NOM : **Prénom :** Imen & Diane **date :** 28/11/2019

N°Leçon : 246 **Titre de la leçon :** Séries de Fourier. Exemples et Applicat°

Références : Gourdon Analyse [G], objectif Agrégat° [OA], Queffélec [Q], El Amrani [A]

Dans cette leçon, on note $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, la famille des fct° $e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto e^{inx}$

I - Définitions et premiers propriétés :

1) Définitions :

Déf 1 [Q 68] : Soit f une applicat° de $\mathbb{R}$ de $\mathbb{C}$ et $G = \{a\in\mathbb{R} \mid f(x+a) = f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}\}$

On dit que f est a-périodique si $a \in G\setminus\{0\}$.

De plus si $G = T\mathbb{Z}$, $T>0$, on appelle T la plus petite période de f.

Rmq 2 : De façon générale, l'étude de la fct° T-périodique f se ramène à l'étude de la fct° 2π-périodique g avec $g(x) = f(\frac{T}{2\pi}x)$.

On va donc se limiter à l'étude des fct° 2π-périodiques.

On appelera l'ensemble de ces fonct° C.

Prop 3 [Q 70] Si T est >0, et si $f : \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est T-périodique localem' intégrable, on a : $\forall a\in\mathbb{R}$, $\int_a^{a+2\pi} f(t)dt = \int_0^{2\pi} f(t)dt$

Déf 4 : [Q 69] : Espace $L^p_{2\pi}(\mathbb{R})$, $p\geq 1$

$L^p_{2\pi}(\mathbb{R})$ désigne l'espaces des fct° $f : \mathbb{R}\to\mathbb{C}$, 2π-pério pp et mes. tq $f_{|[0,2\pi]} \in L^p([0,2\pi])$

Cet espace est normé par $\|f\|_{L^p_{2\pi}} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$

Rmq 5 $L^p_{2\pi}(\mathbb{R}) \simeq L^p([0,2\pi])$

On note $C^n_{m,2\pi}(\mathbb{R})$ l'espace des fct° 2π-périodique et C^n par morceaux sur $[0,2\pi]$.

On a : $C^n_{m,2\pi}(\mathbb{R}) \subset L^p([0,2\pi])$

Déf 6 : [Q 69] On appelle produit scalaire de deux fonctions f,g de $L^2([0,2\pi])$ le nb complexe :

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

Déf 7 : [Q 70] Soit $f\in L^1([0,2\pi])$, $n\in\mathbb{Z}$

1) On définit le n-ème coef de Fourier exp de f par la formule : $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$

On remarquera que si $f\in L^2([0,2\pi])$, $c_n(f) = \langle f, e_n\rangle$

2) On définit les n-ème coef de fourier trigonométriques de f par les formules

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt$$

On remarquera de m̂ que si $f\in L^2([0,2\pi])$, on a :

$$a_n(f) = 2\langle f, \frac{e_n+e_{-n}}{2}\rangle \text{ et } b_n(f) = 2\langle f, \frac{e_n-e_{-n}}{2i}\rangle$$

3) On appelle la série de Fourier de f, la série :

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos nt + b_n(f)\sin nt)$$

$\forall N\in\mathbb{N}$, on appelle somme de fourier d'ordre N,

$$S_N(f) = \sum_{-N}^{N} c_n(f)e_n.$$

Rmq : $S(f)$ cvge si la suite de fct° des somme de fourier d'ordre N cvge

2) Propriétés :

Prop 8 [Q 72] : Soit $f\in L^1$, $a\in\mathbb{R}$, $k,n\in\mathbb{Z}$, Alors

i) $c_n(\check{f}) = c_{-n}(f)$ où par déf $\check{f}(t) = f(-t)$

ii) $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$

iii) $c_n(\tau_a f) = e^{ina}c_n(f)$ avec $\tau_a(f(t)) = f(t+a)$

iv) $c_n(e_k f) = c_{n-k}(f)$

Ex 9 [?] : Soit $f(t) = \frac{1}{1+\cos^2 t}$ déf sur $\mathbb{R}$

on a : $c_{2n+1}(f) = 0$ et $c_{2n}(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos 2nt}{1+\cos^2 t}dt$

