Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

Concours de recrutement du second degré

Rapport de jury

Concours : Agrégation externe

Section : Mathématiques

Session 2018

Rapport de jury présenté par : Thierry Goudon
Président du jury

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Ce rapport s'assigne pour objectifs :

— de rendre compte de l'esprit dans lequel les membres du jury ont travaillé pour cette session du concours de l'agrégation externe de mathématiques et de la manière dont ils ont abordé les épreuves. Plusieurs réunions de travail ont jalonné l'année pour préparer la session, confronter les différents points de vue, afin, au final, de dégager une approche commune des attentes et de leur évaluation. Ce travail préparatoire a aussi permis d'affirmer une attitude positive et bienveillante, cherchant à tirer le meilleur parti des connaissances et des qualités des candidats lors des épreuves ;

— d'établir un bilan de la session 2018 et restituer, au travers de quelques statistiques, la physionomie d'ensemble des candidats et des admis, en termes de profils et de performances. On retiendra que le concours reste marqué par une grande stabilité ;

— de commenter de manière détaillée chacune des épreuves.

Ainsi, ce rapport se veut avant tout un document utile aux futurs candidats, complément indispensable du programme du concours, afin de les aider à se préparer au mieux pour les épreuves qui les attendent. S'il mentionne des lacunes et défauts sur lesquels des efforts spécifiques mériteraient d'être faits, il cherche surtout à faire comprendre la nature des attentes, avec l'intention d'accompagner la préparation au concours. *Le jury considère que ce rapport, précis quant à ses attentes, l'engage dans son évaluation.* En particulier, il souhaiterait tenter de persuader les candidats

— que leur priorité doit résider dans l'acquisition d'un socle de connaissances solides,

— qu'il peut y avoir plusieurs manières d'obtenir d'excellents résultats,

— qu'il n'est absolument pas nécessaire de déborder des frontières du programme pour prétendre aux notes maximales,

— qu'il vaut mieux faire preuve de maîtrise sur une partie du programme que se mettre en perdition sur les notions les plus sophistiquées.

Il convient avant tout d'inspirer toute confiance quant à la solidité des bases, que ce soit par une rédaction efficace et convaincante à l'écrit, par des leçons calibrées et soignées ou une présentation mature à l'épreuve de modélisation. Le jury recommande donc aux candidats de tous profils, ainsi qu'aux centres de préparation et à leurs intervenants, de faire une lecture attentive de ce rapport et de bien tenir compte des prescriptions qui y sont faites.

Les candidats sont aussi invités à consulter le site officiel de l'agrégation externe de mathématiques, à l'adresse `http://www.agreg.org`, où se trouvent de nombreuses archives utiles et des renseignements pratiques concernant les sessions à venir. En particulier, les futurs candidats peuvent trouver sur ce site la `ClefAgreg` qui leur permettra de se familiariser avec l'environnement informatique qu'ils rencontreront pour l'épreuve de modélisation [1]. Enfin, le jury rappelle qu'une réunion publique est

1. Précisément, on trouvera à l'URL `http://clefagreg.dnsalias.org/8.0/` un guide décrivant de manière détaillée les étapes de construction de cette clef.

traditionnellement organisée en début d'année universitaire sous l'égide des sociétés savantes de mathématiques et d'informatique pour évoquer le bilan et les perspectives du concours.

Chapitre 2

Déroulement du concours et statistiques

2.1 Déroulement du concours

Le concours comprend deux épreuves écrites d'admissibilité — une composition de mathématiques générales et une composition d'analyse-probabilités — et trois épreuves orales d'admission : algèbre et géométrie, analyse et probabilités, modélisation. Les candidats ont le choix entre quatre options. Les options A, B, C ne diffèrent que par les épreuves de modélisation, respectivement probabilités et statistiques, calcul scientifique, algèbre et calcul formel, alors que les trois épreuves orales de l'option D (informatique) sont spécifiques. En effet, les épreuves d'admission de l'option D consistent en une épreuve de leçon de mathématiques (sur des thèmes d'algèbre-géométrie et d'analyse-probabilités), une épreuve de leçon d'informatique et une épreuve de modélisation, sur des sujets propres aux sciences informatiques. Comme dans les sessions précédentes, les nombres d'inscrits, d'admissibles et de reçus sont très similaires dans les trois premières options ; il est nettement inférieur dans l'option D. Le choix de l'option n'a pas d'influence sur la réussite au concours, ni sur le classement. Afin de ne pas donner prise à l'élaboration de quelque stratégie fondée sur une analyse biaisée et conjoncturelle, le jury ne publie pas de données sur la répartition des candidats et des lauréats par option. Par ailleurs le jury veille scrupuleusement dans l'élaboration du programme, la conception des sujets et la définition de ses attentes à ne privilégier aucune option. Le choix de l'option doit exclusivement être mis en cohérence avec la formation et les goûts des candidats ; chaque option ouvre des champs applicatifs des mathématiques qui trouveront à s'exprimer lors des épreuves et, au-delà, dans le futur métier du professeur agrégé.

Les épreuves écrites de l'agrégation externe de mathématiques 2018 se sont déroulées

- le jeudi 22 mars 2018 pour l'épreuve de mathématiques générales,
- le vendredi 23 mars 2018 pour l'épreuve d'analyse et probabilités,

et la liste d'admissibilité a été publiée le vendredi 18 mai 2018. Le concours fait l'objet de conventions internationales qui lient la France, le Maroc et la Tunisie : les sujets d'écrit servent aussi pour l'admissibilité aux agrégations de mathématiques en Tunisie et au Maroc ; les barres d'admissibilité pour les étudiants de ces deux pays sont au moins égales à celle de la barre fixée par le jury français.

Les épreuves d'admission se sont déroulées du mardi 19 juin au mercredi 4 juillet 2018. La liste d'admission a été publiée le jeudi 5 juillet 2018. Le professionalisme et le dévouement du personnel du Lycée Pasteur, qui a accueilli les épreuves orales, et des équipes du rectorat de l'académie de Lille ont offert au jury et aux candidats d'excellentes conditions de travail et une organisation performante ; leur diligence se doit d'être saluée.

Le concours externe de l'agrégation a pour vocation de recruter des professeurs agrégés destinés à exercer dans l'enseignement secondaire (lycées d'enseignement général et technologique et, exceptionnellement, collèges) ou dans l'enseignement supérieur (universités, instituts universitaires de technologie, grandes écoles, classes préparatoires aux grandes écoles, sections de techniciens supérieurs). Le jury estime donc que le niveau visé devrait permettre au professeur agrégé d'intervenir sereinement et efficacement sur le créneau « bac−3/bac+3 » ; cet objectif calibre la conception du programme et les critères d'évaluation.

Le programme et la nature des épreuves, écrites et orales, font l'objet de publications sur le site officiel de ministère de l'Éducation nationale http://www.devenirenseignant.gouv.fr. Le programme a évolué pour cette session 2018, visant à clarifier et préciser les attentes. Cette évolution s'est notamment traduite par l'introduction d'un nouveau chapitre « méthodes numériques », qui met en valeur les problématiques liées à la conception et à l'analyse d'algorithmes. Sur ce point, le jury rappelle qu'il peut être opportun et bienvenu d'illustrer les leçons par des connaissances spécifiques aux options, étant entendu que le choix de l'option est vu comme le reflet des goûts des candidats, et probablement de l'orientation de leur formation. Le chapitre consacré aux « distributions » a aussi été sensiblement revu ; le jury renvoie aux commentaires du rapport 2017 dont une annexe précisait les motivations et orientations sur ce point précis. En adoptant un point de vue résolument pratique, cette révision a permis de « démystifier » le sujet et un certain nombre de candidats se sont bien emparés de ces indications, à l'écrit — le sujet d'analyse évoquant la notion de solutions faibles d'équations différentielles — comme à l'oral où elles ont donné lieu à des développements originaux. Le jury veille, bien sûr, à respecter le programme. On peut estimer que des résultats « importants » manquent au programme ; les candidats restent libres d'en faire mention et de proposer des excursions hors des limites du programme. Ces allusions, si le jury sait bien sûr s'y adapter, ne sont absolument pas nécessaires pour prétendre aux notes maximales. Le jury préconise surtout de bien rester à un niveau que l'on maîtrise, une attitude qui sera toujours plus payante que de tenter d'éblouir par des énoncés plus sophistiqués alors que les bases restent friables. Pour la session 2019, seuls des aménagements relativement marginaux ont été apportés au programme. Ces évolutions concernent aussi la partie spécifique de l'option informatique, avec l'introduction de notions sur les bases de données. Ce programme 2019 est disponible à l'URL http://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agregation_externe/13/1/p2019_agreg_ext_maths_929131.pdf

Le jury conseille aux candidats de se préoccuper suffisamment tôt des questions liées à la gestion de leur carrière auxquelles ils seront confrontés en cas de succès au concours. Afin de les guider, l'inspection générale collecte les textes réglementaires relatifs aux différentes situations que les lauréats de l'agrégation externe peuvent rencontrer et édite une note indiquant les recommandations correspondantes http://igmaths.org/spip/spip.php?rubrique17. Le statut des doctorants agrégés suscitant régulièrement de nombreux questionnements, il convient d'attirer l'attention sur la note de service 2017-181 du 5 décembre 2017 http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=123836, qui concerne les possibilités de détachement des personnels enseignants des premier et second degrés, d'éducation et psychologues de l'éducation nationale auprès d'une administration ou d'un établissement public relevant de la fonction publique d'État, territoriale ou hospitalière, ou dans le monde associatif. Succèdant à la note de service 2016-174 du 15 novembre 2016 http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=108981, elle offre une possibilité dérogatoire à l'exigence de deux années d'exercice comme titulaire pour prétendre à un détachement pour les agrégés retenus sur un poste d'ATER. Toutefois, le détachement en tant qu'ATER, tout comme la disponibilité pour un post-doc, n'est pas de droit. Conformément à l'arrêté du 9 août 2004 portant délégation de pouvoirs du ministre chargé de l'éducation aux recteurs d'académie en matière de gestion des personnels enseignants, d'éducation, d'information et d'orientation de l'enseignement du second degré (20b de l'article 1er), ces décisions relèvent de la compétence du recteur de l'académie d'affectation des professeurs agrégés. Tout en étant pleinement conscient des enjeux de couverture des besoins d'enseignement, le jury regrette les nombreux refus opposés à de jeunes docteurs ou des doctorants en fin de thèse. Ces dispositions, dont la motivation à très court terme peut se comprendre, obèrent les perspectives des doctorants agrégés et sont susceptibles de gravement perturber le fonctionnement et l'attractivité des formations de l'enseignement supérieur en mathématiques, avec des conséquences qui peuvent s'avérer néfastes à plus long terme. Comme la préparation au concours de l'agrégation joue, traditionnellement, un rôle structurant majeur sur l'ensemble de ces formations, on peut craindre un impact négatif sur les parcours conduisant vers la recherche en mathématiques, alors que le pays excelle en ce domaine.

2.2 Commentaires généraux et statistiques sur la session 2018

2.2.1 Commentaires généraux

Après une période d'augmentation du nombre de postes ouverts au concours entre 2013 et 2017, la session 2018 est marquée par une réduction significative, avec 381 postes susceptibles d'être pourvus par cette voie de concours. Ce nombre retombe au niveau de recrutement ouvert en 2013. Il convient cependant de rappeler qu'un concours externe spécial, créé en 2017, réserve aussi 16 postes pour des titulaires d'un doctorat. Ce concours indépendant fait l'objet d'un rapport spécifique.

Année	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Postes ouverts	391	395	457	467	457	381
Concours spécial					15	16

Ce resserrement de l'offre reste confronté à un marché atone : la faiblesse du nombre de candidats « étudiants », auxquels ce concours devrait prioritairement s'adresser, en affecte la physionomie. Le fait que le nombre d'étudiants soit significativement moindre que le nombre de postes ouverts au concours, sans rien enlever aux mérites et aux qualités des candidats relevant d'autres catégories, ne peut être satisfaisant.

Admissibilité Au vu des résultats des deux épreuves d'admissibilité (Mathématiques générales et Analyse-Probabilités), 809 candidats ont été déclarés admissibles. Le premier admissible a une moyenne de 19,125 et le dernier une moyenne de 5/20. En dépit de la baisse sensible du nombre de postes ouverts au concours, le jury a maintenu une position adoptée depuis plusieurs années avec une barre et un nombre d'admissibles comparables aux pratiques des dernières années. En maintenant un rapport postes/admissibles proche de 0,5, le jury a décidé de privilégier la stabilité du concours afin de ne pas démobiliser les volontés dans un marché qui semble très fragile. Le jury souhaite ainsi se donner tous les moyens de pourvoir les postes ouverts au concours, et donner l'occasion aux candidats de compenser la faiblesse de ces résultats par des prestations d'oral convaincantes. Certains candidats parmi les plus mal classés des épreuves écrites parviennent à très bien se mettre en valeur lors des épreuves orales et on relève des « remontées » assez remarquables lors des épreuves d'admission : parmi les 150 premiers candidats du concours, on dénombre 5 candidats ayant une moyenne d'écrit inférieure à 8/20 et une bonne quinzaine des reçus avaient une moyenne inférieure à 6,875/20 aux épreuves d'admissibilité. Le jury estime aussi qu'avoir l'opportunité de se confronter à un oral exigeant peut jouer un rôle positif dans le parcours professionnel de certains candidats. Toutefois, en restant honnête sur le niveau des prestations écrites, cette position conduit aussi à déclarer admissibles des candidats dont les notes peuvent être considérées comme modestes et il n'est pas surprenant que des Universités, garantes de la qualité de leurs diplômes, n'aient pas jugé opportun de délivrer le M2 à une fraction des candidats admissibles.

La conception des sujets était guidée par la volonté de valoriser les candidats ayant investi dans une préparation sérieuse. On retrouvait donc dans les sujets des questions qu'on pourrait qualifier de « classiques », très certainement proches d'exercices qu'un titulaire de M2 a forcément traités durant sa formation universitaire. Aussi une partie des résultats de l'épreuve d'Analyse-Probabilités peut apparaître comme décevante. Le sujet comprenait en effet un certain nombre de questions qui, si elle ne peuvent sûrement pas être considérées comme « élémentaires », sont on ne peut plus standards : lemme des moments, lemme de Riemann-Lebesgue (en dimension 1 et 2), lemme de Dini, calcul de $\int_0^\infty e^{-st}\sin(\omega t)\mathrm{d}t$, *etc.* Il est impensable qu'un titulaire d'un M2, et *a fortiori* un préparationnaire au concours de l'agrégation, n'ait pas vu, sous une forme ou une autre, des énoncés de ce type, qu'on peut d'ailleurs retrouver dans certains développements à l'oral. Cependant, toutes les questions du sujet ont connu un taux de défections, où la question n'est pas du tout traitée, supérieur à 23% et la proportion de candidats incapables de marquer plus de 2 points sur 20 est de l'ordre de 1/4 (voir figure 2.2). Le sujet a donc éliminé de manière assez brutale une forte proportion de candidats. On peut attribuer une part de ces mauvais résultats à un défaut de préparation ; néanmoins, qu'une population de titulaires de M2 ne soit pas en mesure d'élaborer un début de réponse à de telles questions doit être considéré comme alarmant par toute personne concernée par l'enseignement de l'analyse. Hormis ce signal « extrême » sur les notes les plus basses en Analyse-Probabilités, les deux sujets ont fonctionné de manière très satisfaisante pour permettre de décider de l'admissibilité et faire apparaître une hérarchie claire.

Le jury a souhaité accorder une attention particulière à la qualité de la rédaction des copies ainsi que de la présentation. Un item spécifique du barème était dédié à cette compétence. La présentation, l'orthographe, la clarté de l'expression sont très contrastés et le jury a apprécié les copies qui manifestaient un effort en la matière. En effet, il est utile de rappeler aux candidats que les correcteurs disposent d'un temps limité pour la correction. Ajouter à cette tâche, effectuée en sus des journées de travail, la nécessité de déchiffrer mot à mot des copies, *a fortiori* lorsqu'elles sont longues, et parfois en s'y reprenant à plusieurs reprises, c'est courir un risque. Il est encore augmenté lorsque l'orthographe et la syntaxe sont approximatives, la présentation négligée. Il est bien sûr inutile de reproduire l'énoncé sur la copie et il ne sert à rien de recopier une réponse indiquée dans le sujet sans aucune étape intermédiaire du justification. Obtenir la note maximale à une question réclame de bien argumenter tous les points dans une question, sans escamoter aucune difficulté. Le jury valorise la capacité à synthétiser clairement sa pensée et à se concentrer sur l'essentiel, qualités qui ne sont malheureusement pas unanimement partagées : la longueur des réponses est parfois inversement proportionnelle au caractère sûr de la démonstration. La rédaction peut être concise ; il est surtout attendu qu'elle soit efficace, inspire confiance en me laissant aucun doute que les difficultés sont clairement identifiées et les conditions d'applications des énoncés utilisés bien vérifiées. Les copies qui remplissaient ce cahier des charge on été recompensées.

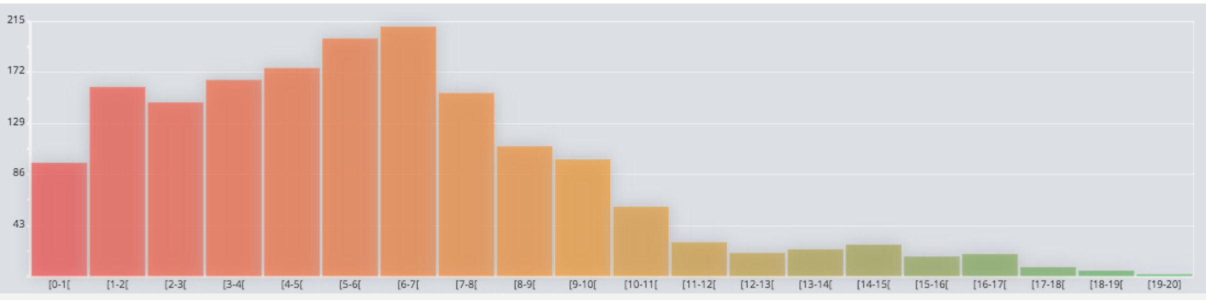


FIGURE 2.1 – Répartition des notes de l'épreuve écrite de mathématiques générales, agrégations France-Maroc-Tunisie

Admission Les candidats admissibles ont reçu une convocation par courrier, indiquant les trois jours de passage prévus pour leurs épreuves d'admission. Pour connaître les horaires précis d'interrogation, les candidats étaient invités à se connecter sur le site sécurisé de l'agrégation de mathématiques, en indiquant leur numéro de candidat : cette procédure permet de s'assurer de la volonté de participer aux épreuves. L'application a été fermée, comme les années passées, la veille du début des oraux. Les candidats qui n'avaient pas édité leurs horaires devaient, par défaut, se présenter à 6h30 le premier jour de leur convocation sur les lieux du concours, sous peine d'être déclarés non présents. Cette procédure bien établie sera reconduite l'an prochain.

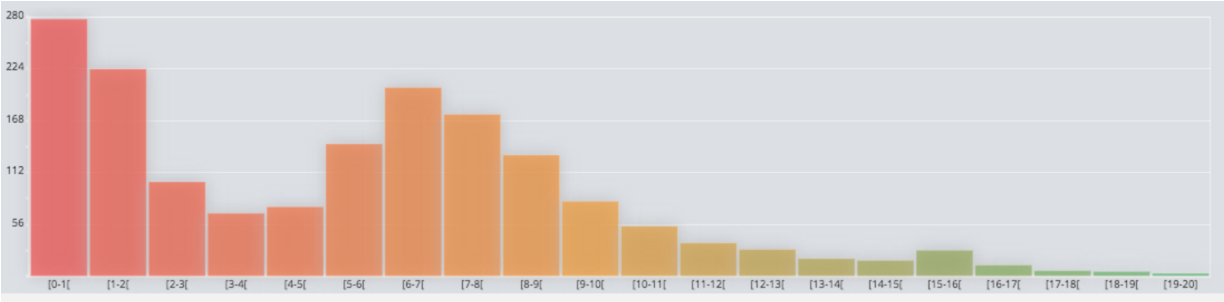


FIGURE 2.2 – Répartition des notes de l'épreuve écrite d'analyse et probabilités, agrégations France-Maroc-Tunisie

Évidemment le jury est vigilant aux risques de fraude. En particulier, tout moyen de communication ou tout support de stockage de données (téléphone, montre connectée, clef USB...) est strictement interdit lors des épreuves, écrites et orales, sous peine d'exclusion du concours.

Lors des passages des candidats, le jury ne dispose d'aucune information particulière : les notes d'écrit, les notes obtenues aux oraux précédents, le statut ou la profession, *etc.* demeurent inconnus des commissions d'évaluation. Le jury note selon les mêmes critères, avec une grille stricte commune à toutes les commissions, toutes les personnes à partir de leur seule prestation. Des tests statistiques sont faits très régulièrement pour guider l'harmonisation entre les commissions et la présidence du concours veille sur ces indicateurs. En outre, des réunions avec les secrétaires de commission permettent d'échanger sur la notation et de rester vigilant pour réduire les éventuels écarts dans l'évaluation. Le jury a la volonté d'accueillir les candidats de manière positive et bienveillante et cherche à valoriser toutes les connaissances, le travail de préparation et les aspects positifs des prestations des candidats.

Le jury rappelle que les épreuves d'admission d'un concours ont un caractère public. Ce principe général s'applique évidemment au concours de l'agrégation de mathématiques et les candidats ne peuvent s'opposer à la présence d'auditeurs (ce qui serait quelque peu paradoxal pour des candidats à des fonctions d'enseignant). En moyenne, le concours a accueilli plus de 100 visiteurs par jour. Le jury incite très fortement les futurs candidats et les préparateurs à venir assister aux épreuves et à s'appuyer sur cette expérience pour se préparer au mieux aux épreuves ; c'est un investissement qui ne peut être que payant.

À l'issue des épreuves orales, 315 candidats ont été déclarés admis ; le premier admis a eu une moyenne de 19,35/20, le dernier admis une moyenne de 8,1/20. Si, comme les années passées, le jury n'a pas attribué l'ensemble des postes ouverts au concours, on notera toutefois que le nombre de reçus est en légère augmentation, alors que le nombre de postes ouverts connaissait une réduction significative. Ce résultat est la marque de la grande stabilité du concours, la barre d'admission est inchangée depuis 2015 et le nombre de lauréats varie peu depuis la session 2016. Compte tenu du relativement faible nombre de candidats issus des préparations universitaires, le jury se réjouit de cette stabilité, qui ne fait, bien entendu, aucune concession à la qualité des reçus.

Le jury rappelle qu'un concours n'est pas un examen : le but n'est pas de valider des connaissances. Les notes attribuées ne sont pas des jugements de valeur sur les candidats et n'ont aucun caractère « absolu » ; il ne s'agit que de discriminer au mieux une population donnée dans un contexte donné et à un instant donné. Toute la plage de notes de 0 à 20 est utilisée. Il en résulte que des candidats peuvent recevoir des notes très basses ; elles ne sont que le reflet d'une prestation dans ce contexte particulier. Elles n'enlèvent rien à l'estime que le jury porte aux efforts de préparation des candidats, ne préjugent rien de leurs qualités humaines ou professionnelles. Notamment, pour les nombreux professeurs certifiés qui se présentent courageusement à ce concours difficile, les notes ne préfigurent rien quant à la qualité de leurs enseignements au quotidien. Le jury est tout à fait conscient des efforts faits pour hausser leur niveau et est persuadé que l'immense majorité d'entre eux mène un excellent travail dans les classes.

Le jury insiste sur le fait qu'il convient de passer toutes les épreuves. Tous les ans, on déplore l'abandon de candidats qui étaient en position d'être reçus. Les sentiments de frustration à l'issue d'une interrogation et la fatigue ne peuvent être négligés. Mais ils ne doivent pas prendre le pas sur l'engagement dans le concours ; le jury encourage les candidats à se présenter aux épreuves suivantes et à s'investir jusqu'au terme du concours. Même en cas d'échec, quelque cuisant qu'il soit, la participation à l'ensemble des épreuves reste une expérience inestimable dans le cadre d'un projet d'insertion, de réorientation ou de progression professionnelle.

Les moyennes et écarts-types des présents à l'oral sur les différentes épreuves sont résumés dans les tableaux ci-dessous :

	Oral Alg-G	Oral Ana-P	Oral Mod	Ecrit MG	Ecrit AP
moyenne	8,6	8,7	8,0	8,7	8,8
écart-type	4,5	4,9	4,6	3,5	3,3

Moyennes et écarts-types des candidats présents à l'ensemble des épreuves

	Oral Alg-G	Oral Ana-P	Oral Mod	Ecrit MG	Ecrit AP
moyenne	11,8	12	11	11	10,7
écart-type	3,6	4	4,1	3,3	3,3

Moyennes et écarts-types des candidats admis

Ces données offrent l'opportunité de rappeler le conseil de ne négliger aucune des épreuves. Les épreuves de leçons et l'épreuve de modélisation mettent en valeur des qualités, techniques et pédagogiques, différentes. L'épreuve de modélisation, avec un temps d'exposé « libre » conséquent, donne beaucoup d'autonomie au candidat. Elle requiert des capacités de synthèse importantes puisque les textes font appel à des notions présentes dans l'ensemble du programme et mettent les énoncés « en situation ». De plus, il est souvent valorisant de savoir illustrer sur ordinateur un propos mathématique et des candidats en tirent partie pour produire des prestations originales et scientifiquement profondes. Mais, cette compétence ne s'improvise pas ; elle réclame un minimum de préparation, qui est rapidement payant. De manière générale, les épreuves orales demandent une certaine pratique et la manifestation d'un certain recul scientifique, qui ne peuvent résulter que d'un travail préparatoire de fond. Il semble au jury que l'assimilation entre les épreuves d'admissibilité et les épreuves orales de cette pratique et de ce recul est illusoire ; il est sûrement profitable de s'exercer au concours dans son ensemble tout au long de l'année, une partie des exercices proposés à l'écrit se rapprochant d'ailleurs de questions posées à l'oral et le recul gagné dans la préparation à l'oral ne pouvant être que bénéfique aux prestations écrites.

