Il suffit de déterminer le signe de φ, déterminons donc le signe de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Im}\left(\int_0^\infty e^{ix^2}dx\right) &= \mathrm{Im}\left(\int_0^\infty e^{iu}\frac{du}{2\sqrt{u}}\right)\\
&= \int_0^\infty \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,du\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}\frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,du\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,du + \int_{(2k+1)\pi}^{2(k+1)\pi}\frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,du\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,du - \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\frac{\sin u}{2\sqrt{u+\pi}}\,du\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\underbrace{\frac{\sin u}{2}}_{\geq 0\ \forall u\in[2k\pi,(2k+1)\pi]}\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{u}}-\frac{1}{\sqrt{u+\pi}}\right)}_{>0}du
\end{aligned}$$

- $u=v+\pi$
- $\sin(v+\pi)=-\sin v$

L'integrande étant positive $\forall k\geq 0$, $\mathrm{Im}(\varphi)\geq 0$.

Donc $\varphi=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{i\pi/4}$ ☒

Ref: GOURDON "Analyse" p. 342-343 (2° edition)

Formule des compléments

ref : Stein-Shakarchi : complex analysis

THÉORÈME 8.1 *On définit* Γ *sur* $]0,+\infty[$ *par* $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}t^{s-1}e^{-t}\mathrm{d}t$. *On a alors pour* $s\in]0,1[$,

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}$$

PREUVE.

Tout d'abord, Γ est bien définie pour $s>0$ car en 0 l'intégrande est équivalent à t^{s-1} qui est intégrable par le critère de Riemann et en $+\infty$ on a une décroissance exponentielle.

Réécrivons le membre de gauche :

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\int_0^{+\infty}(\int_0^{+\infty}u^{-s}e^{-u}\mathrm{d}u)t^{s-1}e^{-t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}(vt)^{-s}e^{-vt}t^se^{-t}\mathrm{d}v\mathrm{d}t$$

en faisant le changement de variable $u=tv$.

D'où, par Fubini,

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\int\int\frac{e^{-(1+v)t}}{v^s}\mathrm{d}v\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}v}{(1+v)v^s}$$

En posant $a=1-s$, ce qui ne change pas le terme de gauche, on est donc ramené à calculer, pour $a\in]0,1[$:

$$\int_0^{+\infty}\frac{v^{a-1}}{1+v}\mathrm{d}v$$

On va utiliser le théorèmes des résidus : Tout d'abord, en posant $v=e^x$, qui est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$ on se ramène à calculer :

$$I(a)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}\mathrm{d}x$$

La fonction $f(z)=\frac{e^{az}}{1+e^z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus i\pi+2i\pi\mathbb{Z}$.

Calculons le résidu de f en $i\pi$.

$$(z-i\pi)f(z)=e^{az}\frac{z-i\pi}{e^z-e^{i\pi}}\xrightarrow[z\to i\pi]{}e^{ia\pi}e^{i\pi}=-e^{ia\pi}$$

On applique le théorème des résidus à f avec le contour Γ défini par le rectangle de sommets $-R,R,R+2i\pi,-R+2i\pi$ dans le demi-plan supérieur orienté dans le sens trigonométrique. Ce contour enferme seulement un pôle de f à savoir $i\pi$.

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z=-2i\pi e^{ia\pi}$$

Calculons le membre de gauche morceaux par morceaux :

$$|\int_R^{R+2i\pi}f(z)\mathrm{d}z|=|\int_0^{2\pi}\frac{e^{a(R+i\theta)}}{1+e^{R+i\theta}}\mathrm{d}\theta|\le Ce^{(a-1)R}\xrightarrow[R\to+\infty]{}0$$

$$|\int_{-R}^{-R+2i\pi}f(z)\mathrm{d}z|=|\int_0^{2\pi}\frac{e^{a(-R+i\theta)}}{1+e^{-R+i\theta}}\mathrm{d}\theta|\le C'e^{-aR}\xrightarrow[R\to+\infty]{}0$$

$$\int_{R+2i\pi}^{R-2i\pi} f(z)\mathrm{d}z = \int_{R}^{-R} f(2i\pi + x)\mathrm{d}x = -e^{2i\pi a}\int_{-R}^{R} f(z)\mathrm{d}z$$

En passant à la limite quand $\mathbb{R}$ tend vers $+\infty$, on obtient, puisque f est intégrable sur $\mathbb{R}$:

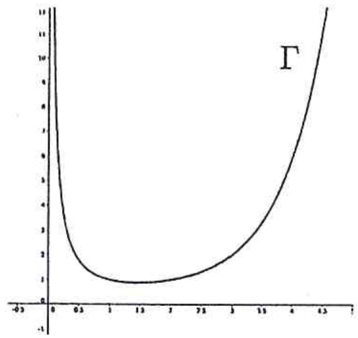
$$I(a)(1 - e^{2i\pi a}) = -2i\pi e^{i\pi a}$$

D'où, en factorisant par l'arc-moitié :

$$I(a) = -2i\pi \frac{e^{i\pi a}}{1 - e^{2i\pi a}} = \frac{\pi}{\sin \pi a}$$

$\square$

Leçons concernées : 236, 239, 245



> $\Gamma \in C^\infty(]0;+\infty[, \mathbb{R})$ *et, pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *pour tout* $x \in]0;+\infty[$, $\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)^k t^{x-1} e^{-t} dt$.