Prop 10 [A 287] : $f\in L^1([0,2\pi])$

- si f paire $\Rightarrow$ $b_n(f) = 0$
- si f impaire $\Rightarrow$ $a_n(f) = 0$

Ex 11 [A 316] : Soit $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 2π périodiq, impaire tq

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0\leq t < \pi/2 \\ \pi - t & \text{si } \pi/2 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

Alors $a_n(f) = 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall p\geq 1$ $b_{2p}(f) = 0$ et $\forall p\in\mathbb{N}$ $b_{2p+1}(f) = \frac{4(-1)^p}{\pi(2p+1)^2}$

Prop 12 [Q 72] : Soit $f\in C^k_{m,2\pi}(\mathbb{R})$ alors $\forall n\in\mathbb{Z}$: $c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$ -

Prop 13 [273] : (Lemme de Riemann-Lebesgue)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et soit $f \in L^1[a,b]$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = \lim_{|\lambda| \to \infty} \int_a^b f(t) \cos \lambda t \, dt$$
$$= \lim_{|\lambda| \to \infty} \int_a^b f(t) \sin \lambda t \, dt = 0$$

Prop 14 [272] : Soit $f \in L^1[0,2\pi]$.

Si $\sum_{-N}^{N} a_n e_n$ cvge unif vers f alors f est continue et $a_n = c_n(f)$ $\forall n$.

3) Les principaux "noyaux" trigonométriques :

Déf 15 [271] : Soit $f, g \in L^1[0,2\pi]$.

On déf : $(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) g(t) \, dt$ le produit de convolution de f et g en x (pour pp x de $[0,2\pi]$)

Prop 16 [272] : Soit $f \in L^1[0,2\pi]$

on a : $f * e_n = c_n(f) e_n$.

NOYAU DE DIRICHLET : [275]

On appelle noyau de Dirichlet d'ordre $N \geq 0$: $D_N = \sum_{-N}^{N} e_n$.

Prop 17 : Le noyau de Dirichlet D_N vérifie :

i) D_N est pair et $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) \, dt = 1$.

ii) $D_N(x) = \frac{\sin(N+1/2)x}{\sin x/2}$

iii) $S_N(f) = f * D_N$ $\quad \forall f \in L^1[0,2\pi]$ $\quad \forall N \geq 0$

NOYAU DE FEJER : [276]

On appelle noyau de Fejer d'ordre $N \geq 1$: $K_N = \frac{D_0 + \dots + D_{N-1}}{N}$

Prop 18 : Le noyau de Fejer K_N vérifie :

i) $K_N = \sum_{-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e_n$

ii) $K_N(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin N x/2}{\sin x/2} \right)^2 \geq 0$ et $\|K_N\|_1 = 1$.

iii) $\sigma_N(f) = f * K_N = \sum_{-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) c_n(f) e_n$ $\quad \forall f \in L^1[0,2\pi]$ $\quad \forall N \geq 1$

où pour déf $\sigma_N(f) = \frac{S_0(f) + \dots + S_{N-1}(f)}{N}$ la somme de Fejer d'indice N de f. (ou somme de Cesaro)

II - Convergence :

1) Autour du thm de Fejer :

Thm 19 [284] :

i) Soit f continue et 2π-périodique alors $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ $\forall N \geq 1$ et $\lim_{N \to \infty} \|\sigma_N(f) - f\|_\infty = 0$.

ii) Soit $f \in L^p[0,2\pi]$ $(1 \leq p < \infty)$: alors $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ $\quad \forall N \geq 1$ et $\lim_{N \to \infty} \|\sigma_N(f) - f\|_p = 0$.