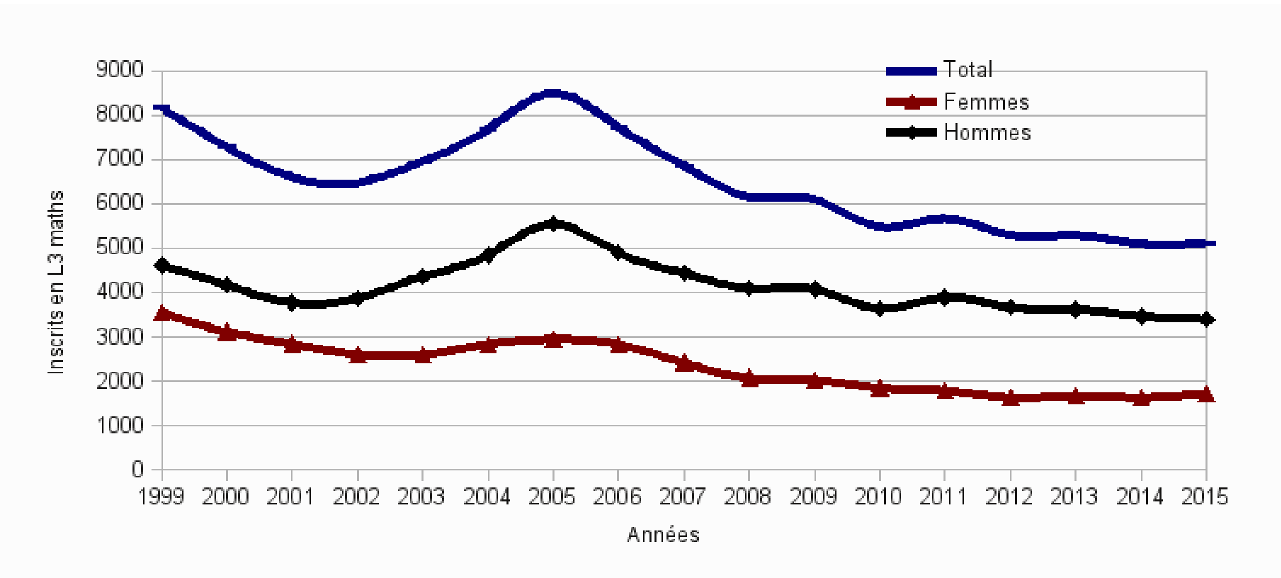
On résume dans le tableau ci-dessous l'évolution des barres d'admission depuis 2008 :

Année	Nombre de postes attribués	Barre d'admission
2018	315	8,1/20
2017	305	8,1/20
2016	304	8,1/20
2015	274	8,1/20
2014	275	8,48/20
2013	323	7,95/20
2012	308	8,1/20
2011	288	9,33/20
2010	263	9,8/20
2009	252	10,15/20
2008	252	10,1/20

Le recrutement de professeurs agrégés de mathématiques obéit à des critères de qualités scientifiques et pédagogiques, afin que les personnels recrutés soient en mesure de répondre efficacement aux missions actuellement fixées aux agrégés qui sont de pouvoir exercer sur l'ensemble du créneau « bac−3/bac+3 ». Pour cette session, le minimum requis correspond à un score total de 162/400. Il correspond à la barre retenue sur les trois dernières années, avec un nombre de reçus tout à fait comparable. Cette stabilité du concours est encourageante et montre, avec les excellentes prestations de la tête du concours, le maintien du niveau des formations universitaires. Le tableau suivant donne une indication sur la répartition des notes. On observera aussi que 186 candidats ont une moyenne supérieure ou égale à 10/20, une donnée à mettre en regard des conclusions des sessions 2008 et 2009 où les 252 admis avaient franchi cette note moyenne.

Rang	Moyenne
1	19,35
1-10	19,35–17,5
10-50	17,5–14,35
50-100	14,35–12
100-200	12–9,75

Réussir le concours de l'agrégation externe requiert un minimum de préparation et cette stabilité repose d'abord sur l'engagement et la qualité des formations universitaires. L'impossibilité de pourvoir les postes témoigne de l'insuffisance patente et préoccupante d'une population étudiante souhaitant s'orienter vers l'enseignement des mathématiques, puisqu'on compte seulement 250 candidats environ issus des préparations universitaires. Cette faiblesse du vivier résulte de la combinaison d'une réduction des effectifs inscrits en L3 de mathématiques,



Évolution des effectifs inscrits en L3 de mathématiques (source IGEN)

et de la diversification des débouchés des études universitaires en mathématiques, qui dépassent largement le seul emploi académique puisque trois diplômés d'un Master en mathématiques sur quatre travaillent dans le secteur privé (Source : Étude de l'impact socio-économique des mathématiques en France, étude menée en 2015 par CMI).

Dans cette configuration particulière, le concours externe peut offrir une réelle opportunité de promotion pour des professeurs certifiés. Déplorer la faiblesse du vivier de candidats étudiants n'empêche pas le jury d'être particulièrement respectueux des efforts des enseignants en poste dans le secondaire qui se confrontent à ce concours. Ils forment de très loin la catégorie la plus importante parmi les inscrits et représentent 30% des admissibles environ. On note toutefois une baisse sensible du nombre de certifiés inscrits et admissibles par rapport à 2017 (environ 160 et 60 candidats de moins, respectivement). Il est possible que cette baisse soit imputable à la suppression du statut de « bi-admissible », statut qui marquait la reconnaissance d'efforts de formation, recompensait une progression manifeste du niveau des connaissances et des compétences et qui pouvait constituer une motivation pour un certain nombre d'entre eux. Le jury n'a nul doute que l'immense majorité de ces certifiés est certainement constituée d'excellents enseignants de mathématiques, même si les résultats obtenus à ce concours leur semblent parfois ne pas être à la hauteur de leur investissement. Il est clair pour le jury que l'on ne peut pas être admissible et se présenter aux épreuves orales de ce concours sans avoir acquis des compétences techniques qui dépassent largement celles de la pratique professionnelle de l'enseignant certifié. Cependant, le niveau d'exigence technique du concours et le défaut de préparation d'une forte proportion d'entre eux leur laisse le concours difficile d'accès. Le jury souhaite accueillir chaleureusement ces collègues méritants et, même si les résultats sont en-deçà de leurs espoirs, leur renouvelle tous ses encouragements. Alors qu'un volume de près de 1500 enseignants s'inscrit à un concours aussi exigeant et qu'un certain nombre de rapports médiatisés pointent l'importance des mathématiques pour la formation du citoyen du XXIème siècle, les moyens consacrés à la formation continue restent trop faibles ; le nombre de congés formation mériterait d'être mieux accordé à cette manifestion d'une réelle volonté de progression.

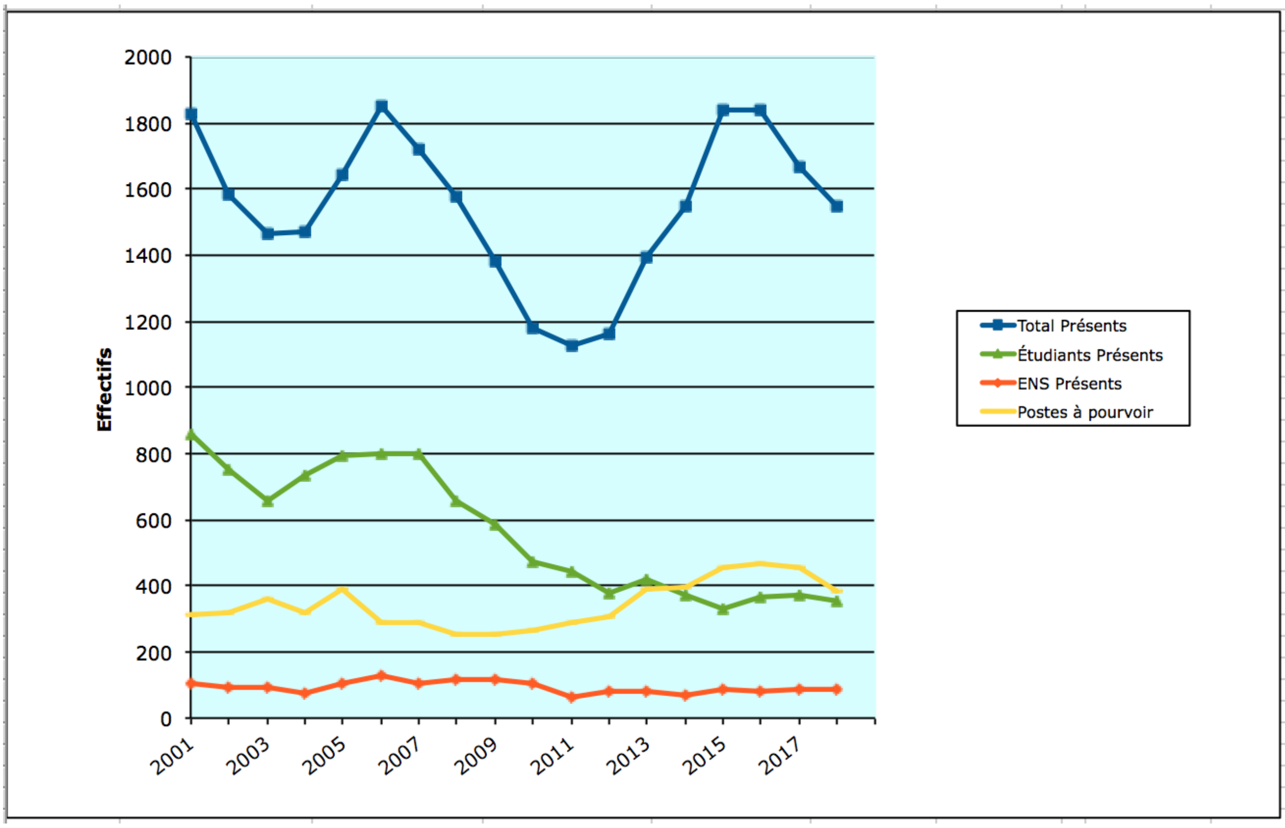
2.2.2 Données statistiques diverses

Les tableaux et graphiques suivants présentent un bilan statistique du concours, selon le statut des candidats, leur diplôme, leur genre, leur origine géographique, leur âge. Ces statistiques portent sur les candidats qui peuvent être admis au concours et n'incluent pas les étudiants marocains et tunisiens.

Effectifs détaillés On observe un tassement sensible du nombre des inscrits et des présents. Le nombre d'étudiants reste stable, tout comme celui des candidats normaliens. Le jury rappelle son attachement à la justification historique commune aux écoles normales, et le contrat implicite de leurs élèves qui était, en contrepartie de leur statut privilégié et de leur rémunération, de passer l'agrégation (source : Rapport public de la Cour des comptes 2012). Leur participation contribue au rôle structurant du concours sur les formations universitaires en mathématiques et à l'excellence de la discipline au niveau international.

Année	Total Inscrits	Total Présents	Etudiants Présents	ENS Présents	Postes à pourvoir	Présents par poste
2001	2663	1828	857	105	310	5,9
2002	2343	1584	753	95	320	5,0
2003	2217	1463	657	93	360	4,1
2004	2333	1470	735	76	321	4,6
2005	2560	1644	795	105	388	4,2
2006	2849	1853	800	129	290	6,4
2007	2801	1722	800	106	290	5,9
2008	2491	1579	659	119	252	6,3
2009	2351	1384	585	116	252	5,5
2010	2332	1177	474	106	263	4,5
2011	2500	1124	445	62	288	3,9
2012	2673	1163	379	82	308	3,8
2013	2673	1393	420	81	391	3,6
2014	3001	1546	371	72	395	3,9
2015	3252	1841	328	89	457	4,0
2016	3525	1841	364	78	467	3,9
2017	3582	1668	374	86	457	3,6
2018	3285	1545	352	89	381	4,1

Évolution du nombre de présents aux deux épreuves d'écrit



Courbes de l'évolution des effectifs

Professions et Diplômes

Profession	Inscrits	Présents	Composés	Admissibles	Oral	Admis
CERTIFIE	1414	683	649	245	135	9
ETUD.HORS ESPE (PREPA MO.UNIV)	335	298	298	257	239	162
SANS EMPLOI	283	89	86	46	39	22
CADRES SECT PRIVE CONV COLLECT	164	35	33	17	13	3
ENS.STAGIAIRE 2E DEG. COL/LYC	146	63	60	20	18	3
CONTRACTUEL 2ND DEGRE	145	40	39	10	8	1
ETUD.HORS ESPE (SANS PREPA)	109	56	54	46	41	20
ELEVE D'UNE ENS	100	89	89	89	88	84
PERS ENSEIG TIT FONCT PUBLIQUE	53	19	18	5	3	1
PLP	51	24	22	5	5	
SALARIES SECTEUR TERTIAIRE	40	11	10	7	4	
ETUDIANT EN ESPE EN 2EME ANNEE	37	13	11	6	4	
SALARIES SECTEUR INDUSTRIEL	37	1	1	1	1	
ENSEIGNANT DU SUPERIEUR	36	11	10	5	5	1
ETUDIANT EN ESPE EN 1ERE ANNEE	30	12	12	7	5	1
PROFESSIONS LIBERALES	25	7	7	2	1	
PERS FONCTION PUBLIQUE	23	6	6	2	2	1
PROFESSEUR ECOLES	22	3	2			
ETUD.HORS ESPE (PREPA CNED)	21	12	9	6	6	1
MAITRE CONTR.ET AGREE REM TIT	21	9	9	4	2	
FORMATEURS DANS SECTEUR PRIVE	19	8	7	4	3	
AGREGE	18	8	8	6	4	2
FONCT STAGIAIRE FONCT PUBLIQUE	14	8	8	4	3	2
PROFESSEUR ASSOCIE 2ND DEGRE	13	3	3			
MAITRE AUXILIAIRE	13	8	6			
AG NON TITULAIRE FONCT PUBLIQ	12	4	4	3	3	
CONTRACT ENSEIGNANT SUPERIEUR	11	5	5	4	3	1
VACATAIRE ENSEIGNANT DU SUP.	10	3	3	3		
ADJOINT D'ENSEIGNEMENT	10	1	1	1	1	1
VACATAIRE DU 2ND DEGRE	10	1	1			
ENSEIG NON TIT ETAB SCOL.ETR	9	1	1	1	1	
ASSISTANT D'EDUCATION	8	4	4			
INSTITUTEUR	7					
ARTISANS / COMMERCANTS	6	2	2			
PERS ENSEIG NON TIT FONCT PUB	5					
PEPS	4	1	1			
ETUD.HORS ESPE (PREPA PRIVEE)	3	1				
PERSONNEL DE DIRECTION	2					
AG NON TIT FONCT TERRITORIALE	2					
CONTRACTUEL APPRENTISSAGE(CFA)	2	1	1			
MILITAIRE	2	2	2	2	2	1
CONTRACTUEL FORMATION CONTINUE	2	1	1	1	1	
PROF DES ECOLES STAGIAIRE	2					
VACATAIRE APPRENTISSAGE (CFA)	1					
PERS FONCT HOSPITAL	1					
PERSONNEL D'INSPECTION	1					
MAITRE DELEGUE	1					
VACATAIRE FORMATION CONTINUE	1					
PERS FONCT TERRITORIALE	1					
EMPLOI AVENIR PROF.2ND D.PUBLI	1					
MAITRE CONTR.ET AGREE REM MA	1	1	1			
PEGC	1	1	1			

Résultat du concours par catégories professionnelles [1]

Outre la présence massive d'enseignants certifiés, déjà évoquée, on remarque l'attractivité du concours auprès de titulaires d'un diplôme d'ingénieur. Cette donnée confirme les observations du concours docteurs, et un phénomène qui s'inscrit tant dans le cadre de projets de reconversion professionelle, que d'une orientation en fin de formation.

1. Les catégories professionnelles et les catégories par diplômes listées correspondent aux déclarations des candidats lors de l'inscription : elles ne font l'objet d'aucune vérification et doivent être considérées avec prudence.

Diplôme	Inscrits	Présents	Composés	Admissibles	Oral	Admis
MASTER	1539	845	818	517	449	282
ENSEIGNANT TITUL-ANCIEN TITUL CAT A	565	268	256	96	52	3
DIPLOME D'INGENIEUR (BAC+5)	504	195	185	89	68	16
DOCTORAT	238	71	70	42	27	7
DIP POSTSECONDAIRE 5 ANS OU +	125	57	51	17	11	
DIPLOME GRANDE ECOLE (BAC+5)	124	38	37	25	20	8
GRADE MASTER	73	30	29	13	10	
DISP.TITRE 3 ENFANTS	73	28	27	6	2	
ADMIS ECH.REM.CERTIFIE PLP PEPS	23	9	8	2	1	
DIPLOME CLASSE NIVEAU I	19	4	4	2		
CPE TITULAIRE - ANCIEN TITULAIRE	1					
ADMIS ECH.REM PROFESSEUR ECOLE	1					

Diplômes des candidats hors étudiants tunisiens et marocains

Répartition selon le genre La répartition hommes/femmes reste déséquilibrée : les femmes ne représentent que 23% des candidats ayant dépassé la barre d'admission, alors qu'elles constituaient 26,6% des admissibles et 30% des présents aux épreuves écrites. On trouve 4 femmes parmi les 20 premiers (dont la seconde du concours). Le taux de réussite à l'oral est de 52% pour les hommes, 45% pour les femmes. Toutes ces données sont très similaires à celles de la session 2017. La correction des épreuves écrites se fait de manière totalement dématérialisée et le jury ne dispose d'absolument aucune information sur les candidats : il n'a accès à ce moment-là qu'aux copies repérées par un numéro. Il est donc difficile d'imaginer quelle mesure pourrait permettre d'identifier et corriger un éventuel biais, pour autant qu'il y en ait un dans cette étape du concours.

Le jury, composé de plus de 47% de femmes (bien au delà des taux dans les différents corps dont sont issus les membres du jury) a mis en place des processus de veille sur les enjeux de parité et s'est interrogé en permanence sur ses pratiques afin de chercher à éliminer les biais susceptibles de s'introduire dans l'évaluation.

Age	Inscrits	Présents	Composés	Admissibles	Oral	Admis
Homme	2274	1079	1032	594	477	244
Femme	1011	466	453	215	163	72

Répartition selon le genre

Répartition selon l'âge Le tableau de répartition des candidats suivant l'âge indique que l'essentiel des admis agrégation externe se regroupe dans la tranche 22-25 ans.

Age	Inscrits	Présents	Composés	Admissibles	Oral	Admis
21	7	5	5	4	4	4
22	40	37	37	36	36	30
23	185	170	168	156	150	110
24	180	134	131	105	101	76
25	162	100	100	65	58	28
26	120	57	55	32	27	17
27	159	74	71	30	24	9
28	130	57	53	21	14	8
29	125	53	50	21	20	5
30	126	52	50	21	15	5
31	119	42	39	14	10	3
32	115	39	38	15	7	1
33	100	35	32	13	9	2
34	89	29	27	12	6	1
35	93	49	49	25	16	
36	111	38	37	18	13	2
37	85	31	31	13	8	
38	82	36	34	17	11	2
39	94	41	39	15	8	
40	94	41	38	19	11	1
41	93	32	32	12	5	1
42	79	37	35	12	6	1
43	74	25	22	8	1	
44	97	39	38	20	9	1
45	101	38	35	13	7	1
46	62	27	26	13	10	2
47	79	33	30	16	10	
48	67	27	25	7	4	
49	52	25	25	8	6	
50	55	22	21	11	6	2
51	51	17	15	3	2	
52	45	17	17	4	4	1
53	37	14	13	4	4	
54	41	17	17	6	3	
55	30	15	15	5	4	
56	22	8	7	2	2	
57	13	6	6	2	1	
58	15	7	6	3	1	1
59	15	5	4	2	2	1
60	14	6	6	3	3	
61	10	2	2	1		
62	5	2	1	1	1	1
63	2	1	1	1	1	
64	2	1	1			
65	2	1				
66	5	1	1			
67	1					

Tableau de répartition des candidats en fonction de l'âge

Répartition selon l'académie Le tableau de répartition des candidats par académie montre une forte concentration sur les centres Paris-Créteil-Versailles, Rennes et Lyon. Hormis ces sièges d'Écoles Normales Supérieures, on relèvera les bons taux de réussite (admis/admissibles) des académies de Grenoble et Strasbourg.

Academies	Inscrits	Présents	Composés	Admissibles	Oral	Admis
CRETEIL-PARIS-VERSAIL.	916	422	401	222	178	88
NICE	198	45	38	16	11	5
LYON	188	105	102	68	58	35
LILLE	164	95	93	38	30	9
RENNES	151	96	94	72	65	49
AIX-MARSEILLE	147	67	60	30	18	6
TOULOUSE	134	65	64	41	34	15
MONTPELLIER	116	56	55	26	13	5
GRENOBLE	112	61	56	39	30	19
POITIERS	112	26	26	10	8	3
NANTES	108	49	46	24	21	11
STRASBOURG	95	53	53	38	30	19
NANCY-METZ	87	44	43	21	17	9
ORLEANS-TOURS	87	41	40	22	17	4
BORDEAUX	85	38	38	24	17	5
ROUEN	79	39	38	16	11	4
LA REUNION	72	23	21	7	5	
AMIENS	70	33	32	17	14	6
REIMS	53	26	26	13	13	6
DIJON	47	19	19	11	9	3
CAEN	42	27	27	16	12	7
CLERMONT-FERRAND	42	26	26	10	6	2
MARTINIQUE	34	17	17	7	4	
GUADELOUPE	33	10	9	3	3	
BESANCON	27	21	21	10	9	5
POLYNESIE FRANCAISE	19	8	8	2	2	
LIMOGES	16	5	5	1	1	
GUYANE	15	10	10	1		
MAYOTTE	15	6	5	1	1	
NOUVELLE CALEDONIE	14	9	9	2	2	1
CORSE	7	3	3	1	1	

Répartition par académie

Les sociétés savantes collectent des informations sur les volumes horaires consacrés aux préparations selon les universités ; ces données révèlent de très grandes disparités (en rapport avec le nombre d'étudiants et le nombre d'options préparées), avec un nombre d'heures annuelles consacrées à la préparation au concours qui varie de 300 à plus de 1200 ! À ces différences de volume horaire s'ajoute la faiblesse des effectifs présents dans certaines préparations, alors que l'émulation et le travail en groupe jouent souvent un rôle important dans le succès des formations. À cet égard, l'incorporation dans les préparations de candidats du concours spécial réservé aux docteurs peut être un stimulant efficace.

Les préparations doivent étudier l'évolution sur plusieurs années de leur taux de réussite au concours, certains résultats pouvant être purement conjoncturels. La mise au point d'un programme de préparation est un processus dynamique, exigeant, qui se fait en lien étroit avec l'élaboration des maquettes des formations et qui réclame de suivre les évolutions du concours. Le jury rappelle aussi aux candidats comme aux préparateurs que les épreuves orales sont publiques et que venir assister à des interrogations permet certainement de bien appréhender les attendus et les difficultés des épreuves.

Chapitre 3

Épreuve écrite de mathématiques générales

Le sujet est disponible à l'URL http://www.devenirenseignant.gouv.fr/cid111368/sujets-et-rapports-des-jurys-agregation-2017.html ou sur le site http://www.agreg.org.

3.1 Commentaires sur l'épreuve écrite de Mathématiques Générales

3.1.1 Commentaires généraux

Commentaire mathématique sur le sujet

La théorie de GALOIS « usuelle » classifie les équations algébriques à l'aide de groupes et même, dans l'optique originelle de GALOIS (qui revient actuellement en vogue), d'*actions* de groupes (voir [1]). La théorie de GALOIS « différentielle » étudie les équations différentielles (linéaires, complexes, analytiques,...) à l'aide de *représentations linéaires* de groupes.

À l'origine, RIEMANN remarque que l'on peut classifier une large classe d'équations différentielles (dont beaucoup de celles qui proviennent de la physique) par leurs *matrices de monodromie*, qui codent l'effet sur leurs solutions du prolongement analytique le long des lacets entourant leurs points singuliers. Plus tard, HILBERT traduira ce codage en termes de représentation matricielle du groupe fondamental : c'est la *représentation de monodromie*. Le *groupe de monodromie* associé à une équation différentielle d'ordre n est l'image de cette représentation, c'est le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ engendré par les matrices de connexion. [1]

La fin du XIX^{e} siècle et le début du XX^{e} voient une tendance à l'algébrisation de nombreuses théories nées dans l'analyse complexe, tout particulièrement dans l'œuvre de RIEMANN ; la géométrie algébrique en est certainement l'exemple le plus frappant. PICARD et VESSIOT, dans l'esprit de la théorie de GALOIS (telle que nous la connaissons, c'est-à-dire telle qu'elle avait été reformulée par JORDAN, DEDEKIND,...) considèrent le corps engendré par les solutions d'une équation différentielle et le groupe des automorphismes de ce corps qui d'une part ont un effet trivial sur les coefficients, d'autre part commutent à la dérivation : ils conservent donc les relations différentielles et agissent linéairement sur l'espace des solutions, qui est de dimension finie d'après le théorème de CAUCHY. Le groupe ainsi obtenu, nommé *groupe de* PICARD-VESSIOT ou *groupe de* GALOIS *différentiel* peut être réalisé comme sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ (et même comme sous-groupe « algébrique », c'est-à-dire défini par des conditions

1. Pour des précisions sur ces énoncés et sur toute cette histoire, consulter [2] qui est, dans l'esprit, proche du sujet, ou bien [3] qui est beaucoup plus complet.

polynomiales sur les coefficients de leurs éléments). Le groupe de monodromie s'y plonge naturellement.

De même que les groupes de monodromie sont paramétrés par les représentations dont ils sont l'image, représentations d'un même groupe fondamental, on a voulu plus récemment paramétrer les groupes de GALOIS différentiels par les représentations d'un groupe universel : c'est l'approche « tannakienne » ; le lien entre ce groupe universel et le groupe fondamental, qui en est un sous-groupe, exprime alors de manière condensée toutes les relations entre les aspects algébriques (PICARD-VESSIOT) et les aspects transcendants (RIEMANN-HILBERT) de la théorie.

Contenu du problème

Pour simplifier les aspects topologiques et analytiques du problème, on a choisi de se restreindre à l'étude locale en 0 des équations (le groupe fondamental concerné est alors celui de $\mathbf{C}^*$, donc $\mathbf{Z}$, dont les représentations sont aisément décrites !) ; et de n'aborder que des équations à coefficients constants, ce qui permet d'exprimer explicitement toutes leurs solutions à l'aide de l'exponentielle et du logarithme complexes. Même ainsi restreinte, la théorie présente des aspects assez riches pour permettre d'occuper un agrégatif six heures, et plus. Il reste tout de même *quelques* aspects topologiques et analytiques, ce qui ne devrait pas être ressenti comme insupportable dans une épreuve de mathématiques *générales*.

Deux autres simplifications de la théorie ont été mises à profit : depuis BIRKHOFF, on ramène (par un procédé bien connu des étudiants en licence) une équation scalaire d'ordre n à une équation vectorielle $X' = AX$, où A est une matrice carrée : ceci met en avant le rôle de l'algèbre linéaire matricielle (en particulier la décomposition de DUNFORD, l'exponentielle de matrices, etc) ; et, depuis quelques décennies, on préfère l'algèbre engendrée par les solutions au corps correspondant. Outre les outils cités, les groupes et leurs représentations ainsi que les polynômes à plusieurs variables interviennent dans la théorie, ce qui en fait un agréable terrain de jeu pour un agrégatif.