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$ et $A > \varepsilon$. Démontrons que $\Gamma \in C^\infty(]\varepsilon; A[, \mathbb{R})$.
Soit $f :]0;+\infty[\times]\varepsilon;A[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t;x) = t^{x-1}e^{-t}$.
1. Pour tout $t \in]0;+\infty[$, la fonction $f_t : x \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est de classe $C^\infty(]\varepsilon; A[, \mathbb{R})$.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $(t;x) \in]0;+\infty[\times]\varepsilon;A[$: $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t;x) = \ln(t)^k t^{x-1}e^{-t}$.
3. Soit $x_0 \in]\varepsilon; A[$. Si $t \in]0;1[$, alors $t^{x_0-1} \leqslant t^{\varepsilon-1}$ et si $t \in [1;+\infty[$, alors $t^{x_0-1} \leqslant t^{A-1}$.
Donc, pour tout $(t;x) \in]0;+\infty[\times]\varepsilon;A[$, on a :

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t,x)\right| \leqslant \left|\ln(t)^k e^{-t}\right| \left(t^{\varepsilon-1}\chi_{]0;1[}(t) + t^{A-1}\chi_{[1;+\infty[}(t)\right) := g(t)$$

4. $\int_0^1 g(t)dt = \int_0^1 |\ln(t)|^k e^{-t} t^{\varepsilon-1} dt$. Or, $|\ln(t)|^k e^{-t} t^{\varepsilon-1} \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{t^{1-\frac{\varepsilon}{2}}}\right)$ et, d'après Riemann, $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-\frac{\varepsilon}{2}}} dt$ converge. $\int_1^{+\infty} g(t)dt = \int_1^{+\infty} (\ln(t))^k e^{-t} t^{A-1} dt$.
Or, $(\ln(t))^k e^{-t} t^{A-1} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et, d'après Riemann, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge. Ainsi, $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ converge. D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale avec domination, on a : $\Gamma \in C^\infty(]0;+\infty[, \mathbb{R})$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]0;+\infty[, \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)^k t^{x-1} e^{-t} dt$$

□

> *Les fonctions* Γ *et* $\ln(\Gamma)$ *sont strictement convexes.*

Démonstration. 1. Il est clair que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\Gamma(x) > 0$. Donc la fonction $\ln(\Gamma)$ est bien définie sur $]0;+\infty[$.
2. D'après la proposition 937, on a : $\forall x \in]0;+\infty[$, $\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^2 t^{x-1} e^{-t} dt$. Il est donc clair que, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\Gamma''(x) > 0$. Par conséquent, Γ est strictement convexe.
3. $(\ln(\Gamma))'' = \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)' = \frac{\Gamma''\Gamma - \Gamma'^2}{\Gamma^2}$. Γ^2 étant clairement positive sur $]0;+\infty[$, démontrons que $\Gamma''\Gamma - \Gamma'^2$ est positive sur $]0;+\infty[$.
Pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a :

$$\begin{cases} \Gamma''(x) = & \int_0^{+\infty} (\ln(t))^2 t^{x-1} e^{-t} dt \\ \Gamma(x) = & \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \\ \Gamma'(x) = & \int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x-1} e^{-t} dt \end{cases}$$

Écrivons $\ln(t)t^{x-1}e^{-t} = \left(\ln(t)t^{\frac{x-1}{2}}e^{-\frac{t}{2}}\right)\left(t^{\frac{x-1}{2}}e^{-\frac{t}{2}}\right)$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}e^{-t}dt \leqslant \sqrt{\int_0^{+\infty} (\ln(t))^2 t^{x-1}e^{-t}dt} \times \sqrt{\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt}$$

Soit : $\Gamma'(x) \leqslant \sqrt{\Gamma''(x)} \times \sqrt{\Gamma(x)}$. D'où : $\Gamma'^2(x) \leqslant \Gamma''(x)\Gamma(x)$. Il y a égalité si, et seulement si, les fonctions $t \longmapsto \ln(t)t^{\frac{x-1}{2}}e^{-\frac{t}{2}}$ et $t \longmapsto t^{\frac{x-1}{2}}e^{-\frac{t}{2}}$ sont proportionnelles. Ce qui n'est manifestement pas le cas. Donc :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \Gamma'^2(x) < \Gamma''(x)\Gamma(x)$$

Ainsi, $(\ln(\Gamma))'' > 0$ et $\ln(\Gamma)$ est strictement convexe. □

> $\lim\limits_{x\to+\infty} \Gamma(x) = \lim\limits_{x\to 0} \Gamma(x) = +\infty$ *et* Γ *possède un unique minimum sur* $]0;+\infty[$.

Démonstration. Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.
Or, la fonction $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est positive sur $]0;+\infty[$. D'où : $\Gamma(x) \geqslant \int_0^2 t^{x-1}e^{-t}dt$.
De plus : $\forall t \in]0;2]$, $t^{x-1}e^{-t} \geqslant t^{x-1}e^{-2}$. Donc :

$$\Gamma(x) \geqslant \int_0^2 t^{x-1}e^{-2}dt = e^{-2}\left[\frac{t^x}{x}\right]_0^2 = \frac{2^x}{xe^2}$$

Or :

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x}{xe^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{xe^2} = +\infty$$

Donc, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} \Gamma(x) = \lim\limits_{x\to 0} \Gamma(x) = +\infty$. La stricte convexité de Γ établie à la proposition 938 suffit alors à expliquer la présence d'un unique minimum sur $]0;+\infty[$. □