App 20 [286] :

i) Soit f continue, 2π-périodique, $x_0 \in \mathbb{R}$, si $S_N(f, x_0) \to \ell$ alors $\ell = f(x_0)$.

ii) Soit $f \in L^1[0,2\pi]$ tq $S_N(f)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ alors $f = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(f) e_n = \lim_{N \to \infty} \sum_{-N}^{N} c_n(f) e_n$.

iii) Si f continue et C^1 par morceaux alors $S_N(f)$ cvge normalement sur $\mathbb{R}$ et $f = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(f) e_n$.

iv) Si f et g sont continues, 2π-périodiques on a : $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} = (c_n(g))_{n \in \mathbb{Z}} \iff f = g$

Si f et $g \in L^1[0,2\pi]$ on a : $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} = (c_n(g))_{n \in \mathbb{Z}}$
$\iff f = g$ pp

2) Convergence de la série de Fourier :

Thm 21 [CA 129] : Soit $f \in L^1[0,2\pi]$. Si $\exists M \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall n \in \mathbb{Z}$ $|c_n(f)| \leq \frac{M}{|n|}$ Alors :

i) Si f C^0, $S_N(f)$ cvge unif vers f

ii) Si $f \in L^p[0,2\pi]$ $(1 \leq p < \infty)$, $S_N(f)$ cvge unif vers f pour $\|\cdot\|_p$

iii) Si f admet à la fois limite à drt et à gch en x_0
$S_N(f, x_0) \longrightarrow \frac{1}{2}(f(x_0^+) + f(x_0^-))$

Thm 22 : [Z 89] (Thm de Dirichlet)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, mesurable, intégrable sur $[0, 2\pi]$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

On suppose que $\lim_{t \to 0^+} f(x_0 + t) = f^+$ et $\lim_{t \to 0^-} f(x_0+t) = f^-$ existent

$$\cdot \ \exists \delta > 0 \text{ tq } \int_0^\delta \frac{|f(x_0+t) - f^+|}{t} \, dt < \infty$$

$$\text{et } \int_0^\delta \frac{|f(x_0 - t) - f^-|}{t} \, dt < \infty$$

Alors on a : $\lim_{N \to \infty} S_N(f, x_0) = \frac{1}{2}(f^+ + f^-)$

Ex 23 [A 319] : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π per. impaire tq $\forall t \in [0, \pi]$

$f(t) = \sin^2 t$, on a : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \ a_n(f) = 0 \\ \forall p \in \mathbb{N}, \ b_{2p}(f) = 0 \text{ et } b_{2p+1} = \dfrac{-8}{\pi(2p-1)(2p+1)(2p+3)} \end{cases}$

De plus $f(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \dfrac{-8}{\pi(2p-1)(2p+1)(2p+3)} \sin((2p+1)t)$

Rmq 24 : Il existe f continue tq la suite $S_N(f)$ des sommes de Fourier de f diverge en 0.

Ex 25 [G 264] : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire, 2π-périodiq tq $\forall x \in [0, \pi]$

$f(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left[(2^{p^3}+1)\frac{x}{2}\right]$ la série de Fourier de f diverge en 0.

Thm 26 [A 315] : Soit f 2π-per, C^1 sur $[0, 2\pi]$, on suppose que f C^0 sur $\mathbb{R}$

Alors la série de Fourier de f cvge normalem^t sur $\mathbb{R}$ avec f pour somme.

Ex 27 : $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$

Thm 28 [G 273] (FORMULE SOMMATOIRE DE POISSON)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, C^1 vérifiant $f(x) = O(1/x^2)$ et $f'(x) = O(1/x^2)$ lorsque $|x| \to +\infty$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$: $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2i\pi n x}$

où $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\hat{f}(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi n t} \, dt$

App 29 : [G 273]

$$\forall s > 0 \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s} = s^{-1/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi k^2/s}$$

DEV 4

3) Dans ℓ^2 :

Thm 30 [?] : l'application $f \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est une isométrie bij de $L^2([0, 2\pi])$ dans $\ell^2(\mathbb{Z})$

Thm 31 : [?] : FORMULE DE PARSEVAL :

$$\forall f \in L^2([0, 2\pi]), \ \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$$

Cor 32 : [Z 86] :

On a : $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormale de L^2, en part

$f \in L^2([0, 2\pi]) \Rightarrow \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \|f\|_2^2$ et $\lim_{N \to \infty} \|S_N(f) - f\|_2 = 0$