Les exercices de la partie I permettent d'évaluer la compréhension par les candidats de quelques faits fondamentaux qui serviront par la suite, presque tous bien connus (ou qui devraient l'être) ; mais aussi de tester leur capacité à rédiger clairement une démonstration simple, expliciter et vérifier des hypothèses, définir de façon non ambiguë un objet mathématique... La partie II adapte la décomposition de DUNFORD aux matrices inversibles et aborde les fonctions matricielles. La partie III établit la surjectivité de l'exponentielle de matrices $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ (ce qui servira par la suite à montrer que toute représentation de $\mathbf{Z}$ est une représentation de monodromie). Ensemble, les parties I, II et III portent sur le cœur de métier de l'agrégatif.

La partie IV étudie l'indétermination de z^A, $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$, donc la monodromie de l'équation $X' = AX$; l'indétermination provient ici de l'indétermination du logarithme complexe, ce qui remplace dans notre cas le prolongement analytique. La partie V aborde des raisonnements typiques d'algèbre différentielle (usage de la dérivation pour prouver des relations d'indépendance algébrique), bien entendu sous une forme élémentaire et entièrement auto-contenue, et les applique à une première approche de la représentation de PICARD-VESSIOT. La partie VI poursuit cette étude et fait le lien avec la représentation de monodromie de la partie IV.

Commentaires généraux sur les copies

Presque tous les candidats ont abordé, avec plus ou moins de bonheur, les trois premières parties et beaucoup se sont alors attaqués à l'une des trois dernières (majoritairement la partie IV), mais la plupart pour s'y livrer à un grapillage peu rentable. Il faut noter qu'un candidat au moins a traité tout le sujet, et ce dans une copie clairement et agréablement rédigée.

De manière générale, la présentation des copies est soignée et beaucoup sont convenablement rédigées, quoique, curieusement, pas toujours dès le début : peut-être le temps incompressible de l'échauffement ? Il est alors décevant de rencontrer, dès le début d'une copie, des arguments bâclés alors qu'on attend du rédacteur qu'il profite de ce premier contact pour se présenter. Le manque de rigueur se manifeste au niveau des notations (qui doivent être cohérentes et compatibles avec celles de l'énoncé) et de la structuration logique. Ces qualités (soin, rigueur, clarté) influent bien évidemment sur la note. Autre regret : l'orthographe est trop souvent malmenée, ce qui est tout de même gênant pour de futurs enseignants.

L'énoncé comportait beaucoup d'indications, ce qui a parfois conduit les candidats à le paraphraser sans apporter leurs propres arguments ; à l'inverse, certaines questions ouvertes les ont décontenancés et ont pu les conduire à se lancer dans toutes sortes de directions imprévues. Dans les deux cas, on attend de l'agrégatif qu'il soit en mesure de *juger* ce qui est important dans une preuve, dans un énoncé, et cela ne peut reposer que sur un travail de *réflexion* (et non seulement de maîtrise technique) tout au long de l'année de préparation.

3.1.2 Commentaires détaillés sur les diverses questions

Exercices préliminaires

Exercice n° 1

Cet exercice a été traité dans presque toutes les copies et, en général, correctement. L'erreur la plus répandue consiste à croire que, dans la décomposition de Dunford $A = D + N$ d'une matrice triangulaire, D est nécessairement la partie diagonale de A (une erreur voisine fréquemment rencontrée est l'identification de « nilpotente » avec « triangulaire supérieure stricte ») ; comme cela ne marche pas ici lorsque $a \neq 1$, un nombre non négligeable de candidats a conclu à l'absence de décomposition de Dunford alors que l'introduction du problème (sans parler de la connaissance du programme !) impliquait clairement le contraire. Ici, la difficulté mathématique est faible, c'est bien la capacité de réflexion qui est en cause.

Exercice n° 2

Cet exercice a été traité dans presque toutes les copies, mais pas très bien. Un calcul formel (purement algébrique) ne pouvait suffire puisqu'une somme infinie (donc un passage à la limite) est en jeu. Plus qu'une démonstration délayée de la formule $(PAP^{-1})^k = PA^kP^{-1}$ à l'aide d'une lourde récurrence, on attendait la justification du passage à la limite par un argument de continuité. Les candidats qui ont éludé ce problème ont été pénalisés.

Exercice n° 3

Cet exercice a été traité dans presque toutes les copies, mais de manière incomplète. En effet, très peu de candidats ont décrit le noyau dans le cas général (sans hypothèse sur les a_i) et ceux qui l'ont fait se sont souvent contentés de tautologies (le noyau est formé des polynômes nuls en les a_i, etc). Plus grave, beaucoup se sont directement restreints au cas particulier, mais sans le dire. Enfin, une proportion excessive de copies ne justifie pas correctement la bijectivité (la phrase « en dimension finie » ne suffit pas). Des candidats ont contourné le recours à l'algèbre linéaire en invoquant l'interpolation de Lagrange : or l'énoncé disait explicitement « en déduire » et une telle formulation est par nature impérative ; au moins l'unicité du polynôme d'interpolation devait être déduite de la première partie de la question. L'application de ce résultat (qui est nécessaire à plusieurs reprises dans le problème) quand certains des points d'interpolation sont multiples (par exemple les valeurs propres d'une matrice) peut être délicate et la notion de *multiensemble* avait été introduite dans les conventions préliminaires afin de guider les candidats. Cette aide ne semble pas avoir eu beaucoup de succès.

Exercice n^o 4

Peu de copies ont abordé cette question, et peu parmi celles-ci l'ont fait correctement. Trop de candidats justifient la formule (qui pourrait être admise sans choquer le correcteur) $\rho(k) = \rho(1)^k$ par une écriture $\rho(1 + \cdots + 1) = \cdots$, sans se poser la question de sa signification lorsque $k < 0$. Enfin, des candidats qui arrivent bien à la condition $M' = PMP^{-1}$ parlent de matrices *équivalentes* (au lieu de *semblables* ou *conjuguées*), certainement influencés par l'*équivalence* des représentations correspondantes.

Exercice n^o 5

La plupart des copies ont abordé cette question, mais trop peu de manière satisfaisante. On a rarement vérifié que la loi était bien interne. La liste des axiomes (associativité, neutre, inverse, commutativité) était souvent incomplète. Quand le neutre et l'inverse étaient décrits, on ne justifiait pas leur appartenance à $\widehat{G}$. Même quand tous les arguments nécessaires étaient présents, ils étaient mal présentés, sans structuration apparente.

De manière générale, le traitement de cette partie dans une partie des copies a été un peu décevant. Les trois premiers exercices étaient pratiquement des questions de cours, les deux suivants des applications immédiates. Ils auraient dû être l'occasion pour les candidats de se mettre en train et de montrer aux correcteurs leurs compétences et leurs qualités.

La décomposition de Dunford

Cette partie a été abordée par la quasi-totalité des candidats, et, globalement, de manière satisfaisante.

1. Question bien traitée, mais la preuve que, si A_1 et A_2 commutent, il en est de même de leurs puissances, a donné lieu à bien des délayages. Une preuve facile par récurrence rédigée par un étudiant de master devrait être plus concise que la même preuve rédigée par un étudiant de première année.
2. (a) On attendait simplement ici la condition $SN = NS$, la seule qui ne découlait pas de la forme de la matrice (mais bien entendu, les deux autres conditions : diagonalisabilité de S et nilpotence de N devaient au moins être citées). Malheureusement, beaucoup de candidats ont dû trouver cette réponse trop simple et se sont lancés dans des errances parfois coûteuses en temps et génératrices de grosses bêtises. Pourtant, avoir lu la question suivante aurait pu les mettre sur la voie. On est alors tenté de rappeler un ancien conseil : avant d'attaquer le problème, le lire superficiellement en entier pour s'en faire une idée générale ; et, récursivement, procéder de même à chaque partie.

   (b) La réponse espérée devait mentionner la diagonalisabilité par blocs. La condition $(\alpha_i - \alpha_j)N_{i,j} = 0$, qui a souvent été obtenue, a parfois conduit à des conclusions fantaisistes, voire incohérentes.

3. (a) La preuve de l'unicité a été souvent illogique : le fait de disposer d'une construction déterministe de la solution d'un problème (ici les définitions $T := S$ et $U := I_n + S^{-1}N$) ne prouve pas que cette solution soit la seule. Pour ceux qui ont voulu prouver cette unicité, la justification éventuelle des propriétés non triviales de $T'T^{-1}$ ou de $U'U^{-1}$ était requise. Enfin, il était évidemment illégitime d'utiliser ici la surjectivité de $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, dont la preuve utilisera ce résultat (et le titre de la troisième partie aurait pu servir de mise en garde !).
   (b) Il fallait justifier la relation $S^{-1} \in \mathbf{C}[B]$, la propriété $S^{-1} \in \mathbf{C}[S]$ n'étant nullement tautologique.
   (c) Ici, la bilinéarité du commutateur n'aidait pas.
4. (a) La principale difficulté ici (et dans quelques autres questions du problème) était de définir rigoureusement le polynôme interpolateur alors que les points d'interpolation ne sont pas tous distincts et présentent des multiplicités : l'invocation de l'exercice 3 de la partie I ne pouvait suffire. Une fois le polynôme F défini, il fallait encore justifier l'égalité $F(PDP^{-1}) = PF(D)P^{-1}$ en précisant au moins qu'elle venait justement de ce que F était un polynôme.
   (b) Comme dans l'exercice 2 de la partie I, un calcul formel ne pouvait suffire : il faut justifier la convergence d'une série dans un espace de Banach (ce qui peut très bien avoir sa place dans un problème d'algèbre !) et des majorations du type $||u_0 + \cdots + u_n|| \leqslant C$ ne sont pas un argument convaincant.

L'exponentielle $\exp : \mathbf{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ est surjective

Cette partie a été attaquée par la grande majorité des candidats, mais chaque question à partir de 1 (c) par moins de la moitié d'entre eux, pas toujours les mêmes : on commence à observer une amorce de grapillage, rarement rentable.

1. (a) Le calcul ne peut être seulement formel (algébrique), un argument de continuité est requis ; il peut consister en l'invocation de l'exercice 2 de la partie I, ou encore de la question II 4 (b).
   (b) Comme en II 4 a, la véritable difficulté est de justifier l'existence d'un polynôme d'interpolation en présence de multiplicités, mais beaucoup de copies ne s'en soucient guère.
   (c) On pouvait soit utiliser une détermination du logarithme complexe, mais à condition que celle-ci soit définie aux points d'intérêt (ce qui n'est pas automatique) ; soit raisonner directement (on choisit certains points, etc) mais c'était plus difficile à rédiger clairement.
   (d) Presque tous les candidats ont compris l'exemple mais tous n'ont pas pris la peine de justifier que $S \notin \mathbf{C}[T]$.
2. (a) Cette question a été presque universellement mal traitée et maltraitée. Le passage d'une condition analytique $f(x) = g(x)+o(x^n)$ à une condition algébrique $f(X) \equiv g(X) \pmod{X^n}$ n'est peut-être pas facile à justifier, mais il devait *au moins* être tout-à fait explicite. On rencontre des manipulations formelles de « séries de Taylor » peu convaincantes, et surtout de dangereuses confusions entre l'*existence* d'un exposant n convenable (donc lettre *muette*) et la propriété correspondante pour le n parfaitement défini du texte.
   (b) Le mot « soigneusement » dans la question aurait dû faire comprendre qu'il ne pouvait suffire de vérifier que les compositions étaient égales à l'identité : il fallait montrer que les deux applications étudiées avaient bien les bons ensembles de départ et d'arrivée.
3. Comme pour la question 2 (b), il n'y a plus de difficulté mathématique à ce stade, il s'agit simplement de « rassembler les morceaux » ; mais il est en revanche crucial d'invoquer tous les arguments nécessaires (commutation de S et N, référence explicite aux résultats antérieurs utilisés...).

La fonction matricielle z^A et sa monodromie

Cette partie est la dernière à avoir été abordée par une proportion significative de candidats (environ 60 %), mais à partir de la question 4 cette proportion s'effondre.

1. La dérivée du logarithme complexe, qui est introduit par un rappel de cours, peut être admise, mais pas celle de z^α qui est défini dans le problème.
2. Cette question facile n'a pas été traitée avec rigueur. Dans le sens direct, peu se donnent la peine de mentionner la continuité ; dans le sens inverse, on voit apparaître des entiers k mal quantifiés (ou pas du tout). La constance de k nécessitait un argument de type : une application *continue* d'un ensemble *connexe* dans un ensemble *discret* est constante (trois mots-clés). L'aspect topologique, encore plus crucial en analyse complexe qu'en analyse réelle, est éludé ici comme plus loin à la question 6.
3. (a) Les calculs concernant N étaient souvent imprécis quant à l'indice de nilpotence (dont on doit rappeler qu'il est $\leqslant n$). L'argument de commutation de S et N était indispensable pour la dernière formule.
   (b) Beaucoup d'énormités (dont la linéarité du déterminant) ; peu de candidats reconnaissent la trace de A, qui aurait pu venir à l'esprit par analogie avec la formule $\det \exp A = \exp \mathrm{Tr} A$ (dont on espère qu'elle est connue de la majorité des agrégatifs !).
4. Pour convaincre, un calcul (même esquissé) était préférable à de longues phrases.
5. La dérivation de $\exp(f(z)A)$ ne peut être déduite directement du cas réel et, comme dans d'autres questions, le calcul ne peut être purement formel (algébrique) : il faut le cas échéant légitimer la dérivation terme à terme.
6. Pour l'existence de C, on doit invoquer (et justifier) l'inversibilité de z^A. Pour la déduction $\delta C = 0$ implique C constante, il est indispensable d'invoquer la connexité de Ω.
7. (a) La mention *en déduire* a ici encore un caractère impératif. L'inversibilité de M_k doit être justifiée.
   (b) Question facile n'appelant aucune remarque.
8. Cette question était très ouverte, le corrigé détaillé donne une réponse possible, mais toute réponse sensée et non triviale était acceptée et récompensée.

Algèbres différentielles et automorphismes différentiels

Cette partie a été abordée par moins d'un quart des candidats, et presque tous ne sont pas allés au delà de la question 1.

1. (a) Il faut avoir une idée claire des différentes caractérisations de l'algèbre engendrée par une famille d'éléments ; en particulier, prendre garde que, même si la famille est infinie, les sommes en présence sont finies (ou à support fini).
   (b) La seule formule donnant $\delta(z^l)$ ne suffit pas, il faut parler de linéarité.
   (c) Initiation à l'algèbre différentielle : on doit de toutes façons itérer δ, il y a ensuite plusieurs possibilités (Vandermonde ou un argument de minimalité comme aux questions suivantes).
   (d) Comme la précédente, cette question a été plutôt réussie ; les candidats qui en arrivent là savent prendre des initiatives non dictées par l'énoncé.
2. (a) Mêmes remarques que pour 1 a.
   (b) Beaucoup trop d'erreurs de calcul (décalages erronés d'indices) difficilement pardonnables à ce stade du problème.

La question 3 était assez difficile (et l'énoncé en avertissait implicitement le candidat) ; ces raisonnement sont typiques de l'algèbre différentielle. À la question 4, on retrouve le même malaise qu'à l'exercice 5 de la partie I : les axiomes caractérisant un sous-groupe ne sont pas toujours clairement énoncés et vérifiés.

Groupes et représentations de Picard-Vessiot

Environ 4% des copies abordent cette partie. La question 3 est l'occasion d'une petite excursion dans la théorie des groupes abéliens de type fini mais n'en a pas pour autant remporté grand succès (en fréquentation ou en réussite).

3.2 Corrigé de l'épreuve écrite de Mathématiques Générales

Exercices préliminaires

Exercice n° 1 Le spectre de A est $\{\!\{1, a\}\!\}$. On a donc deux cas :

— Si $a \neq 1$, la matrice A admet deux valeurs propres distinctes donc est diagonalisable. On a alors (avec les notations de l'introduction) $S = A$ et $N = 0$.

— Si $a = 1$, la matrice A est unipotente. On a alors $S = I_2$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On remarque que les applications $A \mapsto S$ et $A \mapsto N$ ne sont pas continues.

Exercice n° 2 Puisque l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est un automorphisme de la $\mathbf{C}$-algèbre $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$, on a, pour tout $N \geqslant 0$:

$$P\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k\right) P^{-1} = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} (PAP^{-1})^k.$$

L'application $M \mapsto PMP^{-1}$ étant de plus continue, car linéaire en dimension finie, on trouve en passant à la limite pour $N \to \infty$:

$$P(\exp A)P^{-1} = \lim_{N\to\infty} P\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k\right) P^{-1} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} (PAP^{-1})^k = \exp(PAP^{-1}).$$

Exercice n° 3 Le polynôme $P \in \mathbf{C}_{n-1}[X]$ appartient au noyau si, et seulement s'il est divisible par $X - a_1, \ldots, X - a_n$. Notons $b_1, \ldots, b_p$ les valeurs distinctes des a_i ; autrement dit, les b_j sont deux à deux distincts et $\{\!\{a_1, \ldots, a_n\}\!\} = \{b_1, \ldots, b_p\}$, donc $p \leqslant n$. Les $X - b_j$ sont alors deux à deux premiers entre eux et le noyau est formé des $(X - b_1) \cdots (X - b_p)Q$ tels que $p + \deg Q \leqslant n - 1$. Il est donc égal à $(X - b_1) \cdots (X - b_p)\mathbf{C}_{n-1-p}[X]$ (qui par convention est nul si $p \geqslant n$).
Si les a_i sont deux à deux distincts, $p = n$ et le noyau est trivial. On a donc une application linéaire injective de $\mathbf{C}_{n-1}[X]$ dans $\mathbf{C}^n$, qui ont même dimension n. Cette application est donc bijective et tout $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbf{C}^n$ admet un unique antécédent $P \in \mathbf{C}_{n-1}[X]$: c'est précisément ce qu'il fallait démontrer.

Exercice n° 4 Soit $\rho : \mathbf{Z} \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ une représentation. Notons $M := \rho(1)$. Alors : $\forall k \in \mathbf{Z}$, $\rho(k) = \rho(1)^k = M^k$, et ρ est bien de la forme indiquée.
Si les représentations $\rho : k \mapsto M^k$ et $\rho' : k \mapsto M'^k$ sont équivalentes, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que $\forall k \in \mathbf{Z}$, $\rho'(k) = P\rho(k)P^{-1}$. Prenant $k := 1$, cela donne $M' = PMP^{-1}$. Réciproquement, si $M' = PMP^{-1}$, alors $M'^k = (PMP^{-1})^k = PM^kP^{-1}$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$ et les représentations sont équivalentes. La condition cherchée est donc que M et M' soient semblables.
(Notons de plus, ce qui n'était pas précisé dans l'énoncé, que, quelle que soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, l'application $k \mapsto M^k$ est bien une représentation ; et que la matrice M qui définit une telle représentation est unique.)

Exercice n° 5 Montrons d'abord que la loi est interne, donc, avec les notations de l'énoncé, que $f_1 f_2 \in \widehat{G}$, autrement dit, que c'est bien un morphisme de groupes. Soient $x, y \in G$:

$$(f_1 f_2)(x+y) = f_1(x+y)f_2(x+y) = f_1(x)f_1(y)f_2(x)f_2(y) = f_1(x)f_2(x)f_1(y)f_2(y) = (f_1 f_2)(x)(f_1 f_2)(y).$$

La deuxième égalité vient de ce que f_1 et f_2 sont des morphismes, la troisième de la commutativité de $\mathbf{C}^*$. La loi est donc bien interne.
L'associativité découle des calculs suivants, dans lesquels $f_1, f_2, f_3 \in \widehat{G}$ et $x \in G$:

$$((f_1 f_2)f_3)(x) = (f_1 f_2)(x)f_3(x) = (f_1(x)f_2(x))f_3(x),$$
$$(f_1(f_2 f_3))(x) = f_1(x)(f_2 f_3)(x) = f_1(x)(f_2(x)f_3(x)).$$

On invoque alors l'associativité de $\mathbf{C}^*$.
L'élément neutre est, en vertu du calcul suivant, l'application constante $\epsilon : x \mapsto 1$ (c'est le morphisme trivial de G dans $\mathbf{C}^*$, il est clair que c'est bien un élément de $\widehat{G}$) ; on fixe $f \in \widehat{G}$ et $x \in G$:

$$(\epsilon f)(x) = \epsilon(x)f(x) = 1.f(x) = f(x) \text{ et } (f\epsilon)(x) = f(x)\epsilon(x) = f(x).1 = f(x).$$

L'inverse de $f \in \widehat{G}$ est l'application $f' : x \mapsto (f(x))^{-1}$ de G dans $\mathbf{C}^*$. On vérifie d'abord que c'est bien un élément de $\widehat{G}$, c'est-à- dire un morphisme ; soient $x, y \in G$:

$$f'(x+y) = (f(x+y))^{-1} = (f(x)f(y))^{-1} = (f(y))^{-1}(f(x))^{-1} = (f(x))^{-1}(f(y))^{-1} = f'(x)f'(y).$$

La quatrième égalité vient de la commutativité de $\mathbf{C}^*$. Le fait que $ff' = f'f = \epsilon$ est alors évident et implique que f admet f' pour inverse.
Le groupe $\widehat{G}$ est commutatif car l'égalité $f_1f_2 = f_2f_1$ découle des égalités $f_1(x)f_2(x) = f_2(x)f_1(x)$ dans le groupe commutatif $\mathbf{C}^*$.
En résumé, $\widehat{G}$ muni de la loi indiquée est bien un groupe abélien.

La décomposition de Dunford

1. Supposons que $[S_1, S_2] = [S_1, N_2] = [N_1, S_2] = [N_1, N_2] = 0$. Alors, par bilinéarité du commutateur :

$$[A_1, A_2] = [S_1 + N_1, S_2 + N_2] = [S_1, S_2] + [S_1, N_2] + [N_1, S_2] + [N_1, N_2] = 0.$$

Supposons réciproquement que $[A_1, A_2] = 0$, autrement dit, que A_1 et A_2 commutent. Alors, pour tous polynômes P_1, P_2, les matrices $P_1(A_1)$ et $P_2(A_2)$ commutent. Comme $S_i, N_i \in \mathbf{C}[A_i]$ pour $i = 1, 2$, on a bien :

$$[S_1, S_2] = [S_1, N_2] = [N_1, S_2] = [N_1, N_2] = 0.$$

2. (a) Puisque S est diagonalisable et N nilpotente, une condition nécessaire et suffisante est que l'on ait $[S, N] = 0$.

   (b) Soient $N_{i,j}$, $1 \leqslant i, j \leqslant k$, les blocs de tailles $r_i \times r_j$ composant N (donc, par hypothèse, $N_{i,j} = 0$ si $i > j$ et les $N_{i,i}$ sont triangulaires supérieures strictes). Les blocs correspondants de SN et NS sont respectivement $(SN)_{i,j} = \alpha_i N_{i,j}$ et $(NS)_{i,j} = \alpha_j N_{i,j}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} [S, N] = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (\forall i, j \in \{1, \ldots, k\} \ , \ (\alpha_i - \alpha_j)N_{i,j} = 0) \\ &\Longleftrightarrow \quad (\forall i, j \in \{1, \ldots, k\} \ , \ i \neq j \Rightarrow N_{i,j} = 0). \end{aligned}$$

   La condition recherchée est donc que N soit diagonale par blocs : $N = \mathrm{Diag}(N_1, \ldots, N_k)$, où $N_i \in \mathrm{M}_{r_i}(\mathbf{C})$, $i = 1, \ldots, k$. (Et bien entendu les N_i sont triangulaires supérieures strictes.)

3. (a) Soit $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ et soit $B = TU$ une décomposition ayant les propriétés indiquées dans l'énoncé. Alors $B = S+N$, où $S := T$ et $N := T(U-I_n)$. Puisque T et U commutent, il en est de même de S et N. De plus, $U-I_n$ est nilpotente et commute avec T, donc N est nilpotente. Enfin, S est par hypothèse diagonalisable. L'égalité $B = S + N$ est donc la décomposition de Dunford de B. Une telle décomposition $B = TU$ est donc nécessairement donnée par $T := S$ et $U := I_n + S^{-1}N$ (on sait que S est inversible puisque $\mathrm{Sp}\ S = \mathrm{Sp}\ B \subset \mathbf{C}^*$).
   Réciproquement, notons $B = S + N$ la décomposition de Dunford et posons $T := S$ et $U := I_n + S^{-1}N$. Il est évident que T est diagonalisable. Comme S et N commutent, $S^{-1}N$ est nilpotente et U est unipotente. Pour la même raison, T et U commutent ; et bien entendu $B = TU$.

(b) Puisque $T = S$, on a $\chi_B = \chi_S = \chi_T$, $\mathrm{Sp}\ B = \mathrm{Sp}\ S = \mathrm{Sp}\ T$ et $T \in \mathbf{C}[B]$.
Il reste à montrer que $U := I_n + S^{-1}N \in \mathbf{C}[B]$. Comme B est inversible, le terme constant de $\chi_S = \chi_B$ est non nul et le théorème de Cayley-Hamilton $\chi_S(S) = 0$ prend la forme $SF(S) + aI_n = 0$, où $a \in \mathbf{C}^*$ et où F est un polynôme. Ainsi, $S^{-1} = -a^{-1}F(S) \in \mathbf{C}[S] \subset \mathbf{C}[B]$ et il est alors immédiat que $U := I_n + S^{-1}N \in \mathbf{C}[B]$.

(c) L'implication de gauche à droite découle (comme à la question 1) du fait que $T_i, U_i \in \mathbf{C}[B_i]$, $i = 1, 2$. L'implication de droite à gauche se démontre par exemple en écrivant l'hypothèse sous forme de commutations : $T_1T_2 = T_2T_1$, etc, et en calculant :

$$B_1B_2 = T_1U_1T_2U_2 = T_1T_2U_1U_2 = T_2T_1U_2U_1 = T_2U_2T_1U_1 = B_2B_1.$$

(Pour la troisième égalité, on a utilisé d'un coup deux commutations à supports disjoints.)