Ex 33 : $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \pi^4/90$

III. Applications :

App 34 : (Equat$^°$ de la chaleur)

Soit $f \in C^1([0, \pi], \mathbb{R})$ tq $f(0) = f(\pi) = 0$

Notons K_f l'ens des élém^t $u : [0, \pi] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto u(x,t)$ de $C([0, \pi] \times \mathbb{R}_+)$

qui vérifient : 1) i) $\partial_x u$ et $\partial_t u$ existent et sont C^0 sur $[0, \pi] \times \mathbb{R}_+^*$

ii) $\partial_{x^2}^2 u$ existe et est " " "

iii) $\forall t \geq 0$ $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$

iv) $\forall (x, t) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}_+^*$, $\partial_t u(x, t) = \partial_{x^2}^2 u(x, t)$

2) $\forall x \in [0, \pi]$ $u(x, 0) = f(x)$

Alors K_f est un singleton

DEV 2

App 35 : [Z 103] (Inégalité Isopérimétrique)

Soit $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ une courbe de Jordan de classe C^1 par morceaux, de long L et enfermant une surface S alors $L^2 \geq 4\pi S$

App 36 : (EXPRESSION DES $\zeta(2k)$)

On a : $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} b_{2k}$

avec b_k les nb de Bernoulli.

DEV 3

Développement 2 : **Leçon n°** 246

Soit $f \in C^1([0,\pi], \mathbb{R})$ tq $f(0) = f(\pi) = 0$

Notons K_f l'ensemble des élém^ts : $u : \begin{bmatrix} [0,\pi] \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) \longmapsto u(x,t) \end{bmatrix}$ de $C([0,\pi] \times \mathbb{R}_+^*)$

qui vérifient :

1) i) $\partial_x u$ et $\partial_t u$ existent et sont continues sur $[0,\pi] \times \mathbb{R}_+^*$

ii) $\partial_{x^2}^2 u$ existe et est continue sur $[0,\pi] \times \mathbb{R}_+^*$

iii) $\forall t \geq 0, \ u(0,t) = u(\pi,t) = 0$

iv) $\forall (x,t) \in [0,\pi] \times \mathbb{R}_+^*, \ \partial_t u(x,t) = \partial_{x^2}^2 u(x,t)$

2) $\forall x \in [0,\pi], \ u(x,0) = f(x)$.

Alors K_f est un singleton.

Réf. Bernis.

EXISTENCE

Etape 1 : SÉPARATION DES VARIABLES :

Soit u une applicat° non identiquem^t nulle, de la forme $u : (x,t) \mapsto X(x)T(t)$

où $X \in C^2([0,\pi], \mathbb{R})$

$T \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$

d'app u est continue et vérifie 1)i) et 1)ii).

On suppose que u vérifie aussi 1)iii) et 1)iv).

Par 1)iv), $\forall (x,y) \in [0,\pi] \times \mathbb{R}_+^*$: $X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$ (α)

Or $u \neq 0$, on peut trouver $(x_0,t_0) \in]0,\pi[\times \mathbb{R}_+$ tq $u(x_0,\bar{t_0}) \neq 0$ et par continuité de u, on peut m̂ imposer que $\bar{t_0} > 0$

En particulier $X(x_0) \neq 0$ et $T(\bar{t_0}) \neq 0$

Donc par (α), $\forall x \in [0,\pi]$, $X''(x_0) = \dfrac{T'(\bar{t_0})}{T(\bar{t_0})} X(x)$

et $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $T'(t) = \dfrac{X''(x_0)}{X(x_0)} T(t)$

Posons $k = -\dfrac{T'(\bar{t_0})}{T(\bar{t_0})}$, la dernière égalité donne pour $t = \bar{t_0}$, $k = -\dfrac{X''(x_0)}{X(x_0)}$

On a finalem^t pour $\forall (x,t) \in [0,\pi] \times \mathbb{R}_+^*$

$X''(x) = -k X(x)$ $(\alpha\alpha)$

$T'(x) = -k T(t)$ $(\alpha\alpha\alpha)$

Etape 2 : DETERMINATION DE LA CONSTANTE :