4. (a) Notons $\beta_1, \ldots, \beta_p$ les éléments deux à deux distincts du spectre, de sorte que $p \leqslant n$ et que :

$$\{\!\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}\!\} = \{\!\{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n\}\!\} = \{\beta_1, \ldots, \beta_p\}.$$

D'après l'exercice n° 3, il existe $F \in \mathbf{C}[X]$ tel que $F(\beta_i) = f(\beta_i)$, $i = 1, \ldots, p$. On en déduit que $F(\alpha_i) = f(\alpha_i)$ et $F(\alpha'_i) = f(\alpha'_i)$ pour $i = 1, \ldots, n$, et l'on calcule :

$$\begin{aligned} F(S) = F(PDP^{-1}) &= PF(D)P^{-1} = P\mathrm{Diag}(F(\alpha_1), \ldots, F(\alpha_n))P^{-1} \\ &= P\mathrm{Diag}(f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n))P^{-1}. \end{aligned}$$

Pour la même raison, on a aussi $F(S) = P'\mathrm{Diag}(f(\alpha'_1), \ldots, f(\alpha'_n))P'^{-1}$, et l'égalité voulue en découle.
Variante (qui ne suit pas l'indication donnée) : L'hypothèse s'écrit $QD' = DQ$ où $Q := P^{-1}P'$. Notant $Q = (q_{i,j})$, cela équivaut à

$$\forall i, j\ ,\ (\alpha_i - \alpha'_j)q_{i,j} = 0,$$

ou encore :

$$\forall i, j\ ,\ q_{i,j} \neq 0 \Rightarrow \alpha_i = \alpha'_j.$$

Cette dernière condition entraîne immédiatement la suivante : $\forall i, j\ ,\ q_{i,j} \neq 0 \Rightarrow f(\alpha_i) = f(\alpha'_j)$. Par le même raisonnement, cette dernière équivaut à $Q\mathrm{Diag}(f(\alpha'_1), \ldots, f(\alpha'_n)) = \mathrm{Diag}(f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n))Q$, donc à l'égalité à démontrer.

(b) Les différentes normes sur l'espace de dimension finie $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ définissent la même topologie. Utilisant par exemple une norme matricielle subordonnée, qui est donc une norme d'algèbre, on a $\|a_kS^k\| \leqslant |a_k|\ \|S\|^k$. Comme la série entière $\sum_{k \geqslant 0} a_kz^k$ est de rayon de convergence infini, la série $\sum_{k \geqslant 0} a_kS^k$ est absolument convergente, donc convergente, quelle que soit S.
Comme dans l'exercice n° 2, on calcule :

$$\begin{aligned} \sum_{k \geqslant 0} a_kS^k &= \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} a_kS^k \\ &= \lim_{N \to \infty} P\mathrm{Diag}(\sum_{k=0}^{N} a_k\alpha_1^k, \ldots, \sum_{k=0}^{N} a_k\alpha_n^k)P^{-1} \\ &= P\mathrm{Diag}(f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n))P^{-1}. \end{aligned}$$

C'est bien la matrice notée $f(S)$ à la question (a).

L'exponentielle $\exp : \mathbf{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ **est surjective**

1. (a) Par calcul direct (utilisant l'exercice n° 2) :
$$\exp S = P\mathrm{Diag}(\exp\alpha_1, \ldots, \exp\alpha_n)P^{-1} = P\mathrm{Diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n)P^{-1} = T.$$
   (b) On peut définir une application f de $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ dans $\mathbf{C}$ en posant $f(\beta_i) := \alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$, grâce à l'hypothèse $\beta_i = \beta_j \Rightarrow \alpha_i = \alpha_j$ qui rend cette définition cohérente. Une manière de faire est la suivante : on choisit un sous-ensemble $I \subset \{1, \ldots, n\}$ d'indices tel que les β_i, $i \in I$, soient deux à deux distincts et que chaque β_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$, soit égal à l'un des β_i, $i \in I$ (donc pour un unique indice i d'après la première condition) ; pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on pose alors $f(\beta_j) := \alpha_i$ pour cet indice i. Une autre manière, au fonds équivalente mais plus formelle, est de définir une relation d'équivalence sur $\{1, \ldots, n\}$ par $j \sim k \Leftrightarrow \beta_j = \beta_k$ et de remarquer que la condition posée sur f se traduit par la compatibilité de l'application f avec la relation d'équivalence $\sim$, et permet donc de passer au quotient (dans ce langage, la première méthode revient donc à choisir un ensemble de représentants).
   On choisit alors en vertu de l'exercice n° 3 un polynôme F interpolant f et l'on a, comme à la question 4(a) de la partie précédente, $S = f(T) = F(T)$, d'où $S \in \mathbf{C}[T]$.
   (c) Pour tout $\beta \in \mathbf{C}^*$, il existe un unique $\alpha \in \mathbf{C}$ tel que $\exp\alpha = \beta$ et que de plus (par exemple) $0 \leqslant \mathrm{Im}\ \alpha < 2\pi$. On peut donc choisir pour tout $i = 1, \ldots, n$, α_i tel que $\exp\alpha_i = \beta_i$ et $0 \leqslant \mathrm{Im}\ \alpha < 2\pi$: on a alors comme désiré $\beta_i = \beta_j \Rightarrow \alpha_i = \alpha_j$.
   On peut également raisonner de manière similaire à la question précédente (définition de f).
   (d) Prenons, comme le suggère l'énoncé, $T = P = I_2$, donc $\beta_1 = \beta_2 = 1$. Prenons $\alpha_1 := 0$ et $\alpha_2 := 2\mathrm{i}\pi$. On a bien $\exp S = T$ mais $S \notin \mathbf{C}[T]$ car $\mathbf{C}[T] = \mathbf{C}[I_2]$ est l'ensemble des matrices scalaires, et $S = \mathrm{Diag}(0, 2\mathrm{i}\pi)$ n'est pas scalaire.

2. (a) La formule de Taylor-Young fournit le développement limité à l'ordre $n-1$ en 0 de la fonction exponentielle : $\exp x = E_n(x) + o(x^{n-1})$. De même, celui à l'ordre $n-1$ en 1 de la fonction logarithme népérien est $\ln x = L_n(x) + o((x-1)^{n-1})$. Les règles de composition (et l'unicité) des développements limités entraînent alors que le développement limité à l'ordre $n-1$ en 0 de la fonction $\ln\circ\exp$ a pour partie principale la troncature à l'ordre $n-1$ de $L_n \circ E_n$. Comme $\ln\circ\exp$ est la fonction $x \mapsto x$, on en déduit que $L_n \circ E_n \equiv X \pmod{X^n}$. (C'est ici que se fait le passage de l'algèbre à l'analyse : il revient en substance au fait que, si deux polynômes P, Q vérifient $P(x) = Q(x) + o(x^n)$ au voisinage de $x = 0$, alors $P \equiv Q \pmod{X^n}$.) De même, le calcul du développement limité à l'ordre $n-1$ en 1 de $\exp\circ\ln$ donne la relation $E_n \circ L_n \equiv X \pmod{(X-1)^n}$.
   Variante (qui ne suit pas l'indication donnée) : On introduit les séries formelles limites E et L, dont les dérivées vérifient $E' = E$ et $L' = 1/(1+X)$. Les séries $F := (E-1)\circ L$ et $G := L\circ(E-1)$ sont définies et multiples de X ; de plus, $F' = (1+F)/(1+X)$ et $G' = 1$. On en déduit facilement (si l'on connaît les règles de calcul sur les séries formelles) que $F = G = X$, et les congruences demandées s'en déduisent immédiatement.
   (b) Tout d'abord, si N est nilpotente, on a $N^n = 0$ et $\exp N = E_n(N)$. Cette matrice s'écrit $E_n(N) = I_n + NN'$, où $N' \in \mathbf{C}[N]$ commute avec N, de sorte que NN' est nilpotente et donc $\exp N$ unipotente. De même, si U est unipotente, $N' := U - I_n$ est nilpotente et la matrice $L_n(U) = N'N''$, où $N'' \in \mathbf{C}[N']$, est nilpotente. Les deux applications de l'énoncé ont donc bien la source et le but indiqués. Montrons qu'elles sont réciproques l'une de l'autre.
   Si N est nilpotente, $L_n(\exp N) = L_n(E_n(N)) = (L_n\circ E_n)(N) = N$ en vertu de la congruence $L_n \circ E_n \equiv X \pmod{X^n}$ et du fait que $N^n = 0$.
   Si U est unipotente, $L_n(U)$ étant nilpotente, $\exp(L_n(U)) = E_n(L_n(U))$. Mais, en vertu de la congruence $E_n \circ L_n \equiv X \pmod{(X-1)^n}$ et du fait que $(U - I_n)^n = 0$, on a bien $E_n(L_n(U)) = U$.

3. Soit $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Soit $B = TU$ la décomposition étudiée à la question 3 de la partie II. Soit $S \in \mathbf{C}[T]$ telle que $\exp S = T$ (question 1 de cette partie). Soit $N := L_n(U)$, qui est telle que $N \in \mathbf{C}[U]$ et $\exp N = U$ (question 2 de cette partie). Puisque $T, U \in \mathbf{C}[B]$, on a $\mathbf{C}[T] \subset C[B]$ et $\mathbf{C}[U] \subset C[B]$, d'où $S, N \in \mathbf{C}[B]$ et donc S et N commutent. Posant $A := S + N$, on, en déduit :
$$\exp A = \exp(S+N) = (\exp S)(\exp N) = TU = B.$$

La fonction matricielle z^A et sa monodromie

1. Puisque $d(\log z)/dz = 1/z$, on a $\delta \log = 1$.
Puisque $d(\exp z)/dz = \exp z$, on a :
$$d(z^\alpha)/dz = d(\exp(\alpha \log z))/dz = \exp(\alpha \log z) d(\alpha \log z)/dz = z^\alpha \times (\alpha/z) = \alpha z^{\alpha-1},$$
d'où $\delta(z^\alpha) = \alpha z^\alpha$.
2. On a $\exp(Log^{(k)}(z)) = \exp(\log z + 2ki\pi) = \exp(\log z)(\exp(2i\pi)^k) = z$; la fonction $Log^{(k)}$ étant évidemment continue, c'est bien une détermination du logarithme.
Réciproquement, si $f : \Omega \to \mathbf{C}$ est continue et telle que $\exp \circ f = \mathrm{Id}_\Omega$, on a $\exp(f(z) - \log z) = 1$ pour tout z de Ω. La fonction continue $f - \log$ envoie le connexe Ω dans le discret $2i\pi\mathbf{Z}$, elle est donc constante et égale à $2ki\pi$ pour un $k \in \mathbf{Z}$. La fonction f est donc égale à $Log^{(k)}$.
3. (a) De $(\log z)S = P\mathrm{Diag}(\alpha_1 \log z, \ldots, \alpha_n \log z)P^{-1}$ on tire
$$\begin{aligned} z^S = \exp((\log z)S) &= \exp(P\mathrm{Diag}(\alpha_1 \log z, \ldots, \alpha_n \log z)P^{-1}) \\ &= P \exp \mathrm{Diag}(\alpha_1 \log z, \ldots, \alpha_n \log z)P^{-1} \\ &= P\mathrm{Diag}(\exp(\alpha_1 \log z), \ldots, \exp(\alpha_n \log z))P^{-1} \\ &= P\mathrm{Diag}(z^{\alpha_1}, \ldots, z^{\alpha_n})P^{-1}. \end{aligned}$$
Par ailleurs, $(\log z)N$ étant nilpotente, on a $((\log z)N)^n = 0$, d'où :
$$z^N = \exp((\log z)N) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}(\log z)^k N^k.$$
Enfin, puisque $SN = NS$, les matrices $(\log z)S$ et $(\log z)N$ commutent et :
$$z^A = \exp((\log z)(S+N)) = \exp((\log z)S)\exp((\log z)N) = z^S z^N.$$
L'égalité $z^A = z^N z^S$ se démontre de la même manière.
(b) On sait que z^N est unipotente (d'après la question (a) ci-dessus et la question 2 de la partie III), donc $\det z^N = 1$ et :
$$\begin{aligned} \det z^A = \det(z^S z^N) = \det z^S &= \det(P\mathrm{Diag}(z^{\alpha_1}, \ldots, z^{\alpha_n})P^{-1}) \\ &= \det \mathrm{Diag}(z^{\alpha_1}, \ldots, z^{\alpha_n}) = z^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}. \end{aligned}$$
On a donc $\det z^A = z^{\mathrm{Tr} A}$.
Variante : Si l'on admet la formule « bien connue » $\det(\exp\ M) = \exp(\mathrm{Tr}\ M)$, il suffit de prendre $M := (\log z)A$.
4. Reprenant le calcul de 3(a), on a $z^N = \sum_{k=0}^{d-1} \frac{1}{k!}(\log z)^k N^k$ et les coefficients de z^N sont donc des combinaisons linéaires à coefficients constants des $(\log z)^k$, $k < d$. Toujours d'après 3(a), ceux de z^S sont des combinaisons linéaires à coefficients constants des z^{α_i}, $i = 1, \ldots, k$, autrement dit des z^α, $\alpha \in \mathrm{Sp}\ S = \mathrm{Sp}\ A$. Comme les coefficients de $z^A = z^S z^N$ sont des expressions bilinéaires en les coefficients de z^S et ceux de z^N, ce sont bien des combinaisons linéaires des $z^\alpha(\log z)^k$, $\alpha \in \mathrm{Sp}\ A$, $k < d$.

5. Soit $z_0 \in \Omega$. Du développement limité $f(z_0+h) = f(z_0) + f'(z_0)h + o(h)$, on tire :
$$\begin{aligned}\exp(f(z_0+h)A) &= \exp(f(z_0)A)\exp(f'(z_0)hA)\exp(o(h)A) \\ &= \exp(f(z_0)A)(I_n + f'(z_0)hA + o(h))(I_n + o(h)) \\ &= \exp(f(z_0)A) + \exp(f(z_0)A)f'(z_0)hA + o(h).\end{aligned}$$
On en déduit que $d(\exp(f(z)A)/dz = \exp(f(z)A)f'(z)A$ puis que :
$$\delta(\exp(f(z)A)) = \exp(f(z)A)(\delta f)(z)A;$$
d'ailleurs, les facteurs de ce produit commutent.
Appliquant cette formule à $f := \log$, sachant que $\delta \log = 1$, on obtient :
$$\delta(z^A) = Az^A = z^A A.$$
6. D'après la question 3(b), $\det(z^A)$ est inversible dans $\mathscr{O}$ et z^A est donc inversible dans $\mathrm{M}_n(\mathscr{O})$ (en fait, on peut vérifier que son inverse est z^{-A}), de sorte que $C := (z^A)^{-1}\mathscr{X} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathscr{O})$. Si l'on applique δ à l'égalité $\mathscr{X} = z^A C$, on trouve :
$$\delta\mathscr{X} = (\delta z^A)C + z^A\delta C = Az^AC + z^A\delta C = A\mathscr{X} + z^A\delta C.$$
Comme par hypothèse $\delta\mathscr{X} = A\mathscr{X}$, on voit que $z^A\delta C = 0$, d'où $\delta C = 0$, autrement dit, $dC/dz = 0$. Comme Ω est connexe, cela entraîne que $C \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{C})$.
7. (a) Comme $\delta(Log^{(k)}) = \delta(\log + 2\mathrm{i}\pi k) = \delta \log = 1$, le même calcul qu'à la question 5 montre que $\delta\left[z^A\right]_k = A\left[z^A\right]_k = \left[z^A\right]_k A$.
Appliquant la question 6, on en déduit que $\left[z^A\right]_k = z^A M_k$, où $M_k \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$. Mais $\left[z^A\right]_k$ est inversible (en tant qu'exponentielle de matrice) et z^A aussi, donc $M_k \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.
   (b) On a $Log^{(k)} = \log + 2\mathrm{i}\pi k$, d'où $(Log^{(k)}(z))A = (\log z)A + 2\mathrm{i}\pi kA$, d'où enfin en prenant les exponentielles (toutes ces matrices commutent) $\left[z^A\right]_k = z^A\exp(2\mathrm{i}\pi kA)$. On trouve donc que $M_k = \exp(2\mathrm{i}\pi kA)$.
On a $M_k = M^k$, où $M := \exp(2\mathrm{i}\pi A)$, et l'application $k \mapsto M_k$ est bien une représentation de $\mathbf{Z}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.
8. Utilisant la surjectivité de $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ (partie II), on déduit de l'exercice n° 4 que toute représentation de $\mathbf{Z}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est de la forme ρ_A pour une certaine matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ (qui n'est pas unique).
De plus, ρ_{A_1} et ρ_{A_2} sont équivalentes si, et seulement si, $\exp(2\mathrm{i}\pi A_1)$ et $\exp(2\mathrm{i}\pi A_2)$ le sont. D'après l'exercice n° 2, c'est en particulier le cas si A_1 et A_2 sont semblables ; mais cette condition n'est pas nécessaire comme on le voit en prenant $A_1 := 0$ et pour A_2 une matrice non nulle telle que $\exp(2\mathrm{i}\pi A_2) = I_2$, par exemple $A_2 = \mathrm{Diag}(0,1)$.

Algèbres différentielles et automorphismes différentiels

1. (a) Montrons que le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $V := \sum_{l\in L}\mathbf{C}z^l$ est égal à $\mathcal{A}$. Il contient $\mathbf{C} = \mathbf{C}z^0$ car $0 \in L$ (prendre tous les m_i nuls dans la définition de L). Il contient aussi les z^{α_i} car chaque $\alpha_i \in L$ (prendre $m_i = 1$ et les autres m_j nuls). Il est stable par multiplication car la famille génératrice des z^l l'est (L étant stable pour l'addition) et la multiplication est bilinéaire. C'est donc une $\mathbf{C}$-algèbre contenant les z^{α_i}, et comme $\mathcal{A}$ est la plus petite telle $\mathbf{C}$-algèbre, $\mathcal{A} \subset V$. D'autre part, toute $\mathbf{C}$-algèbre contenant les z^{α_i} contient nécessairement les $(z^{\alpha_1})^{m_1}\cdots(z^{\alpha_n})^{m_n} = z^l$, $l = \sum m_i\alpha_i$, $m_1,\dots,m_n \in \mathbf{N}$; donc $\mathcal{A} \supset V$ et donc $\mathcal{A} = V$.
On peut également raisonner de manière plus concise en remarquant que la sous $\mathbf{C}$-algèbre engendrée par les z^{α_i} est égale à l'ensemble des polynômes en les z^{α_i} (à coefficients complexes), donc à l'ensembles des combinaisons linéaires (à coefficients complexes) des monômes en les z^{α_i} ; et ces monômes sont les z^l.

(b) Soit $\sum a_l z^l \in \mathcal{A}$ (les $a_l \in \mathbf{C}$ presque tous nuls). Alors $\delta(\sum a_l z^l) = \sum l a_l z^l \in \mathcal{A}$.

(c) La famille des z^l étant génératrice d'après la question (a), il suffit de montrer qu'elle est libre. Soient donc $l_1, \ldots, l_k \in L$ deux à deux distincts et $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{C}$ tels que $\lambda_1 z^{l_1} + \cdots + \lambda_k z^{l_k} = 0$. Appliquant δ^p, $p \in \mathbf{N}$, on obtient la relation $\lambda_1 l_1^p z^{l_1} + \cdots + \lambda_k l_k^p z^{l_k} = 0$. Par combinaison linéaire de telles relations, on trouve que, pour tout polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$:

$$\lambda_1 P(l_1) z^{l_1} + \cdots + \lambda_k P(l_k) z^{l_k} = 0.$$

Fixant $i \in \{1, \ldots, k\}$, on peut choisir P tel que $P(l_i) = 1$ et $P(l_j) = 0$ pour $j \in \{1, \ldots, k\} \backslash \{i\}$ (on peut soit invoquer l'exercice n° 3 soit prendre $P := \prod_{j \neq i} (X - l_j)/(l_i - l_j)$). On en tire alors $\lambda_i z^{l_i} = 0$, d'où $\lambda_i = 0$.

Variante : Les l_i étant deux à deux distincts, la matrice de Vandermonde des l_i^j est inversible et son inverse fournit les coefficients d'une combinaison linéaire des relations $\sum \lambda_i l_i^p z^{l_i}$ qui se réduit à $\lambda_i z^{l_i} = 0$.

Autre variante : On peut également, comme dans la question 3 ci-dessous, prendre une relation non triviale de longueur minimale et en déduire une contradiction.

(d) Écrivons $u = \sum_{m \in L} a_m z^m$ et $v = \sum_{m \in L} b_m z^m$. De l'égalité $\delta v = l v$, on tire $\sum_{m \in L} (m - l) b_m z^m = 0$, d'où, les z^m formant une famille libre, $(m - l) b_m = 0$ pour tout m, d'où $b_m = 0$ pour $m \neq l$ et donc $v = b z^l$, $b \in \mathbf{C}$.

De l'égalité $\delta u - l u = v$, on tire alors $\sum_{m \in L} (m - l) a_m z^m = b z^l$, d'où comme ci-dessus $a_m = 0$ pour $m \neq l$ et $0.a_l = b$ et donc $v = 0$ et $u \in \mathbf{C} z^l$.

2. (a) Notons provisoirement $\mathcal{A}'' := \left\{ \sum_{k \geqslant 0} f_k \log^k \mid \text{ les } f_k \in \mathcal{A} \text{ étant presque tous nuls} \right\}$. C'est, de manière évidente, un sous $\mathbf{C}$-espace vectoriel de $\mathcal{O}$. De plus, puisque $1 = 1.\log^0$ et que $(\sum f_k \log^k)(\sum g_k \log^k) = \sum h_k \log^k$, où $h_k := \sum_{i+j=k} f_i g_j$, on voit que $\mathcal{A}''$ est un sous-anneau de $\mathcal{O}$, donc une sous $\mathbf{C}$-algèbre. Puisque $\log = 1.\log^1$ et que, pour tout $f \in \mathcal{A}$, $f = f \log^0$, cette sous-algèbre contient $\mathcal{A}$ et $\log$ donc contient $\mathcal{A}'$. Par ailleurs, toute sous-algèbre contenant $\mathcal{A}$ et $\log$ contient les $\sum_{k \geqslant 0} f_k \log^k$, donc contient $\mathcal{A}''$. On a donc bien $\mathcal{A}' = \mathcal{A}''$.

Comme à la question 1 (a) on peut également, de manière plus concise, caractériser $\mathcal{A}'$ comme l'ensemble des polynômes en log mais à coefficients dans $\mathcal{A}$.

(b) On a $\delta(f_k \log^k) = (\delta f_k) \log^k + k f_k \log^{k-1}$, d'où :

$$\delta(\sum f_k \log^k) = \sum g_k \log^k, \text{ où } g_k := \delta f_k + (k+1) f_{k+1}.$$

Les f_k étant presque tous nuls, les g_k le sont également.

La stabilité de $\mathcal{A}'$ sous δ en découle immédiatement.

3. (a) Soient $u, v \in \mathcal{A}$ tels que $u + v \log = 0$. Si $v = 0$, alors $u = 0$. S'il existe une telle relation avec $v \neq 0$, on peut écrire $v = \lambda_1 z^{l_1} + \cdots + \lambda_p z^{l_p}$ avec $p \geqslant 1$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbf{C}^*$ et $l_1, \ldots, l_p \in L$ deux à deux distincts. On peut de plus choisir cette relation de telle sorte que p soit le plus petit possible.

En appliquant δ à la relation de départ, on obtient la nouvelle relation $(\delta u + v) + (\delta v) \log = 0$. En combinant les deux relations, on trouve :

$$0 = ((\delta u + v) + (\delta v) \log) - l_p (u + v \log) = u' + v' \log,$$

où $u' := \delta u + v - l_p u$ et :

$$v' := \delta v - l_p v = \lambda_1 (l_1 - l_p) z^{l_1} + \cdots + \lambda_{p-1} (l_{p-1} - l_p) z^{l_{p-1}}.$$

D'après l'hypothèse de minimalité de p, on doit avoir $v' = 0$ et donc $\delta u + v - l_p u = 0$. Appliquant la question 1.d, on en déduit que $v = 0$, contradiction.

(b) Pour prouver l'unicité, il suffit d'établir que la relation $\sum f_k \log^k = 0$ implique que tous les f_k sont nuls. Supposons donc par l'absurde une relation non triviale $\sum_{k=0}^{p} f_k \log^k = 0$ avec $f_p \neq 0$. Supposons de plus cette relation choisie avec p le plus petit possible. On a alors nécessairement $p \geqslant 1$, car il n'y a pas de relation non triviale $f_0 \log^0 = 0$.
Appliquant δ, on trouve, d'après la question 2(b) :

$$\sum_{k=0}^{p} (\delta f_k + (k+1) f_{k+1}) \log^k = 0, \quad \text{où l'on convient que } f_{p+1} := 0.$$

En combinant ces deux relations avec les coefficients δf_p et $-f_p$, on obtient la relation :

$$\sum_{k=0}^{p} (f_k \delta f_p - f_p \delta f_k - (k+1) f_p f_{k+1}) \log^k = 0.$$

Le terme d'indice p étant nul, par minimalité de p, cette relation doit être triviale. En particulier, le terme d'indice $p-1$ s'annule :

$$f_{p-1}\delta f_p - f_p \delta f_{p-1} - p f_p^2 = 0 \Longrightarrow \delta(f_{p-1}/f_p) = p \Longrightarrow \delta(f_{p-1}/f_p - p\log) = 0.$$

On a donc $f_{p-1}/f_p - p\log = c \in \mathbf{C}$ (car Ω est connexe), d'où $(f_{p-1} - cf_p) - (pf_p)\log = 0$. D'après la question (a) ci-dessus, $f_{p-1} - cf_p = pf_p = 0$, donc (puisque $p \geqslant 1$) $f_{p-1} = f_p = 0$, contredisant l'hypothèse $f_p \neq 0$.

4. Tout d'abord, le neutre de $\mathrm{Aut}(\mathcal{B})$ est $\mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$, qui commute à δ donc appartient à $\mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{B})$. Soient ensuite $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{B})$; ils commutent à δ, fonc $\sigma_1\sigma_2$ aussi, donc $\sigma_1\sigma_2 \in \mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{B})$. Soit enfin $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{B})$. En composant à droite et à gauche par σ^{-1} l'égalité $\sigma \circ \delta = \delta \circ \sigma$, on voit que σ^{-1} commute à δ, donc que $\sigma^{-1} \in \mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{B})$

5. (a) Cela découle directement de la question 4 de la partie IV.

(b) On a $\delta\mathscr{X} = \delta\sigma z^A = \sigma\delta z^A = \sigma(Az^A) = A\sigma(z^A) = A\mathscr{X}$ (l'avant-dernière égalité étant justifiée par le fait que A est à coefficients dans $\mathbf{C}$, donc invariante par σ) et l'on en déduit grâce à la question 6 de la partie IV que $\mathscr{X} = z^A M_\sigma$ avec $M_\sigma \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$. Comme z^A est inversible, M_σ est unique. Comme $\sigma(z^A)$ est également inversible (car σ est un automorphisme d'anneaux), $M_\sigma \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.