- Supposons $k < 0$, alors $\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2$ non nul tq $X(x) = A\exp(\sqrt{-k}\,x) + B\exp(-\sqrt{k}x)$
D'après les condit° aux bords 1)iii) avec $t = \bar{t_0}$, ${}^t(A,B)$ est dans le noyau de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \exp(-\sqrt{k}\pi) & \exp(-\sqrt{k}\pi) \end{pmatrix}$ mat inversible, c'est absurde donc $k \geq 0$.
- Supposons $k = 0$, alors X est une app affine non nulle (ce qui contredit 1)iii)

Finalem^t $\boxed{k > 0}$

et dc $\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2$, non nuls tq $X(x) = A\cos(\sqrt{k}\,x) + B\sin(\sqrt{k}\,x)$

D'après les condit° aux bords $\mathcal{Y})ii)$ on a $A = 0$ et $\sin(\sqrt{k}\,\pi) = 0$

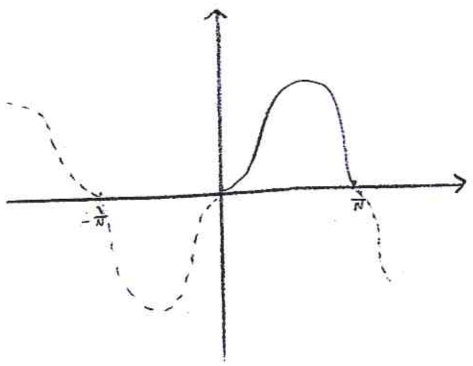
Donc $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tq $\sqrt{k} = n$ et $X(x) = B\sin(nx)$ et dc par (déduct)

$\exists C \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ tq $u(x,t) = C\sin(nx)\exp(-n^2 t)$ $\forall (x,t) \in [0,\pi] \times \mathbb{R}_+^*$

et par continuité de u, $\forall (x,t) \in [0,\pi] \times \mathbb{R}_+$

Étape 3 : TROUVONS UNE FONCTION EXPLICITE À PARTIR DE u qui $\in K_f$:

Notons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x,t) = C\sin(nx)\exp(-n^2 t)$



- On va introduire $\tilde{f}$ le prolong^t impair et 2π-périodiq de f.

Comme $f(0) = f(\pi)$, $\tilde{f}$ est continue et de classe C^1 par morceaux (et m̂ classe C^1)

$\rightarrow$ la série $\sum_{n \geq 1} b_n(\tilde{f})\, u_n$ avec $b_n(\tilde{f})$ le coef de Fourier d'ordre n (en sin) de $\tilde{f}$ converge normalem^t dc simplem^t sur $[0,\pi] \times \mathbb{R}_+$

Notons S sa somme.

En effet comme $\tilde{f}$ est continue et C^1 par morceaux, $(b_n(\tilde{f}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sommable

or $\forall n \geq 1$, $\|b_n(\tilde{f})\, u_n\|_\infty \leq |b_n(\tilde{f})|$

la convergence normale (dc uniforme) de la série et la continuité des u_n nous assurent de la continuité de S sur $[0,\pi] \times \mathbb{R}_+$.

$\rightarrow$ De façon immédiate on a : $S(0,t) = S(\pi,t) = 0$. Donc S vérifie $\mathcal{Y})ii)$

- Mq S vérifie $\mathcal{Y})i)$ et $\mathcal{Y})iii)$

Traitons rigoureusem^t l'existance et la continuité, par ex de $\partial_t S$ (de façon analogue pour les autres dér partielles).

Soit $\varepsilon > 0$.

$\forall x \in [0,\pi]$, $t \in [\varepsilon, +\infty[$, $n \geq 1$, $u_n(x,\cdot)$ est C^1 et

$$|\partial_t (b_n(\tilde{f})\, u_n)(x,t)| \leq |b_n(\tilde{f})|\, n^2 \exp(-n^2 \varepsilon) \quad (\ast\ast)$$

or $|b_n(\tilde{f})|\, n^2 \exp(-n^2\varepsilon) = o(|b_n(\tilde{f})|)$ dc puisque la série $\sum_{\geq 1} |b_n(\tilde{f})|$ cvge

la série $\sum_{\geq} b_n(\tilde{f})\, \partial_t u_n(x,\cdot)$ cvge normalem^t sur $]\varepsilon, +\infty[$ $\forall x \in [0,\pi]$.