(c) Soient $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A}')$. On a d'une part $(\sigma_1\sigma_2)(\mathscr{X}) = \mathscr{X} M_{\sigma_1,\sigma_2}$, d'autre part :

$$(\sigma_1\sigma_2)(\mathscr{X}) = \sigma_1(\sigma_2(\mathscr{X})) = \sigma_1(\mathscr{X} M_{\sigma_2}) = \sigma_1(\mathscr{X}) M_{\sigma_2} = \mathscr{X} M_{\sigma_1} M_{\sigma_2}.$$

(L'avant-dernière égalité étant justifiée par le fait que M_{σ_2} est à coefficients dans $\mathbf{C}$, donc invariante par σ_1.) On en déduit, puisque $\mathscr{X}$ est inversible, que $M_{\sigma_1\sigma_2} = M_{\sigma_1} M_{\sigma_2}$.

Groupes et représentations de Picard-Vessiot

1. (a) Soit $f := \sigma(\log)$. Alors :

$$\delta f = \delta\sigma\log = \sigma\delta\log = \sigma(1) = 1,$$

d'où l'on déduit :

$$\delta(f - \log) = 1 - 1 = 0 \Longrightarrow f - \log \in \mathbf{C},$$

puisque Ω est connexe. Le complexe λ est la valeur de $f - \log$.

(b) Soit $g := \sigma(z^l)$, qui, comme z^l, est inversible. Alors :

$$\delta g = \delta\sigma z^l = \sigma\delta z^l = \sigma(lz^l) = l\sigma(z^l) = lg.$$

On a alors $\delta(g/z^l) = 0$, donc $g/z^l \in \mathbf{C}$ (puisque Ω est connexe). Le complexe c tel que $g = cz^l$ est non nul puisque z^l et g sont inversibles. (On peut également invoquer la question 5 de la partie V, avec $n = 1$.)
On calcule alors, pour $l, l' \in L$:

$$c_{l+l'} = \frac{\sigma(z^{l+l'})}{z^{l+l'}} = \frac{\sigma(z^l)\sigma(z^{l'})}{z^l z^{l'}} = \frac{\sigma(z^l)}{z^l}\frac{\sigma(z^{l'})}{z^{l'}} = c_l c_{l'}.$$

(c) On a $\sigma\left(\sum\limits_{l\in L} a_l z^l\right) = \sum\limits_{l\in L} a_l c_l z^l$, d'où la stabilité de $\mathcal{A}$ sous l'action de σ.
Comme σ commute à δ, il est évident que $\sigma_{|\mathcal{A}}$ aussi, donc $\sigma_{|\mathcal{A}} \in \mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A})$.

2. (a) Il est clair que, si $\sigma, \sigma' \in \mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A}')$, alors $(\sigma\sigma')_{|\mathcal{A}} = \sigma_{|\mathcal{A}}\sigma'_{|\mathcal{A}}$. D'autre part, $(\sigma\sigma')(\log) = \log + \lambda_{\sigma\sigma'}$ et par ailleurs $(\sigma\sigma')(\log) = \sigma(\log + \lambda_{\sigma'}) = \log + \lambda_\sigma + \lambda_{\sigma'}$, d'où $\lambda_{\sigma\sigma'} = \lambda_\sigma + \lambda_{\sigma'}$. Ainsi, ψ est bien un morphisme de groupes.
Si $\sigma \in \mathrm{Ker}\psi$, on a $\sigma(\log) = \log$ et, pour tout $f \in \mathcal{A}$, $\sigma(f) = f$; donc, avec les notations de la question 2(a) de la partie V, $\sigma(\sum f_k \log^k) = \sum f_k \log^k$, *i.e.* $\sigma = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}'}$. Le noyau de ψ est donc trivial, ce qui prouve l'injectivité.

(b) Un élément de $\mathcal{A}'$ s'écrit de façon unique $g = \sum f_k \log^k$ et l'on peut donc définir de manière cohérente $\sigma g := \sum \sigma_0(f_k)(\log + \lambda)^k$, et σ vérifie bien $\sigma_{|\mathcal{A}} = \sigma_0$ et $\sigma(\log) = \log + \lambda$. La définition de $\sigma(g)$ est d'ailleurs imposée par ces deux conditions, ce qui prouve déjà l'unicité demandée (on ne peut pas directement appliquer la conclusion de la question précédente qui concernait $\mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A}')$, mais on pourrait reprendre l'argument).
On remarque d'une part que σ est composée des applications $\sum f_k \log^k \mapsto \sum \sigma_0(f_k) \log^k$ et $\sum f_k \log^k \mapsto \sum f_k(\log + \lambda)^k$; d'autre part que $\mathcal{A}' \simeq \mathcal{A}[T]$ (anneau des polynômes). On est alors ramené aux faits bien connus suivants ; soient A un anneau commutatif, σ_0 un automorphisme de A et λ un élément de A : alors les applications $\sum a_k T^k \mapsto \sum \sigma_0(a_k) T^k$ et $\sum a_k T^k \mapsto \sum a_k (T + \lambda)^k$ sont des automorphismes de l'anneau $A[T]$.

(c) Avec les notations ci-dessus, on a d'une part :

$$\sigma\delta(g) = \sigma\left(\sum(\delta f_k + (k+1) f_{k+1}) \log^k\right) = \sum(\sigma_0\delta f_k + (k+1)\sigma_0 f_{k+1})(\log + \lambda)^k,$$

et d'autre part :

$$\delta\sigma g = \delta\left(\sum \sigma_0(f_k)(\log + \lambda)^k\right) = \sum(\delta\sigma_0(f_k) + (k+1)\sigma_0(f_{k+1}))(\log + \lambda)^k,$$

en vertu du même calcul qu'à la question 2(b) de la partie V, puisque $\delta(\log + \lambda) = 1$. Pour montrer que σ commute à δ, il suffit donc de vérifier que $\sigma_0 \delta f_k + (k+1)\sigma_0 f_{k+1} = \delta\sigma_0(f_k) + (k+1)\sigma_0(f_{k+1})$, mais cela résulte de l'hypothèse $\sigma_0\delta = \delta\sigma_0$.
Le morphisme de la question 2(a) est donc bijectif, donc un isomorphisme.

3. Par construction, G est un groupe abélien de type fini. Comme sous-groupe du groupe sans torsion $(\mathbf{C}, +)$ (groupe additif d'un corps de caractéristique nulle), c'est un groupe abélien sans torsion. Il est donc libre, de rang non nul (car non trivial) majoré par le cardinal de n'importe quelle partie génératrice, ici n. En effet, à isomorphisme près, cela revient à dire que l'on a un morphisme de groupes surjectif $\mathbf{Z}^n \to \mathbf{Z}^m$; et la matrice correspondante décrit alors une application $\mathbf{Q}$-linéaire surjective $\mathbf{Q}^n \to \mathbf{Q}^m$, ce qui n'est possible que si $n \geqslant m$. Donc $G \simeq \mathbf{Z}^m$ avec $1 \leqslant m \leqslant n$.
Le groupe $\widehat{G}$ est donc isomorphe à $\widehat{\mathbf{Z}^m}$. Soit $(e_1, \ldots, e_m)$ la base canonique de $\mathbf{Z}^m$. L'application $f \mapsto (f(e_1), \ldots, f(e_m))$ est un isomorphisme de $\widehat{\mathbf{Z}^m}$ sur $\mathbf{C}^{*m}$. On en déduit que $\widehat{G} \simeq (\mathbf{C}^*)^m$.

4. (a) Puisque, d'après la question 1(c) de la partie V, les z^l, $l \in L$, forment une base du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathcal{A}$, en posant $\sigma_f(z^l) := f(l) z^l$, on définit un endomorphisme de cet espace vectoriel ; et comme de plus les coefficients $f(l)$ sont non nuls, c'est un automorphisme.

On a $\sigma_f(1) = \sigma_f(z^0) = f(0)z^0 = 1$. D'autre part, soient $\sum a_l z^l, \sum b_l z^l \in \mathcal{A}$ et soit $\sum c_l z^l$ leur produit, *i.e.* $\forall l \in L$; $c_l = \sum\limits_{l'+l''=l} a_{l'} b_{l''}$. Alors :

$$f(l)c_l = f(l) \sum_{l'+l''=l} a_{l'} b_{l''} = \sum_{l'+l''=l} f(l'+l'') a_{l'} b_{l''} = \sum_{l'+l''=l} f(l')f(l'') a_{l'} b_{l''} = \sum_{l'+l''=l} f(l') a_{l'} f(l'') b_{l''},$$

de sorte que

$$\sigma_f\left((\sum a_l z^l)(\sum b_l z^l) \right) = \sigma_f\left(\sum a_l z^l \right) \sigma_f\left(\sum b_l z^l \right).$$

Ainsi, σ_f est un automorphisme de $\mathbf{C}$-algèbre.
Pour voir que σ_f commute à δ, on peut comparer les effets des applications linéaires $\sigma_f \circ \delta$ et $\delta \circ \sigma_f$ sur la base des z^l : les images par l'une ou l'autre de ces applications dont les $lf(l)z^l$. (En fait, c'est une base de vecteurs propres pour σ_f, valeurs propres $f(l)$, comme pour δ, valeurs propres l.) On a donc bien $\sigma_f \in \mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A})$.

(b) On a $\sigma_{fg}(z^l) = (fg)(l)z^l = f(l)g(l)z^l$ d'après la définition de la loi de groupe sur $\widehat{G}$ (exercice préliminaire n° 5) ; et, pour tout $l \in L$:

$$\sigma_f \circ \sigma_g(z^l) = \sigma_f(g(l)z^l) = g(l)\sigma_f(z^l) = g(l)f(l)z^l = \sigma_{fg}(z^l),$$

d'où $\sigma_{fg} = \sigma_f \circ \sigma_g$ puisque ces deux applications linéaires coïncident sur une base. L'application $f \mapsto \sigma_f$ est donc un morphisme du groupe $\widehat{G}$ dans le groupe $\mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A})$.
Si f appartient au noyau de ce morphisme, $\sigma_f(z^l) = z^l$ pour tout $l \in L$. Comme $\sigma_f(z^l) := f(l)z^l$, on a $f(l) = 1$ pour tout $l \in L$, donc $f(l_1 - l_2) = f(l_1)/f(l_2) = 1$ pour tous $l_1, l_2 \in L$, donc f est la constante 1 sur G (puisque $L - L = G$), donc l'élément neutre de $\widehat{G}$, et le morphisme $f \mapsto \sigma_f$ est injectif.
Soit enfin $\sigma \in \mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A})$. D'après la question 1(b), on a une application $l \mapsto c_l$ de L dans $\mathbf{C}^*$ telle que $\sigma(z^l) = c_l z^l$ pour tout $l \in L$; et l'on a vu de plus que $c_{l+l'} = c_l c_{l'}$. Pour prouver la surjectivité du morphisme $f \mapsto \sigma_f$, il nous suffit donc d'établir l'existence de $f \in \widehat{G}$ dont la restriction à L soit l'application $l \mapsto c_l$. Pour cela, on définit f sur $G = L - L$ par la formule : $f(l_1 - l_2) := c_{l_1}/c_{l_2}$. Cette définition est cohérente en vertu du calcul suivant, où $l_1, l_2, l'_1, l'_2 \in L$:

$$l_1 - l_2 = l'_1 - l'_2 \Longrightarrow l_1 + l'_2 = l'_1 + l_2 \Longrightarrow c_{l_1+l'_2} = c_{l'_1+l_2} \Longrightarrow c_{l_1}c_{l'_2} = c_{l'_1}c_{l_2} \Longrightarrow c_{l_1}/c_{l_2} = c_{l'_1}/c_{l'_2}.$$

De plus, f est un morphisme de groupes en vertu du calcul suivant, où $l_1, l_2, l'_1, l'_2 \in L$:

$$\begin{aligned} f((l_1 - l_2) + (l'_1 - l'_2)) &= f((l_1 + l'_1) - (l_2 + l'_2)) \\ &= c_{l_1+l'_1}/c_{l_2+l'_2} = (c_{l_1}c_{l'_1})/(c_{l_2}c_{l'_2}) = (c_{l_1}/c_{l_2})(c_{l'_1}/c_{l'_2}) \\ &= f(l_1 - l_2)f(l'_1 - l'_2). \end{aligned}$$

5. L'automorphisme $\sigma_{f,\lambda}$ de l'algèbre $\mathcal{A}'$ est caractérisé par sa $\mathbf{C}$-linéarité et par les images $z^l \mapsto f(l)z^l$ et $\log \mapsto \log + \lambda$. Avec les notations $A = S + N$ et les formules $z^A = z^S z^N$, etc, de la partie IV, l'effet de $\sigma_{f,\lambda}$ sur z^S est donné par :

$$\begin{aligned} \sigma_{f,\lambda}(z^S) &= P\mathrm{Diag}(\sigma_{f,\lambda}(z^{\alpha_1}), \dots, \sigma_{f,\lambda}(z^{\alpha_n}))P^{-1} \\ &= P\mathrm{Diag}(f(\alpha_1)z^{\alpha_1}, \dots, f(\alpha_n)z^{\alpha_n})P^{-1} \\ &= P\mathrm{Diag}(f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n))P^{-1}P\mathrm{Diag}(z^{\alpha_1}, \dots, z^{\alpha_n})P^{-1} \\ &= f(S)z^S. \end{aligned}$$

De plus, ces facteurs commutent. De même, l'effet de $\sigma_{f,\lambda}$ sur z^N est donné par :

$$\sigma_{f,\lambda}(z^N) = \sigma_{f,\lambda}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (\log z)^k N^k \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (\log z + \lambda)^k N^k = \exp((\log z + \lambda)N) = z^N \exp(\lambda N).$$

Ici aussi les facteurs commutent. Avec les notations de la question 5 de la partie V, on a donc : $M_{\sigma_{f,\lambda}} = f(S)\exp(\lambda N)$ et la représentation $\rho''_A : \widehat{G} \times \mathbf{C} \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est l'application $(f, \lambda) \mapsto f(S)\exp(\lambda N)$.

6. On a $\rho_A(1) = \exp(2\mathrm{i}\pi A) = \exp(2\mathrm{i}\pi S)\exp(2\mathrm{i}\pi N)$, que l'on voudrait mettre sous la forme $f(S)\exp(\lambda N)$. Il suffit de prendre pour f l'application $l \mapsto \exp(2\mathrm{i}\pi l)$ et pour λ le complexe $2\mathrm{i}\pi$. Le morphisme $\varphi : \mathbf{Z} \to \widehat{G} \times \mathbf{C}$ est donc l'application $k \mapsto (e_k, 2\mathrm{i}\pi k)$, où $e_k : G \to \mathbf{C}^*$ est le morphisme $l \mapsto \exp(2\mathrm{i}\pi kl)$.

Bibliographie

[1] A. Douady, R. Douady, *Algèbre et théories Galoisiennes*, Nouvelle Bibliothèque Mathématique, Cassini (2005).

[2] J. Sauloy, *Differential Galois Theory through Riemann-Hilbert Correspondence : An Elementary Introduction*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 177, AMS (2016).

[3] M. van der Put, M. F. Singer, *Galois Theory of Linear Differential Equations*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer (2003).

Chapitre 4

Épreuve écrite d'analyse et probabilités

Le sujet est disponible à l'URL http://www.devenirenseignant.gouv.fr/cid111368/sujets-et-rapports-des-jurys-agregation-2018.html ou sur le site http://www.agreg.org.

4.1 Commentaires sur l'épreuve écrite d'Analyse et Probabilités

Le sujet d'Analyse et Probabilités de la session 2018 porte sur l'étude des transformées de LAPLACE et de FOURIER, utilisées ensuite pour la résolution d'équations différentielles. Les trois dernières parties établissent des résultats de compacité, les « lemmes de moyenne », dûs à F. GOLSE, B. PERTHAME et R. SENTIS qui sont fondamentaux pour l'analyse des équations cinétiques. Chaque partie commence par des questions simples, parfois très proches du « cours » et qui devraient être à la portée d'une grande majorité des candidats à l'agrégation.

La partie I est consacrée à trois exercices préliminaires qui servent dans la suite du problème : deux sont considérés comme élémentaires et un troisième était annoncé comme plus technique.

La partie II est dévolue à l'étude de la transformée de LAPLACE ; les propriétés classiques étaient à redémontrer : définition sur le demi-plan, holomorphie, transformée de LAPLACE de la dérivée puis des calculs de transformées de LAPLACE de fonctions usuelles qui servaient dans la suite du problème. L'injectivité de la transformée de LAPLACE sur un certain espace vectoriel de fonctions est établie. Enfin, les outils mis en place permettent de résoudre un problème de CAUCHY linéaire.

Dans la partie III, on étudie la transformée de FOURIER en dimension 1, avec des exemples simples de calcul de transformées de FOURIER et le calcul de l'intégrale de GAUSS à l'aide de l'holomorphie. Enfin, une méthode de résolution d'une équation différentielle dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ à l'aide de la transformée de FOURIER est présentée, puis une formulation faible de ce problème, dans $L^2(\mathbb{R})$, est abordée. On remarquera que cette question faisait d'ailleurs partie des indications données dans l'annexe consacrée aux distributions dans le rapport 2017.

La partie IV, plus courte, est consacrée à un exemple en dimension 2 de transformée de FOURIER, puis à la démonstration du lemme de RIEMANN-LEBESGUE et enfin à celle de l'uniforme continuité de la transformée de FOURIER d'une fonction intégrable.

Dans la partie V, on désigne par H^α l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$ de $L^2(\mathbb{R}^2)$ telles que

$$\|f\|_\alpha^2 := \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \|\xi\|^{2\alpha})\ |\widehat{f}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi < \infty.$$

L'objectif de cette partie est de démontrer que cet espace est un espace de HILBERT puis d'établir un résultat de relative compacité dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ à l'aide du théorème d'ARZELA-ASCOLI. Il s'agit d'une incursion vers les espaces de SOBOLEV avec une démonstration du théorème de RELLICH-KONDRAZHOV.

Les deux dernières parties étaient consacrées à l'étude des « lemmes de moyenne ». Il s'agit d'un outil fondamental pour l'analyse des équations cinétiques. Ces équations aux dérivées partielles sont issues de la physique statistique : l'inconnue $f(t, x, v)$ s'y interprète comme une fonction de distribution dans l'espace des phases. Autrement dit, $\iint_{A\times B} f(x, v)\ \mathrm{d}v\ \mathrm{d}x$ donne le nombre de particules ayant une position x dans le domaine A et une vitesse v dans le domaine B. Ces équations se caractérisent par la présence de l'opérateur de transport $v \cdot \nabla_x$. Les lemmes de moyenne énoncent des propriétés sur des suites $\big(f_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ de telles fonctions de distributions telles que $\big(f_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(v \cdot \nabla_x f_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites bornées dans des espaces L^p. On s'intéresse à des moyennes en vitesses du type

$$\rho_n(x) = \int f_n(x, v)\psi(v)\ \mathrm{d}v$$

où ψ est une fonction donnée dans C_c^∞. Il y a deux manières d'interpréter le résultat

— comme un gain de régularité : la suite $\big(\rho_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, dont on voit rapidement qu'elle est bornée dans L^p, est en fait aussi bornée dans un espace de Sobolev d'indice positif ($H^{1/2}$ si on travaille avec L^2) ;

— comme un gain de compacité : la suite $\big(\rho_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte dans L^p.

Un élément essentiel de la preuve est de supposer qu'il y a « assez de vitesses » afin de contrôler le « mauvais ensemble » où, en variables de Fourier, $v \cdot \xi$ est « petit ». C'est le sens de l'hypothèse (H2') de la partie VII. Ces énoncés jouent donc un rôle central dans la théorie des équations cinétiques, et notamment pour montrer l'existence de solutions pour l'équation de Boltzmann [1], pour l'étude de limites hydrodynamiques [6] où on cherche à relier différents niveaux de modélisation, la physique statistique à la mécanique des milieux continus, un des objectifs assignés par D. Hilbert au Congrès International de 1900 (6ème problème[1]), ou encore pour analyser la régularité de solutions de lois de conservation [8]. Ces problèmes impliquent en effet des termes non linéaires qui s'expriment comme des moyennes en vitesse de solutions d'équations cinétiques.

La version initiale est due à F. Golse, B. Perthame, R. Sentis [3]. Les améliorations essentielles consistent à travailler dans L^p, $p > 1$, et autoriser des estimations de $v\cdot\nabla_x f_n$ dans des espaces de Sobolev d'indices négatifs [2, 4, 7]. Le cas $p = 1$ est un peu particulier, mais il joue un rôle incontournable pour la dérivation des équations de Navier-Stokes à partir de l'équation de Boltzmann [5].

1. Boltzmann*'s work on the principles of mechanics suggests the problem of developing mathematically the limiting processes [...] which lead from the atomistic view to the laws of motion of continua*

Bibliographie

[1] R. Di Perna, P.-L. Lions, *On the Cauchy problem for Boltzmann equation : global existence and weak stability*, Ann. Math., 130 (1989) 321–366.

[2] R. Di Perna, P.-L. Lions, Y. Meyer, *L^p regularity of velocity average*, Ann. IHP. Anal. Non linéaire, 8 (1991) 271–287.

[3] F. Golse, B. Perthame, R. Sentis, *Un résultat de compacité pour les équations de transport et application au calcul de la valeur propre principale d'un opérateur de transport*, C. R. Acad. Sci. Paris 301 (1985), 341–344.

[4] F. Golse, P.-L. Lions, B. Perthame, R. Sentis, *Regularity of the moments of the solution of a transport equation*, J. Funct. Anal., 77 (1988) 434–460.

[5] F. Golse, L. Saint-Raymond, *Velocity averaging in L^1 for the transport equation*, . C. R. Acad. Sci., 334 (2002) 557–562.

[6] F. Golse, L. Saint-Raymond, *The Navier-Stokes limit of the Boltzmann equation for bounded collision kernels*, Invent. Math., 155 (2004) 81–161.

[7] B. Perthame, P. E. Souganidis, *A limiting case for velocity averaging*, Annales scientifiques de l'É.N.S., 31 (1998) 591–598.

[8] E. Tadmor, T. Tao, *Velocity averaging, kinetic formulations, and regularizing effects in quasi-linear PDEs*, Comm. Pure Appl. Math., 60 (2007) 1488-1521.

Remarques générales

Comme cela a été souligné plus haut, une proportion importante des candidats présents à l'épreuve n'ont tout simplement pas été en mesure d'élaborer de réponses cohérentes, même aux questions les plus simples du sujet. Les commentaires qui suivent s'appliquent au reste de la population des candidats. Les parties I, II et III ont été abordées par une très grande majorité de ces candidats. La moitié d'entre eux a poursuivi dans la partie IV. Les dernières parties ont été abordées par moins de 10% des copies.

Sur un nombre important de copies, des objets mathématiques sont manipulés sans que la question de leur existence, du sens qu'ils peuvent avoir, soit soulevée. La notion de fonction intégrable n'est pas suffisamment assimilée, les inégalités strictes et larges sont confondues, les passages à la limite ne sont pas justifiés, la manipulation des nombres complexes constitue une vraie barrière. Des calculs, de niveau L1-L2, sont un obstacle très important pour de nombreux candidats. Ce constat alerte sur le fait que les fondamentaux en analyse ne sont pas solidement acquis. Le jury invite donc à renforcer ces bases pendant la préparation au concours avant de s'aventurer plus loin. La notion d'holomorphie, plus avancée, est un désert pour la quasi-totalité des candidats.

Commentaires détaillés

Partie I

1. Cette question a été particulièrement discriminante. Le théorème de WEIERSTRASS n'est pas un automatisme pour de nombreux candidats. Un certain nombre de candidats s'est égaré dans des considérations très lointaines de l'objectif (considérations suivant le signe de g, notion de bases hilbertiennes qui n'en sont pas,...).
2. Cette question, qu'on pourrait qualifier « de cours », a encore été très discriminante. Beaucoup de candidats n'ont tout simplement pas soulevé la question de l'existence de l'intégrale, se contentant de majorer son module. Cette erreur a été sanctionnée. Le théorème de continuité sous le signe intégral n'est pas maîtrisé par au moins la moitié des candidats. L'hypothèse de mesurabilité par rapport à la variable d'intégration n'était pas le point discriminant de cette question.
3. Cette question, annoncée comme techniquement exigeante, a été abordée par une petite moitié des candidats mais très peu ont réussi à conclure correctement. Un certain nombre de candidats prétend établir le résultat sans utiliser l'argument de monotonie ce qui devrait les amener à se poser des questions. Nonobstant, un point positif est à relever : les candidats qui ont réellement abordé la question font la différence entre la notion de convergence simple et la convergence uniforme, ce qui a été valorisé.

Partie II

1. Cette question a été beaucoup abordée et globalement bien traitée. Toutefois, la manipulation d'inégalités strictes non valables a été sanctionnée et la notion d'intervalle n'est pas maîtrisée par de très nombreux candidats. Un argument de convexité aurait ravi le jury.
2. La proportion des candidats qui ont traité cette question est un peu en-deçà de la précédente. Il est à noter la même erreur que dans I.2. De plus, un nombre important de candidats pense que la borne inférieure d'un ensemble appartient forcément à l'ensemble ; de manière générale la notion de borne inférieure et de borne supérieure est insuffisamment acquise.
3. La notion d'holomorphie a fait peur à un nombre certain de candidats. La différence entre le théorème de dérivation sous le signe intégral et le théorème d'holomorphie sous le signe intégral n'est pas faite par beaucoup candidats. Il en va de même de la distinction entre une fonction de classe C^∞ et une fonction holomorphe. Pour la majoration, la restriction de domaine n'a pas été correctement faite par un nombre important de candidats qui pensent que la borne inférieure d'un ensemble y appartient forcément.
4. L'intégration par parties a été effectuée par la quasi-totalité des candidats. Mais les différents passages à la limite n'ont été justifiés que par un très faible nombre d'entre eux. Une bonne rédaction doit veiller à justifier l'existence des objets mathématiques qui sont manipulés. Le jury rappelle qu'une fonction dont l'intégrale sur $\mathbb{R}_+$ converge ne tend pas forcément vers 0 en $+\infty$.
5. Ces questions étaient principalement calculatoires et ne faisaient pas appel à des techniques propres aux fonctions holomorphes. Ces calculs sont d'un niveau L2 et le jury a été surpris et un peu désappointé de voir que ceux-ci posaient autant problème à des candidats à l'agrégation.
   (a) Cette question a été particulièrement discriminante. Un nombre important de candidats a seulement établi $\sigma(f) \leqslant 0$ et conclu directement $\sigma(f) = 0$. Le passage à l'exponentielle complexe n'est pas un réflexe : ceci est d'autant plus dommageable que la double intégration par parties n'a été que très rarement justifiée. Les notions de pôles et de fonctions méromorphes ne sont pas connues par une très grande majorité.
   (b) Cette question est similaire à la précédente et en a été le reflet. Un certain nombre de candidats a traité les deux questions ensemble, cette efficacité a été valorisée.

(c) La présence du t devant le sin a constitué un obstacle important sur la partie calculatoire. En ce sens, cette question a été discriminante bien que ces calculs soient élémentaires.

(d) Cette question n'a été abordée que par environ la moitié des candidats, ce qui constitue une surprise. Les conditions de non-intégrabilité ne sont pas maîtrisées. Le fait que la fonction ne tende pas vers 0 en $+\infty$, n'implique pas qu'elle n'est pas intégrable. Le jury a toutefois valorisé les candidats qui ont affirmé, sans justification, la non-intégrabilité de $t \mapsto e^{t^2-st}$ pour tout s.

6. (a) Cette question a été abordée par une très grande partie des candidats. Beaucoup ont effectué une intégration par parties, les justifications étaient bien plus rares. D'autres ont utilisé le théorème de Fubini, avec les justifications adéquates. Trop peu de candidats ont fait le lien avec la question II.4 qui donnait directement le résultat.

   (b) i. Un bon tiers des candidats a abordé cette question. L'existence de l'intégrale n'a pas été bien traitée. Le changement de variable, s'il est bien effectué, est trop rarement justifié, ce qui est dommageable. Le lien avec la transformée de Laplace a été bien fait.

   ii. Le lien avec la question I.1 était indiqué dans le sujet, le jury attendait donc une vraie justification et notamment le fait que $u \mapsto h(-\ln(u))$ est prolongeable par continuité en 0. La majorité des copies est passé à côté de cette difficulté. La notion d'injectivité a souvent été liée à la linéarité de la transformée de Laplace, en revanche le fait que Σ' soit un sous-espace vectoriel a été oublié dans la quasi-totalité des copies.

7. (a) Raisonner sur un problème de Cauchy pose toujours autant de problème. Le jury attendait simplement un argument présentant un problème de Cauchy linéaire. Certains candidats se sont aventurés dans l'écriture de l'équation sous la forme $X'(t) = f(t, X(t))$ mais n'ont quasiment jamais réussi à définir f correctement ou à donner les hypothèses correctes du théorème de Cauchy-Lipschitz, qui ne nécessitait pas ici de cadre sophistiqué.

   (b) Cette question nécessitait de faire la synthèse entre différentes questions de la partie. Elle a été abordée par une grande moitié des candidats et globalement bien traitée.

   (c) Cette question, nécessitant les résultats des calculs fait en II.5, a été moins traitée. Un oubli important pour de nombreux candidats était la vérification que P_0 convenait à toutes les fonctions considérées et dans une moindre mesure l'argument d'unicité n'a pas toujours été donné.

Partie III

1. (a) Cette question, traitée par de nombreux candidats, semblait élémentaire. Diviser par 0 semble ne pas poser de problème à trop de candidats et cette négligence a été fortement pénalisée. La confusion entre sh et sin est à noter dans quelques copies.

   (b) La différence entre la notion de fonction intégrable et de fonction admettant une intégrale impropre convergente, subtilité « classique » du cours d'intégration, n'est pas maîtrisée par un très grand nombre de candidats. Lorsque cette distinction était clairement énoncée, une affirmation de la non intégrabilité de $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$, sans démonstration, a été valorisée. Cette question est révélatrice de lacunes sur les fonctions intégrables.

2. (a) Cette question élémentaire, traitée par un grand nombre, a été discriminante. La mesurabilité de la fonction (ici la continuité était suffisante) a été négligée par bien trop de candidats. Certains d'entre eux semblent penser que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ suffit à démontrer l'intégrabilité de f au voisinage de $+\infty$. Certains candidats ont utilisé leur connaissance sur la densité d'une loi gaussienne centrée réduite, une démarche qui a été valorisée.

   (b) Cette question n'a été abordée que par une petite moitié des candidats et très mal traitée par une grande partie. Le jury attire l'attention sur le fait que la notion de fonction holomorphe et la formule de Cauchy ne sont pas connues d'un très grand nombre.

(c) Cette question n'a pas posé de problème en admettant la question précédente, une bonne réaction des candidats.

(d) Cette question a été traitée par un grand nombre et s'est avérée discriminante. Une moitié a abordé la question à l'aide de la formule d'inversion de FOURIER mais trop de candidats n'ont pas vérifié que $\widehat{f}$ était bien intégrable : il suffisait de le dire au vu des questions précédentes. L'autre moitié a traité cette question directement par le calcul ; on notera que certaines erreurs d'inattention se glissent dans les formules.

3. Cette question calculatoire s'est encore avérée discriminante. Trop de candidats oublient de justifier que la fonction est bien intégrable pour pouvoir déterminer sa transformée de FOURIER. Dans la partie calculatoire, les passages à la limite ne sont pas justifiés. Le jury insiste donc à nouveau sur le fait qu'il souhaite voir des justifications d'existence des outils mathématiques manipulés.

4. (a) i. Cette question faisait appel à l'espace de SCHWARTZ et un effort louable a été fait par les candidats. Les propriétés de cet espace en lien avec la transformée de FOURIER sont connues par une proportion satisfaisante de candidats. Toutefois, la justification que y'' admet une transformée de FOURIER n'a pas été un grand succès.

   ii. Cette question n'a été que peu abordée. Il est à souligner que la rédaction de cette question n'a été convaincante que sur un nombre très faible de copies.

   (b) Ces deux questions n'ont été que très peu abordées et mal comprises. La présence d'un y' ou y'' dans cette question a été rédhibitoire.

Partie IV

Cette partie n'a été abordée que par environ la moitié des candidats.

1. La mesurabilité de h a été à nouveau négligée. Les calculs sur les intégrales doubles n'ont pas toujours été justifiés, voir non maîtrisés (confusion entre $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$). Le jury attendait simplement d'évoquer un théorème de FUBINI, avec une justification adéquate des calculs.
2. (a) La justification de l'existence de la transformée de FOURIER a été satisfaisante. Mais les mêmes remarques qu'à la question précédente s'appliquent.

   (b) Des calculs parfois étranges sur la norme euclidienne d'un vecteur ont été relevés, voire certains candidats n'ont pas compris que $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ était une variable vectorielle et non une simple variable réelle.
3. La densité des fonctions de classe C^1, rappelée en début de sujet, a aidé les candidats aguerris. Toutefois, certains ne font pas la différence entre une fonction de classe C^1 et une fonction intégrable.
4. Pour cette question, une affirmation du résultat en utilisant les questions précédentes, sans justification supplémentaire, a été pénalisée.

Partie V, VI et VII

Comme dit dans le préambule, ces parties n'ont été que très peu abordées. La question V.4.a a révélé une grande fragilité sur les espaces de HILBERT puisque une très grande majorité des candidats qui ont abordé cette question, ont démontré que $\|\cdot\|_{H^\alpha}$ était une norme. Le jury souhaite que les candidats fassent la différence entre un espace vectoriel normé et un espace préhilbertien. Il fallait remarquer que le cadre fonctionnel conduisait à introduire une forme hermitienne étant donné que les transformées de FOURIER étaient à valeurs complexes : cet oubli a été flagrant. De même, dans la question V.4.b(iii), la complétude de H^α n'est pas immédiate puisqu'il faut montrer que la suite converge *dans* H^α, ce qui n'a été fait que de manière exceptionnelle. Enfin, certains candidats n'ayant traité que très peu de questions dans les parties I à IV se sont aventurés dans ces dernières parties, notamment avec la question VII.1 où le jury a été surpris de voir des représentations d'une fonction C^∞ présentant des points anguleux !

4.2 Corrigé de l'épreuve écrite d'Analyse et Probabilités

Exercices préliminaires

1. D'après le théorème de WEIERSTRASS, il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de polynômes qui converge uniformément vers g sur $[0,1]$. Ensuite, plusieurs démonstrations sont possibles, en voilà une : d'après les hypothèses et par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}\int_0^1 g^2(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \big(g^2(t) - g(t)P_n(t)\big)\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \|g - P_n\|_{\infty,[0,1]} \int_0^1 |g(t)|\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

   Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 g^2(t)\mathrm{d}t = 0$. Donc, comme $t \mapsto g^2(t)$ est continue et positive sur $[0,1]$, d'intégrale nulle, on obtient que g est l'application nulle.

2. Pour tout $\xi \in \mathbf{R}^N$, $|e^{-ix\cdot\xi}f(x)| \leqslant |f(x)|$, avec $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$, donc $\widehat{f}$ est bien définie sur $\mathbf{R}^N$. De plus
   — $\forall \xi \in \mathbf{R}^N$, $x \mapsto e^{-ix\cdot\xi}f(x)$ est mesurable sur $\mathbf{R}^N$
   — $\forall x \in \mathbf{R}^N$, $\xi \mapsto e^{-ix\cdot\xi}f(x)$ est continue sur $\mathbf{R}^N$
   — $\forall x \in \mathbf{R}^N$, $\forall x \in \mathbf{R}^N$, $|e^{-ix\cdot\xi}f(x)| \leqslant |f(x)|$, avec $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$.
   Ainsi, par le théorème de continuité sous le signe intégral, $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbf{R}^N$. Enfin,

$$\forall \xi \in \mathbf{R}^N,\ |\widehat{f}(\xi)| \leqslant \int_{\mathbf{R}^N} |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

   ce qui prouve que $\widehat{f}$ est bornée sur $\mathbf{R}^N$.

3. Soit $\varepsilon > 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers u donc

$$\forall x \in D,\ \exists n_{x,\varepsilon} \in \mathbf{N},\ |u_{n_{x,\varepsilon}}(x) - u(x)| \leqslant \varepsilon/2.$$

   On traduit alors la continuité de $t \mapsto (u_{n_{x,\varepsilon}} - u)(t)$:

$$\exists r_{x,\varepsilon} > 0,\ \forall t \in D,\ \|x - t\| < r_{x,\varepsilon},\ |u_{n_{x,\varepsilon}}(t) - u(t)| \leqslant \varepsilon.$$

   La famille $\big\{B(x, r_{x,\varepsilon}) \cap D,\ x \in D\big\}$ constitue un recouvrement du compact D, on peut donc en extraire un sous-recouvrement fini : $(B(x_i, r_{x_i,\varepsilon}) \cap D)_{i\in\{1,..,p_\varepsilon\}}$. On pose $N_\varepsilon = \max_{i\in\{1,..,p_\varepsilon\}} n_{x_i,\varepsilon}$, qui est donc fini. Soit $x \in D$ et $n \geqslant N_\varepsilon$. Alors il existe $i \in \{1,..,p_\varepsilon\}$ tel que $x \in B(x_i, r_{x_i,\varepsilon}) \cap D$ et la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ étant décroissante, on en déduit

$$0 \leqslant u_n(x) - u(x) \leqslant u_{N_\varepsilon}(x) - u(x) \leqslant u_{n_{x_i,\varepsilon}(x)} - u(x) \leqslant \varepsilon$$

   Ainsi, on a exhibé un entier N_ε tel que

$$\forall x \in D,\ \forall n \geqslant N_\varepsilon,\ |u_n(x) - u(x)| \leqslant \varepsilon,$$

   qui prouve bien la convergence uniforme de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sur D.

Autour de la transformée de LAPLACE

1. Soit $s \in \Lambda(f)$, alors $\forall s' > s$, $\forall t \geqslant 0$, $e^{-s't} \leqslant e^{-st}$ et donc $|f(t)|e^{-s't} \leqslant |f(t)|e^{-st}$. Ainsi $t \mapsto f(t)e^{-s't}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et donc $s' \in \Lambda(f)$. Enfin, si $\Lambda(f)$ est non vide, on a par ce qui précède que $\forall (s,s') \in \Lambda(f)$, $[s,s'] \in \Lambda(f)$, donc $\Lambda(f)$ est un convexe de $\mathbf{R}$ et de plus $[s,+\infty[\in \Lambda(f)$, ce qui prouve que $\Lambda(f)$ est un intervalle non borné à droite.

2. Soit $z \in P_{\sigma(f)}$. Alors, comme $\forall t \geqslant 0$ on a $|e^{-zt}f(t)| = e^{-\mathrm{Re}(z)t}|f(t)|$ qui est intégrable sur $\mathbf{R}_+$, $L(f)$ est bien définie sur $P_{\sigma(f)}$.
3. On vérifie les points suivants :
   — $\forall t \in \mathbf{R}_+$, $z \mapsto e^{-zt}f(t)$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $\dfrac{\partial^n}{\partial z^n}\left(e^{-zt}f(t)\right) = (-1)^n t^n e^{-zt} f(t)$.
   — $\forall z \in P_{\sigma(f)}$, $t \mapsto e^{-zt}f(t)$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+$
   — Soit K un compact de $P_{\sigma(f)}$ alors il existe $\gamma \in \mathbf{R}$, tel que $e^{-\gamma t}|f(t)|$ est $L^1(\mathbf{R})$ et tel que $\forall z \in K$, $\mathrm{Re}(z) > \gamma$. Il s'ensuit que $\forall z \in K$, $\forall t \in \mathbf{R}_+$
   $$\left|e^{-zt}f(t)\right| = e^{-\mathrm{Re}(z)t}|f(t)| = e^{-(\mathrm{Re}(z)-\gamma)t}e^{-\gamma t}|f(t)|.$$
   Or, dans ces conditions, $t \mapsto e^{-(\mathrm{Re}(z)-\gamma)t}$ est bornée par 1. Ainsi $\forall z \in K$, $\forall t \in \mathbf{R}_+$
   $$\left|e^{-zt}f(t)\right| \leqslant e^{-\gamma t}|f(t)|$$
   et le majorant est intégrable sur $\mathbf{R}_+$.

   On peut appliquer le théorème d'holomorphie sous le signe intégral et on obtient que $L(f)$ est holomorphe sur $P_{\sigma(f)}$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall z \in P_{\sigma(f)}$,
   $$L(f)^{(n)}(z) = \int_{\mathbf{R}} (-1)^n t^n e^{-zt} f(t)\,\mathrm{d}t = L\Big((-1)^n t^n f(t)\Big)(z)$$
4. Soit $b \in \mathbf{R}_+$. Par intégration par parties, pour $z \in P_\beta$
   $$\int_0^b f'(t)e^{-zt}\,\mathrm{d}t = \left[f(t)e^{-zt}\right]_0^b + z\int_0^b f(t)e^{-zt}\,\mathrm{d}t$$
   Mais comme $\beta > \sigma(f')$, $\displaystyle\int_0^b f'(t)e^{-zt}\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand b tend vers $+\infty$, et l'intégrale $\displaystyle\int_0^b f(t)e^{-zt}\,\mathrm{d}t$ admet aussi une limite quand b tend vers $+\infty$, donc $t \mapsto f(t)e^{-zt}$ admet une limite finie en $+\infty$ et cette limite ne peut vérifier que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)e^{-zt} = 0$ puisque $t \mapsto f(t)e^{-zt}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+$. Ainsi $\forall z \in P_\beta$
   $$L(f')(z) = zL(f)(z) - f(0).$$
5. On distingue les cas suivants :
   (a) — Si $\omega = 0$, la fonction est nulle et donc $\sigma(f) = -\infty$ et $L(f) = 0$.
   — Si $\omega \neq 0$, $t \mapsto \sin(\omega t)$ est continue sur $\mathbf{R}_+$ et $\forall t \geqslant 0$, $\forall z \in P_0$, $|\sin(wt)e^{-zt}| = |\sin(\omega t)|e^{-\mathrm{Re}(z)t} \leqslant e^{-\mathrm{Re}(z)t}$, et ce majorant est intégrable sur $\mathbf{R}_+$, donc $\sigma \leqslant 0$. De plus, $t \mapsto \sin(\omega t)$ n'est pas intégrable sur $\mathbf{R}_+$, donc $\sigma \geqslant 0$. Il s'ensuit que $\sigma = 0$ et $\forall z \in P_0$, on a
   $$\begin{aligned} L(\sin(\omega t))(z) &= \int_0^{+\infty} \sin(\omega t)e^{-zt}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})e^{-zt}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2i}\left[\frac{e^{t(i\omega - z)}}{i\omega - z} + \frac{e^{-t(i\omega+z)}}{i\omega + z}\right]_0^{+\infty}. \end{aligned}$$
   Or lorsque $\mathrm{Re}(z) > 0$ on a
   $$|e^{t(i\omega - z)}| = e^{-t\mathrm{Re}(z)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0,$$

et

$$|e^{-t(i\omega+z)}| = e^{-t\mathrm{Re}(z)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi, $\forall z \in P_0$, on

$$\begin{aligned} L(\sin(\omega t))(z) &= -\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{i\omega - z} + \frac{1}{i\omega + z}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{i\omega + z}{\omega^2 + z^2} + \frac{i\omega - z}{\omega^2 + z^2}\right) \\ &= \frac{\omega}{\omega^2 + z^2}. \end{aligned}$$

Les pôles sont $\pm i\omega$ et on obtient bien une fonction méromorphe comme fraction rationnelle.

(b) De même qu'à la question précédente, le calcul donne $\sigma = 0$ et $\forall z \in P_0$, $L(\cos(\omega t))(z) = \dfrac{z}{\omega^2 + z^2}$. Ainsi les pôles sont $\pm i\omega$ et on a bien une fonction méromorphe comme fraction rationnelle.

(c) De même que précédemment, $\sigma = 0$. En utilisant les résultats de la question II.3, puisque toutes hypothèses sont validées, on a immédiatement

$$L(-t\sin(\omega t))(z) = L(\sin(\omega t))'(z) = \frac{-2z\omega}{(\omega^2 + z^2)^2},$$

et donc $L(t\sin(\omega t))(z) = \dfrac{2z\omega}{(\omega^2 + z^2)^2}$. Ainsi les pôles sont $\pm i\omega$, ce sont des pôles doubles et on a bien une fonction méromorphe comme fraction rationnelle.

(d) Ici $\sigma = +\infty$ car $\forall s \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{t^2 - st} = +\infty$, et la fonction n'admet pas de transformée de Laplace.

6. (a) Puisque f est continue, h est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+$. Une intégration par parties donne alors

$$\forall b > 0, \int_0^b f(t)e^{-(x+a)t}\mathrm{d}t = \int_0^b h'(t)e^{-at}\mathrm{d}t = \left[h(t)e^{-at}\right]_0^b + a\int_0^b e^{-at}h(t)\mathrm{d}t$$

Le membre de gauche admet une limite (égale à $Lf(x+a)$) quand $b \to +\infty$.
On a donc

$$Lf(x+a) = \lim_{b\to+\infty}\left(h(b)e^{-ab} + a\int_0^b e^{-at}h(t)\mathrm{d}t\right)$$

Par ailleurs, h admet une limite finie en $+\infty$ et $e^{-ab} \to 0$ quand b tend vers $+\infty$ (car $a > 0$). Ainsi,

$$Lf(x+a) = \lim_{b\to+\infty} a\int_0^b e^{-at}h(t)\, dt = a\int_0^{+\infty} e^{-at}h(t)\mathrm{d}t$$

L'existence de l'intégrale étant une conséquence de l'existence des autres limites.

(b) i. La fonction $u \mapsto -\ln(u)$ est C^1 et bijective de $]0,1[$ sur $\mathbf{R}_+^*$; on peut donc poser $u = e^{-t}$ pour obtenir (ce qui inclut l'existence de l'intégrale du membre de droite)

$$\int_0^{+\infty} e^{-t(n+1)}h(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 u^n h(-\ln(u))\, \mathrm{d}u.$$

Par ailleurs le membre de gauche vaut $\dfrac{1}{n+1}Lf(x+(n+1))$ et est nul. Ainsi

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \int_0^1 u^n h(-\ln(u))\, \mathrm{d}u = 0.$$

ii. La fonction $g \ : \ u \mapsto h\left(-\ln(u)\right)$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0 (car h admet une limite finie en $+\infty$). On en déduit que g est nulle par la question 1 de la partie I appliquée à la partie réelle et imaginaire de g. Quand u varie dans $[0,1]$, $-\ln(u)$ varie dans $\mathbf{R}^+$ et h est donc nulle sur $\mathbf{R}^+$.

Soit $f \in \Sigma'$. Supposons que $Lf = 0$; la question précédente indique que $\forall x$, une primitive de $u \mapsto e^{-xu}f(u)$ est nulle sur $\mathbf{R}^+$. Pour tout x de E, $u \mapsto e^{-xu}f(u)$ est donc nulle sur $\mathbf{R}^+$; f est donc nulle sur $\mathbf{R}^+$. Ainsi L est injective sur Σ' puisque L est linéaire sur Σ', sous espace vectoriel de Σ.

7. (a) Il suffit d'énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.

(b) Tout d'abord, comme $f'' = -f + 2\cos$, on a $\sigma(f'') < +\infty$. On pose alors

$$\beta = \max(\sigma(f_1), \sigma(f_1'), \sigma(f_1''))$$

pour pouvoir utiliser les résultats de la question 4. Alors $\forall z \in P_\beta$, il vient

$$\begin{aligned} L(f_1'')(z) &= zL(f_1')(z) - f_1'(0) = zL(f_1')(z) - 1 \\ &= z(zL(f_1)(z) - f_1(0)) - 1 \\ &= z^2L(f_1)(z) - 1 \end{aligned}$$

Or $f_1'' = 2\cos(t) - f_1$; par linéarité de la transformée de Laplace et en utilisant la question 4 de cette partie, $\forall z \in P_{\beta'}$ avec $\beta' = \max(0,\beta)$, on obtient

$$L(f_1'')(z) = 2\frac{z}{z^2+1} - L(f_1)(z).$$

Ainsi

$$z^2L(f_1)(z) - 1 = 2\frac{z}{z^2+1} - L(f_1)(z)$$

soit, $\forall z \in P_\beta$,

$$(1+z^2)L(f_1)(z) = \frac{2z}{z^2+1} + 1.$$

Et donc $\forall z \in P_\beta$ on a

$$L(f_1)(z) = \frac{2z}{(z^2+1)^2} + \frac{1}{1+z^2}.$$

(c) Avec les questions 5, $\forall z \in P_0$ (P_0 convenant à toutes les fonctions considérées), on obtient

$$L(\sin(t))(z) = \frac{1}{1+z^2} \quad \text{et} \quad L(t\sin(t)) = \frac{2z}{(1+z^2)^2}.$$

On peut donc penser, par injectivité de L sur Σ', que $\forall t \in \mathbf{R}_+$, $f_1(t) = t\sin(t) + \sin(t)$ et on vérifie que f est définie sur $\mathbf{R}$ et est solution du $(PB1)$; on conclut par unicité. Ainsi, $\forall t \in \mathbf{R}$, $f_1(t) = t\sin(t) + \sin(t)$.

Transformée de Fourier en dimension 1

1. (a) On distingue les cas suivants, $\forall \xi \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} \widehat{f_b}(\xi) &= \int_{-b}^{b} e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x \\ &= \begin{cases} \dfrac{2\sin(b\xi)}{\xi} & \text{si} \quad \xi \neq 0 \\ 2b & \text{si} \quad \xi = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

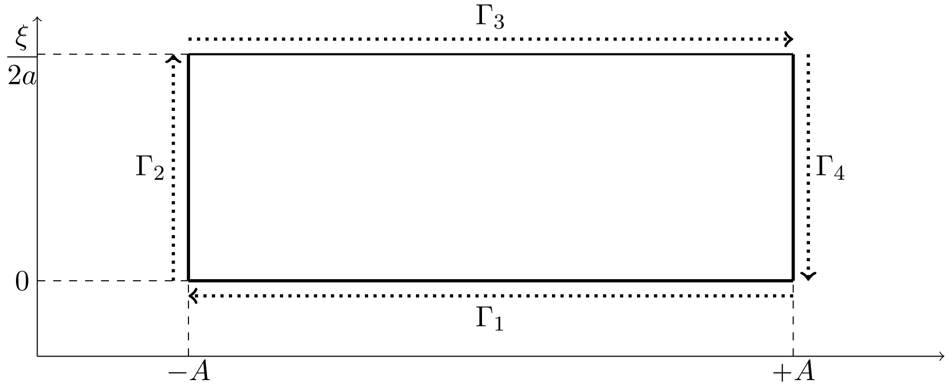


FIGURE 4.1 – Intégration sur le contour Γ.

(b) La fonction f_b est bien continue sur $\mathbf{R}$ mais par contre elle n'est pas intégrable :

$$\begin{aligned}\int_1^X \frac{|\sin(b\xi)|}{\xi}\,\mathrm{d}\xi &\geqslant \int_1^X \frac{|\sin(b\xi)|^2}{\xi}\,\mathrm{d}\xi\\ &\geqslant \int_1^X \frac{1}{2\xi}\,\mathrm{d}\xi - \int_1^X \frac{\cos(2b\xi)}{2\xi}\,\mathrm{d}\xi\\ &\geqslant \int_1^X \frac{1}{2\xi}\,\mathrm{d}\xi - \frac{\sin(2bX)}{4X} + \frac{\sin(2b)}{4X} - \int_1^X \frac{\sin(2b\xi)}{2b\xi^2}\,\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

avec le premier terme qui diverge et les autres qui convergent quand $X \to \infty$. Ainsi $\widehat{f_b}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ donc sur $\mathbf{R}$.

2. (a) La fonction f_a est continue sur $\mathbf{R}$, paire et $o(1/x^2)$ en $+\infty$ donc f_a est intégrable sur $\mathbf{R}$.