Comme ε qq, S est dc dérivable sur $[0,\pi] \times \mathbb{R}_+^*$. En outre, les $b_n(\tilde{f})\, \partial_t u_n$ sont continues $[0,\pi] \times \mathbb{R}_+^*$.

La majorat° $(\ast\ast)$ est égalem^t indépendente de x et de t, ce qui assure la convergence normale sur $[0,\pi] \times [\varepsilon, +\infty[$ de $\sum b_n(\tilde{f})\, \partial_t u_n$.

Donc $\partial_t S$ est continue sur $[0,\pi]$

- On mq de m̂ $\partial_x S$ et $\partial_x^2 S$ existent, sont continues et se calculent par dv terme à terme, et dc la linéarité de l'eq de la chaleur assure que S vérifie $\mathcal{Y})iv)$.

Enfin, $\forall x \in [0,\pi]$, $S(x,0) = \sum_{n \geq 1} b_n(\tilde{f})\sin(nx)$ est la somme de la série de Fourier de $\tilde{f}$.

Comme $\tilde{f}$ continue et C^1 par morceaux, le thm de cvgence normale assure que

, $\forall x \in [0,\pi]$, $S(x,0) = f(x)$ c.a.d S vérifie 2)

Au final, $S \in K_f$

UNICITÉ

Soient u_1 et u_2 des élém' de K_f

Posons $u = u_1 - u_2$.

Remarquons que par linéarité de 1) (i'), $u \in K_0$

On df H sur $\mathbb{R}_+$ par $H(t) = \int_0^\pi u^2(x,t)\,dx$.

Comme u continue sur $[0,\pi] \times \mathbb{R}_+$, H est continue sur $\mathbb{R}_+$

d'existence et continuité de $\partial_t u$ sur $[0,\pi] \times \mathbb{R}_+^*$ assure que H est C^1

et $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$: $H'(t) = \int_0^\pi 2\,\partial_t u(x,t)\, u(x,t)\,dx$

$$= \int_0^\pi 2\,\partial_x^2 u(x,t)\, u(x,t)\,dx \qquad \text{grâce à } 1)(i')$$

Une intégration par parties et 1) (i') donnent alors

$$H'(t) = \left[2u(x,t)\,\partial_x u(x,t)\right]_0^\pi - 2\int_0^\pi (\partial_x u(x,t))^2\,dx$$

$$= -2\int_0^\pi (\partial_x u(x,t))^2\,dx \leq 0$$

Dc H est décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+$ et grâce à 2), H est nulle en 0

dc H identiquem' nulle ce qui prouve l'unicité.

Nous avons dc bien : $K_f = \left\{ \begin{array}{l} [0,\pi] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ (x, t) \mapsto \sum b_n(\tilde{f}) \sin(nx) \exp(-n^2 t) \end{array} \right.$ 3.

Développement 1 : **Leçon n°** 246 FORMULE SOMMATOIRE DE POISSON

<u>Théorème</u> : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ C^1 telle que $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ qd $|x| \to +\infty$. Alors, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2i\pi x}$ où $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\hat{f}(n) := \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi n t}$ est la transformée de Fourier de f.

<u>PREUVE</u> : Par hypothèse, comme $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ quand $|x| \to \infty$, $\exists M > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 1$, $|f(x)| \leq \frac{M}{x^2}$.

D'où, $\forall K > 0$, $\forall x \in [-K, K]$, $\forall n \in \mathbb{Z}, |n| \geq K+1 \Rightarrow |f(x+n)| \leq \frac{M}{(x+n)^2} \leq \frac{M}{(|n|-K)^2}$

Donc la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(\cdot + n)$ converge normalement sur tout compact. On note F sa limite simple.

De façon similaire on mq $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f'(\cdot+n)$ cv normalement sur tout compact, donc uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.