(b) On considère le rectangle $\Gamma = [-A, A] \times [0, \frac{\xi}{2a}]$ et on note $\Gamma_1 = [-A, A] \times \{0\}$, $\Gamma_2 = \{A\} \times [0, \frac{\xi}{2a}]$, $\Gamma_3 = [-A, A] \times \{\frac{\xi}{2a}\}$, $\gamma_4 = \{-A\} \times [0, \frac{\xi}{2a}]$ parcouru dans le sens trigonométrique Ce contour Γ est fermé et g est holomorphe sur $\mathbf{C}$ donc $\int_\Gamma g(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

On a alors

$$\int_{\Gamma_1} g(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-A}^{A} e^{-at^2}\,\mathrm{d}t$$

et

$$\int_{\Gamma_3} g(z)\,\mathrm{d}z = \int_{A}^{-A} e^{-a(x+i\frac{\xi}{2a})^2}\,\mathrm{d}t = -\int_{-A}^{A} e^{-(\sqrt{a}x+i\frac{\xi}{2\sqrt{a}})^2}\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_{\Gamma_2} g(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(A+it)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-aA^2} e^{-i2aAt} e^{-at^2}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma_2} g(z)\,\mathrm{d}z\right| &\leqslant e^{-aA^2} \textstyle\int_0^{\frac{\xi}{2a}} \left|e^{-i2aAt} e^{-at^2}\right|\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant e^{-aA^2} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

et

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{\Gamma_2} g(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

On obtient la même conclusion pour Γ_4. Ainsi, en faisant tendre A vers $+\infty$ et en utilisant que $\int_\Gamma g(z)\,\mathrm{d}z = 0$, on obtient

$$\lim_{A\to+\infty} \left(\int_{-A}^{A} e^{-at^2}\,\mathrm{d}t - \int_{-A}^{A} e^{-(\sqrt{a}x+i\frac{\xi}{2\sqrt{a}})^2}\,\mathrm{d}t \right) = 0$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}} e^{-(\sqrt{a}x+i\frac{\xi}{\sqrt{a}})^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbf{R}} e^{-at^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{\mathbf{R}} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}.\end{aligned}$$

(c) Pour tout $\xi \in \mathbf{R}$ on a

$$\begin{aligned}\widehat{f_a}(\xi) &= \int_{\mathbf{R}} e^{-ax^2}e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbf{R}} e^{-(\sqrt{a}x+i\frac{\xi}{2\sqrt{a}})^2}e^{(i\frac{\xi}{2\sqrt{a}})^2}\,\mathrm{d}x\\ &= e^{(i\frac{\xi}{2\sqrt{a}})^2}\int_{\mathbf{R}} e^{-(\sqrt{a}x+i\frac{\xi}{2\sqrt{a}})^2}\,\mathrm{d}x\\ &= e^{-\frac{\xi^2}{4a}}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} = f_a\left(\frac{\xi}{2a}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}.\end{aligned}$$

(d) Ainsi, comme f_a admet une transformée de Fourier, on déduit de ce qui précède que $\widehat{f_a}$ admet aussi une transformée de Fourier et on écrit, $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}\widehat{\widehat{f_a}}(x) &= \int_{\mathbf{R}} e^{-ix\xi}\widehat{f_a}(\xi)\,d\xi\\ &= \int_{\mathbf{R}} e^{-ix\xi}f_a\left(\frac{\xi}{2a}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\,d\xi\\ &= 2a\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\int_{\mathbf{R}} e^{-i2axy}f_a(y)\,dy\\ &= 2\sqrt{\pi a}\int_{\mathbf{R}} e^{-i2axy}f_a(y)\,dy\\ &= 2\sqrt{\pi a}\widehat{f_a}(2ax)\\ &= 2\sqrt{\pi a}f_a(x)\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\\ &= 2\pi f_a(x).\end{aligned}$$

On retrouve ainsi la formule d'inversion de Fourier. D'ailleurs on pouvait aussi établir cette question en utilisant la formule d'inversion de Fourier en justifiant bien que $\widehat{f}$ est intégrable.

3. La fonction K est continue sur $\mathbf{R}$, paire et intégrable sur $[0, +\infty[$ comme fonction de référence, donc K est intégrable sur $\mathbf{R}$ et admet une transformée de Fourier. On a alors, $\forall \xi \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}\widehat{g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{0} e^{x}e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} e^{-x}e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{e^{x}e^{-ix\xi}}{1-i\xi}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-x}e^{-ix\xi}}{-1-i\xi}\right]_{0}^{+\infty}\\ &= \frac{1}{1-i\xi} + \frac{1}{1+i\xi}\\ &= \frac{2}{1+\xi^2}.\end{aligned}$$

On remarquera que les passages à la limite sont justifiés car $|e^{x}e^{-ix\xi}| = e^{x} \underset{x\mapsto-\infty}{\longrightarrow} 0$ et $|e^{-x}e^{-ix\xi}| = e^{-x} \underset{x\mapsto+\infty}{\longrightarrow} 0$.

4. (a) i. Soit y une solution de $y''-y = f$, soit $y'' = f+y \in \mathscr{S}(\mathbf{R})$ donc y'' admet une transformée

de FOURIER et $\forall \xi \in \mathbf{R}$ on peut écrire

$$\begin{aligned}\widehat{y''}(\xi) &= \int_{\mathbf{R}} e^{-ix\xi} y''(x)\,\mathrm{d}x \\ &\quad \text{par double IPP, licite puisque } y \in \mathscr{S}(\mathbf{R}) \\ &= (i\xi)^2 \int_{\mathbf{R}} e^{-ix\xi} y(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\xi^2 \widehat{y}(\xi).\end{aligned}$$

Et ainsi, si y est solution du problème, on a $\forall \xi \in \mathbf{R}$

$$\widehat{y''}(\xi) - \widehat{y}(\xi) = \widehat{f}(\xi)$$

soit

$$-\xi^2 \widehat{y}(\xi) - \widehat{y}(\xi) = \widehat{f}(\xi),$$

ou encore

$$\widehat{y}(\xi) = -\frac{1}{1+\xi^2}\widehat{f}(\xi)$$

ii. On va procéder par analyse et synthèse. Supposons que l'équation admet une solution y dans $\mathscr{S}(\mathbf{R})$, alors y admet une transformée de FOURIER, qui par la question précédente, vérifie $\forall \xi \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned}\widehat{y}(\xi) &= -\frac{1}{1+\xi^2}\widehat{f}(\xi) = -\frac{1}{2}\widehat{g}(\xi)\widehat{f}(\xi) \\ &= -\frac{1}{2}\widehat{g*f}(\xi).\end{aligned}$$

Comme la transformée de FOURIER est un isomorphisme sur $\mathscr{S}(\mathbf{R})$, on obtient

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbf{R}, \quad y(x) &= -\frac{1}{2} g * f(x) \\ &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} e^{-|x-t|} f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Pour l'étape de synthèse, on pose, $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}y(x) &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} e^{-|x-t|} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2}e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}e^{x}\int_{x}^{\infty} e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Ainsi y appartient à $\mathscr{S}(\mathbf{R})$ et est bien solution du problème donné.

(b) i. Pour tout $\xi \in \mathbf{R}$, on a $|g(\xi)| \leqslant |\widehat{f}(\xi)|$. Donc $g \in L^2(\mathbf{R})$ et comme la transformée de FOURIER est un isomorphisme sur $L^2(\mathbf{R})$, il existe un unique $y \in L^2(\mathbf{R}^2)$ tel que $\widehat{y} = g$.

ii. D'après la question précédente, $\forall \xi \in \mathbf{R}$, $-(1+\xi^2)\widehat{y}(\xi) = \widehat{f}(\xi)$. Ainsi, $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$, par l'isomorphisme de PLANCHEREL, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}} y(x)(-\varphi(x) + \varphi''(x))\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \widehat{y}(\xi)(-\widehat{\varphi}(\xi) + \widehat{\varphi''}(\xi))\mathrm{d}\xi \\ &\quad \text{on utilise alors que } \xi^2\widehat{\varphi}(\xi) = -\widehat{\varphi''}(\xi) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \widehat{y}(\xi)(-\widehat{\varphi}(\xi) - \xi^2\widehat{\varphi}(\xi))\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} -\widehat{y}(\xi)(1+\xi^2)\widehat{\varphi}(\xi)\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \widehat{f}(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\mathbf{R}} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Transformée de Fourier en dimension 2

1. Par le théorème de Fubini-Tonelli, on a $h \in L^1(\mathbf{R}^2)$:
$$\int_{\mathbf{R}^2} h(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} e^{-ax_1^2}\,\mathrm{d}x_1 \times \int_{\mathbf{R}} e^{-ax_2^2}\,\mathrm{d}x_2 < +\infty.$$
Et de même par le théorème de Fubini-Lebesgue, $\forall \xi \in \mathbf{R}$
$$\begin{aligned}\widehat{h}(\xi) &= \int_{\mathbf{R}^2} e^{-i(x_1\xi_1+x_2\xi_2)}e^{-(ax_1^2+ax_2^2)}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\\ &= \int_{\mathbf{R}} e^{-ix_1\xi_1}e^{-ax_1^2}\,\mathrm{d}x_1 \times \int_{\mathbf{R}} e^{-ix_1\xi_2}e^{-ax_2^2}\,\mathrm{d}x_2\\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}e^{-\frac{\xi_1^2}{4a}}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}e^{-\frac{\xi_2^2}{4a}}\\ &= \frac{\pi}{a}e^{-\frac{(\xi_1^2+\xi_1^2)}{4a}}.\end{aligned}$$

2. (a) Comme $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ sont continues et à support compact, elles appartiennent à $L^1(\mathbf{R}^2)$ et admettent une transformée de Fourier. On a de plus par intégration par parties, licites puisque les fonctions sont à support compact, $\forall \xi \in \mathbf{R}^2$
$$\begin{aligned}\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_1}}(\xi) &= \int_{\mathbf{R}^2} e^{-ix\cdot\xi}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -\int_{\mathbf{R}^2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(e^{-ix\cdot\xi}\right)f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= +i\xi_1\widehat{f}(\xi).\end{aligned}$$

   (b) De même, on a
$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_2}}(\xi) = +i\xi_2\widehat{f}(\xi).$$
Ainsi, d'après ce qui précède,
$$|\xi_1\widehat{f}(\xi)| = \left|\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_1}}(\xi)\right| \leqslant \left\|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right\|_1$$
et
$$|\xi_2\widehat{f}(\xi)| = \left|\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_2}}(\xi)\right| \leqslant \left\|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\|_1.$$
Alors, on obtient
$$|\widehat{f}(\xi)|^2(\xi_1^2+\xi_2^2) \leqslant \left\|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right\|_1^2 + \left\|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\|_1^2 = C_f^2.$$
Il s'ensuit que, $\forall \xi \in \mathbf{R}^2$ non nul, on a
$$|\widehat{f}(\xi)| \leqslant \frac{C_f}{\|\xi\|},$$

3. Le résultat de la question précédente est vrai pour f de classe C^1 à support compact. Ensuite, on raisonne par densité des fonctions C^1 à support compact dans $L^1(\mathbf{R})$. Soit $f \in L^1(\mathbf{R}^2)$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\phi_\varepsilon \in C^1$ et à support compact telle que $\|f - \phi_\varepsilon\|_1 < \varepsilon$ et, $\forall \xi \in \mathbf{R}^2$, on a
$$\begin{aligned}|\widehat{f}(\xi)| &\leqslant |\widehat{f}(\xi) - \widehat{\phi_\varepsilon}(\xi)| + |\widehat{\phi_\varepsilon}(\xi)|\\ &\leqslant \|f-\phi_\varepsilon\|_1 + |\widehat{\phi_\varepsilon}(\xi)|.\end{aligned}$$
Or il existe $A_\varepsilon > 0$ tel que $\|\xi\| > A_\varepsilon$ implique $|\widehat{\phi_\varepsilon}(\xi)| \leqslant \varepsilon$. Ainsi, $\forall \xi \in \mathbf{R}^2$ tel que $\|\xi\| > A_\varepsilon$ on a $|\widehat{f}(\xi)| \leqslant 2\varepsilon$. Ceci montre bien que $\displaystyle\lim_{\|\xi\|\mapsto+\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.

4. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question précédente, il existe $A_\varepsilon > 0$ tel que si $\xi \in \mathbf{R}^2$ vérifie $\|\xi\| > A_\varepsilon$ alors $|\widehat{f}(\xi)| \leqslant \varepsilon$. La fonction $\widehat{f}$ est continue sur le compact $B(0, A_\varepsilon + 1)$, donc d'après le théorème de Heine, $\widehat{f}$ est uniformément continue sur $B(0, A_\varepsilon + 1)$. On en déduit qu'il existe $\eta \in]0, 1[$ tel que $\forall(\xi, \mu) \in B(0, A_\varepsilon + 1)$, la condition $\|\xi - \mu\| < \eta$ implique $|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\mu)| \leqslant \varepsilon$.
   Soit $(\xi, \mu) \in \mathbf{R}^2$ tel que $\|\xi - \mu\| < \eta$. On a alors
   — Soit $\|\xi\| > A_\varepsilon$ et $\|\mu\| > A_\varepsilon$, et dans ce cas $|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\mu)| \leqslant |\widehat{f}(\xi)| + |\widehat{f}(\mu)| \leqslant 2\epsilon$.
   — Soit $\|\xi\| \leqslant A_\varepsilon$ ou $\|\mu\| \leqslant A_\varepsilon$; comme $\|\xi - \mu\| \leqslant \eta < 1$, ξ et μ appartiennent à $B(0, A_\varepsilon + 1)$ et donc $|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\mu)| \leqslant \varepsilon$.
   On a donc montré que $\forall \epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\|\xi - \mu\| \leqslant \eta$ implique $|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\mu)| \leqslant 2\varepsilon$. Ainsi $\widehat{f}$ est bien uniformément continue.

Etude d'un espace de Hilbert

1. On a $\forall h \in \mathbf{R}^2$
$$|e^{-ix\cdot h} - 1|^2 = |\cos(x\cdot h) - 1|^2 + |\sin(x \cdot h)|^2 \leqslant |x\cdot h|^2 + |x \cdot h|^2 \leqslant 2\|x\|^2\,\|h\|^2$$
   Donc, $\forall n \in \mathbf{N}$ et $\forall x \in B(0, R)$, on a
$$|e^{-ix\cdot h_n} - 1|^2 \leqslant 2R^2\,\|h_n\|^2$$
   ce qui prouve la convergence uniforme demandée.
2. On effectue la changement de variable en polaire, de jacobien r ; on a donc, en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli (qui s'applique puisque toutes les fonctions considérées sont positives),
$$\int_{\mathbf{R}^2} \frac{1}{1 + \|\xi\|^{2\alpha}} d\xi = \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} \frac{r}{1 + r^{2\alpha}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\int_0^{+\infty} \frac{r}{1 + r^{2\alpha}}\,\mathrm{d}r.$$
   Cette dernière intégrale converge par critère de Riemann si et seulement si $2\alpha - 1 > 1$ c'est-à-dire $\alpha > 1$.
3. (a) Toutes les fonctions considérées étant à valeurs positives, il n'y a pas d'obstacle à manipuler leurs intégrales dans les calculs suivants. Soit $f \in H^\alpha$ avec $\alpha > 1$. On a
$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^2} |\widehat{f}(\xi)|\,\mathrm{d}\xi &= \int_{\mathbf{R}^2} |\widehat{f}(\xi)|\left(1 + \|\xi\|^{2\alpha}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{1 + \|\xi\|^{2\alpha}}\right)^{1/2} d\xi \\ &\ \text{on utilise alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\ &\leqslant \int_{\mathbf{R}^2} |\widehat{f}(\xi)|^2(1 + \|\xi\|^{2\alpha})d\xi \times \int_{\mathbf{R}^2} \frac{1}{1 + \|\xi\|^{2\alpha}} d\xi \\ &\leqslant \|f\|_{H^\alpha} \times \int_{\mathbf{R}^2} \frac{1}{1 + \|\xi\|^{2\alpha}} d\xi \\ &< +\infty.\end{aligned}$$
   (b) Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^2)$, alors par l'isométrie de Plancherel, on obtient
$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^2} f(x)\overline{\varphi(x)}\mathrm{d}x &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbf{R}^2} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{\varphi}(\xi)}\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbf{R}^2} \widehat{f}(\xi)\overline{\left(\int_{\mathbf{R}^2} e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)\mathrm{d}x\right)}\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$
   Or $\forall (x, \xi) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$, on a
$$\left|\widehat{f}(\xi)\overline{e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)}\right| = |\widehat{f}(\xi)||\varphi(x)|$$

où le terme de droite est intégrable sur $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ puisque $\xi \mapsto \widehat{f}(\xi)$ est intégrable sur $\mathbf{R}^2$ par la question précédente et $x \mapsto \varphi(x)$ est intégrable sur $\mathbf{R}^2$ puisque φ est à support compact. On peut appliquer le théorème de FUBINI-LEBESGUE et on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^2} f(x)\overline{\varphi(x)}\mathrm{d}x &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbf{R}^2} \widehat{f}(\xi)\overline{\left(\int_{\mathbf{R}^2} e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)\mathrm{d}x\right)}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbf{R}^2} \widehat{f}(\xi)\left(\int_{\mathbf{R}^2} e^{ix\cdot\xi}\overline{\varphi(x)}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbf{R}^2} \overline{\varphi(x)}\left(\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbf{R}^2} \widehat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le rappel en début de sujet, f est égale presque partout à $\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbf{R}^2} \widehat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}\mathrm{d}\xi$ qui n'est rien d'autre que la transformée de FOURIER de $\widehat{f}$ évaluée en $(-\xi)$ et à un facteur multiplicatif près, et qui est bien continue et bornée sur $\mathbf{R}^2$ d'après la question 2 de la partie I.

4. (a) On définit le produit scalaire comme

$$(f,g) \in H^\alpha \mapsto \int_{\mathbf{R}^2} (1+\|\xi\|^{2\alpha})\widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\,\mathrm{d}\xi.$$

qui est bien défini car $\left|\widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(|\widehat{f}(\xi)|^2 + |\widehat{g}(\xi)|^2\right)$. Ensuite, il n'y a aucune difficulté pour le produit scalaire en utilisant le théorème de PLANCHEREL pour le caractère défini.

(b) i. On remarque tout d'abord, grâce au théorème de PLANCHEREL et à la définition de la norme sur H^α que $\forall f \in L^2$

$$\|f\|_{L^2} = \frac{1}{2\pi}\|\widehat{f}\|_{L^2} \leqslant \frac{1}{2\pi}\|f\|_{H^\alpha}$$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de CAUCHY dans H^α. D'après ce qui précède, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de CAUCHY dans $L^2(\mathbf{R}^2)$ qui est complet, donc il existe $g \in L^2$ telle que $\|f_n - g\|_{L^2}$ tend vers 0.

ii. On commence par remarquer que, comme $g \in L^2(\mathbf{R}^2)$, g admet une transformée de FOURIER. On présente deux approches possibles. Dans les deux cas, on utilise le fait que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite de CAUCHY dans H^α, elle est bornée : il existe $C > 0$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $\|f_n\|_{H^\alpha} \leqslant C$.

<u>Première méthode :</u> On suit l'indication du sujet. Soit $R > 0$, on note $B(0,R) = \{\xi \in \mathbf{R}^2, \|\xi\| \leqslant R\}$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,R)} (1+\|\xi\|^{2\alpha})|\widehat{g}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi &= \left|\int_{B(0,R)} (1+\|\xi\|^{2\alpha})|\widehat{g}(\xi) - \widehat{f}_n(\xi) + \widehat{f}_n(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\right| \\
&\quad \text{en utilisant pour } a,b \geqslant 0\ |a-b|^2 \leqslant 2(a^2+b^2) \\
&\leqslant 2\int_{B(0,R)} (1+\|\xi\|^{2\alpha})|\widehat{g}(\xi) - \widehat{f}_n(\xi)|^2 d\xi \\
&\quad +2\int_{B(0,R)} (1+\|\xi\|^{2\alpha})|\widehat{f}_n(\xi)|^2 d\xi \\
&\leqslant 2(1+R^{2\alpha})\left|\int_{B(0,R)} |\widehat{f_n}(\xi) - \widehat{g}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\right| + 2\|f_n\|_{H^\alpha} \\
&\quad \text{or } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} \\
&\leqslant (1+R^{2\alpha})\|\widehat{f_n} - \widehat{g}\|_{L^2}^2 + 2C \\
&\quad \text{on utilise alors le théorème de PLANCHEREL} \\
&\leqslant (2\pi)^2(1+R^{2\alpha})\|f_n - g\|_{L^2}^2 + 2C < +\infty.
\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$\int_{B(0,R)} (1+\|\xi\|^{2\alpha})|\widehat{g}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi \leqslant 2C.$$

Cette majoration s'applique pour tout $R > 0$, avec une constante C indépendante de R ; on conclut alors par le théorème de convergence monotone, en faisant tendre R vers $+\infty$, que $\int_{\mathbf{R}^2} (1+\|\xi\|^{2\alpha})|\widehat{g}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi < +\infty$. Donc $g \in H^\alpha$.

Deuxième méthode : On procède par extraction d'une sous-suite convergeant presque partout. On a vu à la question précédente que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers g dans $L^2(\mathbf{R}^2)$. Par le théorème de Plancherel, on a aussi $(\widehat{f_n})$ qui converge vers $\widehat{g}$ dans L^2. On sait alors qu'on dispose d'une sous-suite $(\widehat{f_{\varphi(n)}})$ qui converge vers $\widehat{g}$ presque partout. D'après le lemme de Fatou

$$\int_{\mathbf{R}^2} \liminf_{n\mapsto+\infty} (1+\|\xi\|^{2\alpha}) \left|\widehat{f_{\varphi(n)}}(\xi)\right|^2 \,\mathrm{d}\xi \leqslant \liminf_{n\mapsto+\infty} \int_{\mathbf{R}^2} (1+\|\xi\|^{2\alpha}) \left|\widehat{f_{\varphi(n)}}(\xi)\right|^2 \,\mathrm{d}\xi$$

c'est à dire

$$\int_{\mathbf{R}^2} (1+\|\xi\|^{2\alpha})\widehat{g}(\xi) \,\mathrm{d}\xi \leqslant \liminf_{n\mapsto+\infty} \|f_n\|_{H^\alpha}$$

donc

$$\int_{\mathbf{R}^2} (1+\|\xi\|^{2\alpha})\widehat{g}(\xi) \,\mathrm{d}\xi \leqslant C.$$

Ainsi $g \in H^\alpha$.

iii. Il reste à montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers g dans H^α. On traduit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans H^α : soit $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$, $\forall n, p \geqslant N(\varepsilon)$,

$$\int_{\mathbf{R}^2} (1+\|\xi\|^{2\alpha})|\widehat{f_n}(\xi) - \widehat{f_p}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi \leqslant \varepsilon^2.$$

On peut alors reprendre les raisonnements amorcés au point précédent.

Première méthode : En procédant de même qu'à la question précédente, en raisonnant d'abord sur une boule $B(0,R)$, on obtient en faisant tendre p vers $+\infty$ que $\forall n \geqslant N(\varepsilon)$,

$$\int_{\mathbf{R}^2} (1+\|\xi\|^{2\alpha})|\widehat{g}(\xi) - \widehat{f_n}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi \leqslant \varepsilon^2,$$

soit $\forall n \geqslant N(\varepsilon)$,

$$\|g - f_n\|_{H^\alpha} \leqslant \varepsilon,$$

ce qui signifie bien que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers g dans H^α.

Deuxième méthode : On reprend la suite extraite à l'étape précédente : $\forall n \geqslant N(\varepsilon)$ fixé et pour $p \geqslant N(\varepsilon)$, $\varphi(p) \geqslant p$ donc

$$\int_{\mathbf{R}^2} (1+\|\xi\|^{2\alpha})|\widehat{f_n}(\xi) - \widehat{f_{\varphi(p)}}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi \leqslant \varepsilon^2$$

D'après le lemme de Fatou :

$$\int_{\mathbf{R}^2} \liminf_{p\mapsto+\infty} (1+\|\xi\|^{2\alpha})|\widehat{f_n}(\xi) - \widehat{f_{\varphi}(p)}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi \leqslant \liminf_{p\mapsto+\infty} \int_{\mathbf{R}^2} (1+\|\xi\|^{2\alpha})|\widehat{f_n}(\xi) - \widehat{f_{\varphi}(p)}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi$$

donc

$$\int_{\mathbf{R}^2} (1+\|\xi\|^{2\alpha})|\widehat{f_n}(\xi) - g(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi \leqslant \varepsilon^2$$

c'est à dire $\forall n \geqslant N(\varepsilon)$, $\|f_n - g\|_{H^\alpha} \leqslant \varepsilon$, ce qui signifie bien que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers g dans H^α.

Ainsi H^α est un espace de Hilbert.

5. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $L^2(\mathbf{R}^2)$: il existe $A \in \mathbf{R}_+$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\|f_n\|_{L^2} \leqslant A$. On fait aussi l'hypothèse, $\mathrm{supp}(f_n) \subset B(0,M)$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

   (a) Soit $\xi \in B(0,R)$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
|\widehat{f}_n(\xi)| &= \left|\int_{\mathbf{R}^2} f_n(x)e^{-ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_{B(0,M)} f_n(x)e^{-ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}x\right| \quad \text{car } \mathrm{supp}(f_n) \subset B(0,M) \\
&\quad \text{on utilise alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\
&\leqslant \left(\int_{B(0,M)} |f_n(x)e^{-ix\cdot\xi}|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \left(\int_{B(0,M)} 1^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \\
&\leqslant \|f_n\|_{L^2} \times \mathrm{mes}(B(0,M))^{1/2} \\
&\leqslant A \times \mathrm{mes}(B(0,M))^{1/2}.
\end{aligned}$$

   Ainsi la suite $(\widehat{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien équibornée sur $B(0,R)$.
   Avec les mêmes idées que précédemment, on a $\forall \eta, \xi \in B(0,R)$

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{f}_n(\xi) - \widehat{f}_n(\eta)\right| &= \left|\int_{\mathbf{R}^2} f_n(x)\left(e^{-ix\cdot\xi} - e^{ix.\eta}\right)\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_{B(0,M)} f_n(x)\left(e^{-ix\cdot\xi} - e^{ix.\eta}\right)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \|f_n\|_{L^2} \times \left(\int_{B(0,M)} |e^{-ix\cdot\xi} - e^{-ix.\eta}|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

   Or

$$|e^{-ix\cdot\xi} - e^{ix.\eta}|^2 = |e^{-ix\cdot\xi}|^2|1 - e^{ix\cdot(\eta-\xi)}|^2 \leqslant 2\|x\|^2\|\xi-\eta\|^2.$$

   Ainsi,

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{f}_n(\xi) - \widehat{f}_n(\eta)\right| &\leqslant A\left(\int_{B(0,M)} 2\|x\|^2\|\xi-\eta\|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \\
&\leqslant A\sqrt{2}M\|\xi-\eta\| \times \mathrm{mes}(B(0,M))^{1/2} \\
&\leqslant C\ \|\xi-\eta\|
\end{aligned}$$

   pour une certaine constante $C > 0$ indépendante de ξ, η et n. Ainsi $(\widehat{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue dans $\big(C^0(B(0,R),\mathbf{C}), \|.\|_\infty\big)$.

   (b) On suppose de plus que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans H^α par une constante K_1. Soit $\epsilon > 0$ fixé. On écrit, pour $R > 0$ qu'on va déterminer,

$$\widehat{f}_n(\xi) = \underbrace{\widehat{f}_n(\xi)\mathbf{1}_{|\xi|\leqslant R}}_{\phi_n(\xi)} + \underbrace{\widehat{f}_n(\xi)\mathbf{1}_{|\xi|>R}}_{\psi_n(\xi)}.$$

   Alors, en exploitant le fait que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans H^α, on obtient

$$\|\psi_n\|_{L^2}^2 = \int_{\|\xi\|>R} \frac{1+\|\xi\|^{2\alpha}}{1+\|\xi\|^{2\alpha}}|\widehat{f}_n(\xi)|^2\mathrm{d}\xi \leqslant \frac{1}{1+R^{2\alpha}}\|f_n\|_{H^\alpha}^2 \leqslant \frac{K_1^2}{1+R^{2\alpha}},$$

   qui peut donc être rendu $\leqslant \epsilon$ pour un choix convenable de $R = R(\epsilon)$ assez grand.
   Maintenant, pour ce $R(\epsilon)$, on utilise la propriété établie à la question précédente qui assure que l'ensemble $\{\phi_n(\xi),\ n \in \mathbf{N}\}$ est relativement compact dans $C^0(B(0,R(\epsilon)); \mathbf{C})$. On

rappelle que $L^\infty(X)$ s'injecte continuement dans $L^2(X)$ lorsque X est de mesure finie. L'ensemble $\{\phi_n(\xi),\ n \in \mathbf{N}\}$ est donc aussi relativement compact dans $L^2(\mathbf{R}^N)$ puisque toutes les fonctions qui le composent ont un support inclus dans le compact $B(0, R(\epsilon))$ qui est de mesure finie. On peut donc recouvrir cet ensemble, au sens de la norme L^2, par un nombre fini $N(\epsilon) \in \mathbf{N}$, de boules de rayon ϵ et de centres $\varphi_1, ..., \varphi_{N(\epsilon)}$, choisis parmi les ϕ_n. Il s'ensuit que $\bigcup_{n=1}^{N(\epsilon)} B(\varphi_n, 2\epsilon)$ réalise un recouvrement fini de l'ensemble $\{\widehat{f}_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ dans $L^2(\mathbf{R}^N)$ par des boules de rayon 2ϵ. Cet ensemble est donc relativement compact dans $L^2(\mathbf{R}^N)$.