On peut donc appliquer le théorème de dérivation des séries de fonctions (f est C^1), F est donc de classe C^1 sur tout segment de $\mathbb{R}$ et donc sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $F'(x) = \sum f'(x+n)$.

De plus, soit $x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=-N}^{N} f(x+1+n) = \sum_{n=-N+1}^{N+1} f(x+n)$.

Donc en faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient $F(x+1) = F(x)$, F est donc 1-périodique.

Calculons les coefficients de Fourier de F :

Soit $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(F) = \int_0^1 F(t) e^{-2i\pi n t} dt = \sum_{N\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(t+N) e^{-2i\pi n t} dt$

$$= \sum_{N\in\mathbb{Z}} \int_N^{N+1} f(u) e^{-2i\pi n u} e^{2i\pi n N} du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2i\pi n u} du$$

$$= \hat{f}(n)$$

De plus, comme F est C^1 sur $\mathbb{R}$ et 1-per sa série de Fourier cv normalement vers F, on a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2i\pi n x}$.

⊠

Application : (Une égalité entre deux sommes)

$$\forall s>0, \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2/s}$$

PREUVE : Soit $\alpha>0$, on va appliquer la formule de Poisson à $f : x \longmapsto e^{-\alpha x^2}$.

Soit $n\in\mathbb{Z}$, $\hat{f}(n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-2i\pi n t} dt = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} e^{-2i\pi n \frac{u}{\sqrt{\alpha}}} du$

$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} I(n)$ où on pose $I(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} e^{-2i\pi x \frac{u}{\sqrt{\alpha}}} du$.

on va chercher une équation differentielle satisfaite par I.

- I est dérivable : Soit $h : (x,u) \longmapsto e^{-u^2} e^{-2i\pi x \frac{u}{\sqrt{\alpha}}}$

- $\forall x\in\mathbb{R}$, $h(x,\cdot)$ est $\mathcal{C}^1$ et intégrable (par comparaison avec l'intégrale de Gauss).
- $\forall (x,u)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial h}{\partial x}(x,u) = -\frac{2i\pi u}{\sqrt{\alpha}} e^{-u^2} e^{-2i\pi x \frac{u}{\sqrt{\alpha}}}$ existe et est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^2$.
- $\forall (x,u)\in\mathbb{R}^2$. $\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,u)\right| \leq \frac{2\pi u}{\sqrt{\alpha}} e^{-u^2}$ fonction majorante intégrable et independante de x.

Donc, par le thm de dérivation sous l'intégrale, I est dérivable et $\forall x\in\mathbb{R}$

$$I'(x) = -\frac{2i\pi}{\sqrt{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} u e^{-u^2} e^{-2i\pi x \frac{u}{\sqrt{\alpha}}} du.$$

- Calcul de I par IPP :

Soit $x\in\mathbb{R}$, $I(x) = \left[e^{-u^2} \frac{(-\sqrt{\alpha})}{2i\pi x} e^{-2i\pi x \frac{u}{\sqrt{\alpha}}} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} -2u e^{-u^2} \frac{(-\sqrt{\alpha})}{2i\pi x} e^{-2i\pi x \frac{u}{\sqrt{\alpha}}} du$

$$= 0 - \frac{\sqrt{\alpha}}{i\pi x} \int_{\mathbb{R}} u e^{-u^2} e^{-2i\pi x \frac{u}{\sqrt{\alpha}}} du$$

$$= \frac{-\sqrt{\alpha}}{i\pi x} \frac{\sqrt{\alpha}}{(-2i\pi)} I'(x) = \frac{-\alpha}{2\pi^2 x} I'(x) \Rightarrow I'(x) = -\frac{2\pi^2 x}{\alpha} I(x)$$

Donc $I(x) = I(0) \exp\left(-\frac{\pi^2 x^2}{\alpha}\right) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\pi^2 x^2}{\alpha}}$

Ainsi $\hat{f}(n) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{\pi^2 x^2}{\alpha}}$

on applique alors la formule de Poisson en 0 :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\alpha n^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\alpha}}$$

on pose $s = \frac{\alpha}{\pi} \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi n^2}{s}}$. $\boxtimes$

Ref : Gourdon "Analyse"