(c) Ainsi il existe $g \in L^2(\mathbf{R}^2)$ et $\varphi : \mathbf{N} \mapsto \mathbf{N}$ strictement croissante tels que $\|\widehat{f}_{\varphi(n)} - g\|_2 \longrightarrow 0$. Par le théorème de Plancherel, il existe $h \in L^2(\mathbf{R}^2)$ tel que $\widehat{h} = g$. Alors on arrive à

$$\|f_{\varphi(n)} - h\|_2 = \frac{1}{2\pi}\|\widehat{f}_{\varphi(n)} - \widehat{h}\|_2 = \|\widehat{f}_{\varphi(n)} - g\|_2$$

qui tend vers 0 ; donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compact dans $L^2(\mathbf{R}^2)$.

Une propriété de régularisation

1. On a, vu le support de φ,

$$\begin{aligned}
|\rho_n(x)|^2 &= \left|\int_{\mathbf{R}^2} f_n(x,k)\varphi(k)\,\mathrm{d}k\right|^2 \\
&= \left|\int_{B(0,R)} f_n(x,k)\varphi(k)\,\mathrm{d}k\right|^2 \\
&\quad \text{par l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\
&\leqslant \int_{B(0,R)} |f_n(x,k)|^2\,\mathrm{d}k \times \int_{B(0,R)} |\varphi(k)|^2\,\mathrm{d}k \\
&\leqslant \mathrm{mes}(B(0,R)) \times \|\varphi\|_\infty^2 \times \int_{B(0,R)} |f_n(x,k)|^2\,\mathrm{d}k \\
&\leqslant \mathrm{mes}(B(0,R)) \times \|\varphi\|_\infty^2 \times \int_{\mathbf{R}^2} |f_n(x,k)|^2\,\mathrm{d}k.
\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant le théorème de Fubini, on obtient

$$\int_{\mathbf{R}^2} |\rho_n(x)|^2\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{mes}(B(0,R)) \times \|\varphi\|_\infty^2 \times \int_{\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2} |f_n(x,k)|^2\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}x$$

et avec l'hypothèse **(H1)**,

$$\int_{\mathbf{R}^2} |\rho_n(x)|^2\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{mes}(B(0,R))\|\varphi\|_\infty^2 M_0.$$

On en conclut $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien bornée dans $L^2(\mathbf{R}^2)$.

2. Avec l'hypothèse **(H1)** et le théorème de Plancherel, $\widehat{f}_n \in L^2(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2)$, ainsi $k \mapsto \widehat{f}_n(\xi,k)\varphi(k)$ est intégrable sur $\mathbf{R}^2$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz puisque φ est à support compact. Et donc la formule définissant $\widehat{\rho}_n(\xi)$ a bien un sens.

3. (a) Voir la figure 4.2.

   (b) On note $B = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Par projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(\xi)$, on peut écrire
$$\forall k \in \mathbf{R}^2,\ k = \frac{k\cdot\xi}{\|\xi\|}\frac{\xi}{\|\xi\|} + \left(k - \frac{k\cdot\xi}{\|\xi\|}\frac{\xi}{\|\xi\|}\right)$$
   On note alors $B' = (u_1, u_2)$ la base orthonormée de $\mathbf{R}^2$, telle que $u_1 = \frac{\xi}{\|\xi\|}$.

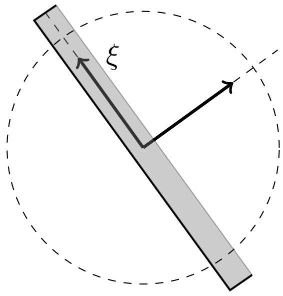


FIGURE 4.2 – Domaine $\mathcal{B}_\varepsilon(\xi)$ et disque de rayon R

On introduit alors le changement de variable

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ k = (k_1, k_2)_B & \longmapsto & (k'_1, k'_2)_{B'}. \end{array}$$

C'est une isométrie vectorielle donc son Jacobien est égal à ± 1 et par la formule ci-dessus on a $k'_1 = \dfrac{k \cdot \xi}{\|\xi\|}$.

(c) Le changement de variable précédent est une isométrie et on a

$$\begin{array}{rcl} \text{mes}(\mathcal{B}_\epsilon(\xi) \cap B(0,R)) & = & \displaystyle\int_{\{k' \in \mathbf{R}^2, |k'_1| \leqslant \epsilon\} \cap \{k',\, \|k'\| \leqslant R\}} \mathrm{d}k' \\ & \leqslant & \displaystyle\int_{\{k' \in \mathbf{R}^2, |k'_1| \leqslant \epsilon\} \cap \{k',\, |k'_2| \leqslant R\}} \mathrm{d}k' \\ & & \text{on applique alors le théorème de Fubini-Tonelli} \\ & \leqslant & \displaystyle\int_{|k'_1| \leqslant \epsilon} dk'_1 \times \int_{|k'_2| \leqslant R} \mathrm{d}k' \\ & \leqslant & 2\epsilon \times 2R. \end{array}$$

(d) On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que le support de φ est inclus dans $B(0,R)$:

$$\begin{array}{rcl} |\mu_n(\xi)| & \leqslant & \left(\displaystyle\int_{\mathcal{B}_\epsilon(\xi)} |\varphi(k)|^2\, dk\right)^{1/2} \left(\displaystyle\int_{\mathcal{B}_\epsilon(\xi)} |\widehat{f_n}(\xi,k)|^2\, \mathrm{d}k\right)^{1/2} \\ & \leqslant & \left(\displaystyle\int_{\mathcal{B}_\epsilon(\xi) \cap B(0,R)} |\varphi(k)|^2\, dk\right)^{1/2} \left(\displaystyle\int_{\mathbf{R}^2} |\widehat{f_n}(\xi,k)|^2\, \mathrm{d}k\right)^{1/2} \\ & \leqslant & \|\varphi\|_\infty\, (\text{mes}(\mathcal{B}_\epsilon(\xi) \cap B(0,R)))^{1/2} \left(\displaystyle\int_{\mathbf{R}^2} |\widehat{f_n}(\xi,k)|^2\, \mathrm{d}k\right)^{1/2} \\ & \leqslant & \sqrt{\epsilon}\sqrt{C} \left(\displaystyle\int_{\mathbf{R}^2} |\widehat{f_n}(\xi,k)|^2\, \mathrm{d}k\right)^{1/2}. \end{array}$$

On pose alors

$$H_n(\xi) = \left(C \int_{\mathbf{R}^2} |\widehat{f_n}(\xi,k)|^2\, \mathrm{d}k\right)^{1/2}$$

et on a par le théorème de Fubini-Tonelli

$$\int_{\mathbf{R}^2} |H_n(\xi)|^2\, \mathrm{d}\xi = C \int_{\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2} |\widehat{f_n}(\xi,k)|^2\, \mathrm{d}k\, \mathrm{d}\xi \leqslant CM_0.$$

Donc $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien une suite bornée dans $L^2(\mathbf{R}^2)$.

(e) On a

$$\begin{aligned}
|\nu_n(\xi)| &= \left|\int_{\mathcal{G}_\epsilon(\xi)} \widehat{f}_n(\xi,k)\,\varphi(k)\,\mathrm{d}k\right| \\
&= \left|\int_{\mathcal{G}_\epsilon(\xi)} \widehat{f}_n(\xi,k)\,\varphi(k)\,\frac{|k\cdot\xi|}{|k\cdot\xi|}\mathrm{d}k\right| \\
&\leqslant \left(\int_{\mathcal{G}_\epsilon(\xi)} |\widehat{f}_n(\xi,k)|^2|k\cdot\xi|^2\,\mathrm{d}k\right)^{1/2} \times \left(\int_{\mathcal{G}_\epsilon(\xi)} |\varphi(k)|^2\frac{1}{|k\cdot\xi|^2}\,\mathrm{d}k\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Or on observe que

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathcal{G}_\epsilon(\xi)} |\widehat{f}_n(\xi,k)|^2|k\cdot\xi|^2\,\mathrm{d}k\right)^{1/2} &= \left(\int_{\mathcal{G}_\epsilon(\xi)} |k\cdot\xi\widehat{f}_n(\xi,k)|^2\,\mathrm{d}k\right)^{1/2} \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbf{R}^2} |k\cdot\xi\widehat{f}_n(\xi,k)|^2\,\mathrm{d}k\right)^{1/2} = \tilde{F}_n(\xi).
\end{aligned}$$

En utilisant la propriété de dérivation de la transformée de Fourier et le théorème de Plancherel, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^2} |\tilde{F}_n(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi &= \int_{\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2} |k\cdot\widehat{\xi f_n}(\xi,k)|^2\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2} |k\cdot\nabla_x f_n(\xi,k)|^2\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant M_1.
\end{aligned}$$

Donc $(\tilde{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien bornée dans $L^2(\mathbf{R}^2)$. Ce sera la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à une constante près. Enfin, on dispose de l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{G}_\epsilon(\xi)} |\varphi(k)|^2\frac{1}{|k\cdot\xi|^2}\,\mathrm{d}k &= \int_{\{|k\cdot\xi|>\epsilon\|\xi\|\}\cap B(0,R)} |\varphi(k)|^2\frac{1}{|k\cdot\xi|^2}\,\mathrm{d}k \\
&\leqslant \frac{1}{\|\xi\|^2}\|\varphi\|_\infty^2\int_{\{|k\cdot\xi|>\epsilon\|\xi\|\}\cap B(0,R)} \frac{1}{|k.\frac{\xi}{\|\xi\|}|^2}\,\mathrm{d}k \\
&\quad \text{on effectue encore le changement de variable} \\
&\quad \text{de la question précédente} \\
&\leqslant \frac{1}{\|\xi\|^2}\|\varphi\|_\infty^2\int_{\{|k_1'|>\epsilon\}\cap B(0,R)} \frac{1}{|k_1'|^2}\,\mathrm{d}k' \\
&\leqslant \frac{1}{\|\xi\|^2}\|\varphi\|_\infty^2\int_{\{|k_1'|>\epsilon,\,|k_2'|\leqslant R\}} \frac{1}{|k_1'|^2}\,\mathrm{d}k' \\
&\quad \text{on applique Fubini-Tonelli} \\
&\leqslant \frac{1}{\|\xi\|^2}\|\varphi\|_\infty^2\left(\int_{\{|k_1'|>\epsilon\}} \frac{1}{|k_1'|^2}\,\mathrm{d}k_1'\right)\times\left(\int_{\{|k_2'|\leqslant R\}}\mathrm{d}k_2'\right) \\
&\quad \text{par parité} \\
&\leqslant \frac{1}{\|\xi\|^2}\|\varphi\|_\infty^2\left(2\int_{\{k_1'>\epsilon\}} \frac{1}{k_1'^2}\,\mathrm{d}k_1'\right)\times 2R \\
&\leqslant \frac{1}{\|\xi\|^2}\|\varphi\|_\infty^2 4R\left[-\frac{1}{k_1'}\right]_\epsilon^{+\infty} \\
&\leqslant \frac{1}{\epsilon\|\xi\|^2}\|\varphi\|_\infty^2 4R.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a obtenu

$$|\nu_n(\xi)| \leqslant \tilde{F}_n(\xi)\|\varphi\|_\infty 2\sqrt{R}\frac{1}{\sqrt{\epsilon}\|\xi\|}$$

On pose donc $F_n(\xi) = \tilde{F_n}(\xi)\|\varphi\|_\infty 2\sqrt{R}$ qui est bien bornée dans $L^2(\mathbf{R}^2)$ puisque les $\tilde{F_n}$ le sont.

(f) On pose $g(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}\|\xi\|} F_n(\xi) + \sqrt{\epsilon}\ H_n(\xi)$ L'étude par rapport à ϵ indique que g a une valeur optimale, là où la dérivée s'annule, pour $\epsilon_0 = \dfrac{F_n(\xi)}{\|\xi\| H_n(\xi)}$, qui est donc

$$g(\epsilon_0) = \frac{F_n(\xi)^{1/2} H_n(\xi)^{1/2}}{\|\xi\|^{1/2}}.$$

Il s'ensuit que

$$\forall \xi \in \mathbf{R}^2,\ |\widehat{\rho}_n(\xi)| \leqslant \frac{F_n(\xi)^{1/2} H_n(\xi)^{1/2}}{\|\xi\|^{1/2}}$$

Il reste à vérifier que $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^{1/2}$. D'une part, le théorème de Plancherel assure que

$$\int_{\mathbf{R}^2} |\widehat{\rho}_n(\xi)|^2 d\xi = \|\widehat{\rho}_n\|_{L^2}^2 = \|\rho_n\|_{L^2}^2$$

et ceci est borné par la question 1 de cette partie. D'autre part, par les questions précédentes, on a

$$\|\xi\| \times |\widehat{\rho}_n(\xi)|^2 \leqslant F_n(\xi) H_n(\xi) \leqslant \frac{1}{2}(F_n(\xi)^2 + H_n(\xi)^2).$$

Finalement, il vient

$$\int_{\mathbf{R}^2} \|\xi\|\, |\widehat{\rho}_n(\xi)|^2 d\xi \leqslant \frac{1}{2}(CM_0 + C'M_1).$$

Ainsi en sommant,

$$\|\rho_n\|_{H^{1/2}} = \int_{\mathbf{R}^2} (1 + \|\xi\|)\, |\widehat{\rho}_n(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi$$

est bien bornée : $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^{1/2}$.

L'idée de cette démonstration est de comprendre que dans le « bon ensemble » $\mathcal{G}_\varepsilon$, l'information « $k \cdot \nabla_x f_n$ bornée dans L^2 » est utile et fournit bien un gain de régularité (« on gagne une dérivée »), alors que le « mauvais ensemble » $\mathcal{B}_\varepsilon$ peut être rendu de mesure arbitrairement petite. La combinaison de ces deux informations fournit une estimation dans un espace de Sobolev fractionnaire.

4. Il suffit d'utiliser 5b et 5c de la partie V.

Une propriété de compacité

1. (a) Rien à signaler.

   (b) Soient $0 < \epsilon < \epsilon'$ et $(k, \zeta) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$. On a

$$\mathbf{1}_{|a(k)\cdot\zeta| \leqslant \epsilon} \leqslant \chi\left(\frac{|a(k)\cdot\zeta|}{\epsilon}\right).$$

Comme $0 < \epsilon < \epsilon'$, on a

$$\left(\frac{|a(k)\cdot\zeta|}{\epsilon'}\right) \leqslant \left(\frac{|a(k)\cdot\zeta|}{\epsilon}\right).$$

Par décroissance de χ sur $\mathbf{R}_+$, on obtient

$$\chi\left(\frac{|a(k)\cdot\zeta|}{\epsilon}\right) \leqslant \chi\left(\frac{|a(k)\cdot\zeta|}{\epsilon'}\right).$$

Enfin, par parité de χ, on a $\chi\left(\frac{|a(k)\cdot\zeta|}{\epsilon}\right) = \chi\left(\frac{a(k)\cdot\zeta}{\epsilon}\right)$. Ainsi

$$0 \leqslant \mathbf{1}_{|a(k)\cdot\zeta|\leqslant\epsilon} \leqslant \chi\left(\frac{a(k)\cdot\xi}{\epsilon}\right) \leqslant \chi\left(\frac{a(k)\cdot\xi}{\epsilon'}\right).$$

Par croissance de la mesure de Lebesgue, on en conclut que

$$\mathrm{mes}\big(\{k \in B(0,R),\ |a(k)\cdot\zeta| \leqslant \epsilon\}\big) = \int_{B(0,R)} \mathbf{1}_{|a(k)\cdot\zeta|\leqslant\epsilon}\,\mathrm{d}k \leqslant m_\epsilon(\zeta) \leqslant m_{\epsilon'}(\zeta).$$

(c) Soit $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante vers 0. Alors $(m_{\epsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante à valeurs positives par la question précédente. On commence par établir la convergence simple. Soit $\zeta \in \mathbf{S}$ fixé. On pose, $\forall k \in \mathbf{R}^2$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $g_n(k) = \chi\left(\dfrac{a(k)\cdot\zeta}{\epsilon_n}\right)$ qui converge presque partout vers la fonction nulle quand $n \to \infty$, étant donné que $\mathrm{mes}\left(\{k \in B(0,R),\ |a(k)\cdot\zeta| = 0\}\right) = 0$. De plus $|g_n(k)| \leqslant 1$ et la fonction constante $k \mapsto 1$ est intégrable sur $B(0,R)$. Donc, d'après le théorème de convergence dominée, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} m_{\epsilon_n}(\zeta) = 0$.

Ainsi la suite $(m_{\epsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fonctions positives qui converge simplement vers la fonction nulle qui est continue sur $\mathbf{S}$ et $\mathbf{S}$ est compact. On peut donc appliquer la question I.3, qui permet de conclure que la suite $(m_{\epsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbf{S}$.

2. (a) Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^2)$ telle que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset B(0,R)$. On a $\rho_n(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}^2} \widehat{f}_n(\xi,k)\varphi(k)\mathrm{d}k = \int_{\mathbf{B}(0,R)} \widehat{f}_n(\xi,k)\varphi(k)\mathrm{d}k$. On pose alors $\mathcal{B}_\epsilon(\xi) = \Big\{k \in B(0,R),\ |a(k)\cdot\xi| \leqslant \epsilon\|\xi\|\Big\}$ et $\mathcal{G}_\epsilon(\xi) = \Big\{k \in B(0,R),\ |a(k)\cdot\xi| > \epsilon\|\xi\|\Big\}$.

On a alors $\forall\xi \in \mathbf{R}^2$, $\rho_n(\xi) = \mu_n(\xi) + \nu_n(\xi)$ avec

$$\mu_n(\xi) = \int_{\mathcal{B}_\epsilon(\xi)} \widehat{f}_n(\xi,k)\varphi(k)\mathrm{d}k$$

et

$$\nu_n(\xi) = \int_{\mathcal{G}_\epsilon(\xi)} \widehat{f}_n(\xi,k)\varphi(k)\mathrm{d}k$$

On va majorer chacun des termes séparémment.
Soit $\xi \in \mathbf{R}^2$, $\xi \neq 0$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned}
|\mu_n(\xi)| &\leqslant \left(\int_{\mathcal{B}_\epsilon(\xi)} |\widehat{f}_n(\xi,k)|^2\mathrm{d}k\right)^{1/2}\left(\int_{\mathcal{B}_\epsilon(\xi)} |\varphi(k)|^2\mathrm{d}k\right) \\
&\leqslant \left(\int_{\mathcal{B}_\epsilon(\xi)} |\widehat{f}_n(\xi)|^2\mathrm{d}k\right)^{1/2}\|\varphi\|_\infty\left(\int_{\mathcal{B}_\epsilon(\xi)} 1\mathrm{d}k\right) \\
&\leqslant \left(\int_{\mathcal{B}_\epsilon(\xi)} |\widehat{f}_n(\xi)|^2\mathrm{d}k\right)^{1/2}\|\varphi\|_\infty\sqrt{\mathrm{mes}\big(\{k \in B(0,R),\ |a(k)\cdot\tfrac{\xi}{\|\xi\|}| \leqslant \epsilon\}\big)}.
\end{aligned}$$

où $H_n(\xi) = \left(\displaystyle\int_{\mathcal{B}_\epsilon(\xi)} |\widehat{f}_n(\xi)|^2\mathrm{d}k\right)^{1/2}$ est bien bornée dans $L^2(\mathbf{R}^2)$ par l'hypothèse **(H1)** et l'équivalence des normes rappelés dans le sujet. Ensuite, on majore

$$\begin{aligned}
|\nu_n(\xi)| &\leqslant \int_{\mathcal{G}_\epsilon(\xi)} |\widehat{f}_n(\xi,k)|\ |a(k)\cdot\xi|\ |\varphi(k)| \frac{1}{|a(k)\cdot\xi|}\mathrm{d}k \\
&\leqslant \left(\int_{\mathcal{G}_\epsilon(\xi)} |\widehat{f}_n(\xi,k)|^2\ |a(k)\cdot\xi|^2\,\mathrm{d}k\right)^{1/2} \left(\int_{\mathcal{G}_\epsilon(\xi)} |\varphi(k)|^2 \frac{1}{|a(k)\cdot\xi|^2}\mathrm{d}k\right)^{1/2} \\
&\leqslant \left(\int_{\mathcal{G}_\epsilon(\xi)} |a(k)\cdot\xi\widehat{f}_n(\xi,k)|^2\,\mathrm{d}k\right)^{1/2} \left(\int_{\mathcal{G}_\epsilon(\xi)} \|\varphi\|_\infty^2 \frac{1}{\epsilon^2}\frac{1}{\|\xi\|^2}\frac{1}{\left|a(k)\cdot\frac{\xi}{\|\xi\|}\right|^2}\mathrm{d}k\right)^{1/2} \\
&\quad \text{en utilisant les propriétés de dérivations de la transformée de Fourier} \\
&\leqslant \left(\int_{\mathcal{G}_\epsilon(\xi)} |a(k)\cdot\xi\widehat{f}_n(\xi,k)|^2\,\mathrm{d}k\right)^{1/2} \|\varphi\|_\infty \frac{1}{\epsilon\|\xi\|}\left(\int_{B(0,R)}\mathrm{d}k\right)^{1/2} \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbf{R}^2} |a(k)\cdot\xi\widehat{f}_n(\xi,k)|^2\,\mathrm{d}k\right)^{1/2} \|\varphi\|_\infty \frac{1}{\epsilon\|\xi\|}\mathrm{mes}(B(0,R)).
\end{aligned}$$

On a donc $\tilde{F}_n(\xi) = \|\varphi\|_\infty \mathrm{mes}(B(0,R))\left(\int_{\mathbf{R}^2} |a(k).\xi\widehat{f}_n(\xi,k)|^2\,\mathrm{d}k\right)^{1/2}$, et de plus

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^2} \tilde{F}_n(\xi)^2\,\mathrm{d}\xi &= \|\varphi\|_\infty^2 \mathrm{mes}(B(0,R))^2 \int_{\mathbf{R}^2}\int_{\mathbf{R}^2} |a(k).\xi\widehat{f}_n(\xi,k)|^2\,\mathrm{d}k\mathrm{d}\xi \\
&= \|\varphi\|_\infty^2 \mathrm{mes}(B(0,R))^2 \int_{\mathbf{R}^2}\int_{\mathbf{R}^2} |a(k)\cdot\nabla_x f_n(x,k)|^2\,\mathrm{d}k\mathrm{d}x \\
&\quad \text{en utilisant le rappel sur les normes équivalentes} \\
&\quad \text{et les propriétés de dérivations de la transformée de Fourier} \\
&\leqslant \|\varphi\|_\infty^2 \mathrm{mes}(B(0,R))^2 M_1.
\end{aligned}$$

Ainsi $\tilde{F}_n$ est bornée dans $L^2(\mathbf{R}^2)$.
Conclusion : On a montré que

$$|\widehat{\rho}_n(\xi)| \leqslant \frac{1}{\epsilon\|\xi\|}\tilde{F}_n(\xi) + \tilde{H}_n(\xi)\sqrt{\mathrm{mes}\big(\{k\in B(0,R),\ |a(k)\cdot\frac{\xi}{\|\xi\|}|\leqslant\epsilon\}\big)}$$

où les suites $(\tilde{F}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\tilde{H}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont bornées dans $L^2(\mathbf{R}^2)$.

(b) $\forall\xi\in\mathbf{R}^2$, $\xi\neq 0$, en utilisant $(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)$ pour a,b des réels positifs, on a

$$|\rho_n(\xi)|^2 \leqslant 2\left(\frac{1}{\epsilon^2\|\xi\|^2}|\tilde{F}_n(\xi)|^2 + |\tilde{H}_n(\xi)|^2\mathrm{mes}\big(\{k\in B(0,R),\ |a(k)\cdot\frac{\xi}{\|\xi\|}|\leqslant\epsilon\}\big)\right)$$

Ainsi, pour $A>0$

$$\begin{aligned}
&\int_{\|\xi\|\geqslant A} |\rho_n(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi \\
&\leqslant 2\left(\int_{\|\xi\|\geqslant A}\frac{1}{\epsilon^2\|\xi\|^2}|\tilde{F}_n(\xi)|^2 + |\tilde{H}_n(\xi)|^2\mathrm{mes}\big(\{k\in B(0,R),\ |a(k)\cdot\frac{\xi}{\|\xi\|}|\leqslant\epsilon\}\big)\,\mathrm{d}\xi\right) \\
&\leqslant \frac{2}{\epsilon^2A^2}\int_{\|\xi\|\geqslant A}|\tilde{F}_n(\xi)|^2\mathrm{d}\xi + 2\left\|m_\epsilon(\frac{\xi}{\|\xi\|})\right\|_\infty\int_{\|\xi\|\geqslant A}|\tilde{H}_n(\xi)|^2\mathrm{d}\xi \\
&\leqslant \frac{2}{\epsilon^2A^2}\int_{\mathbf{R}^2}|\tilde{F}_n(\xi)|^2\mathrm{d}\xi + 2\left\|m_\epsilon(\frac{\xi}{\|\xi\|})\right\|_\infty\int_{\mathbf{R}^2}|\tilde{H}_n(\xi)|^2\mathrm{d}\xi \\
&\leqslant \frac{2}{\epsilon^2A^2}M_1 + 2\left\|m_\epsilon(\frac{\xi}{\|\xi\|})\right\|_\infty M_0
\end{aligned}$$

Soit $\delta > 0$. D'après la question 1.c de cette partie, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\left\|m_\epsilon\left(\frac{\xi}{\|\xi\|}\right)\right\|_\infty \leqslant \frac{\delta}{4M_0}$. Alors pour cet ϵ, on a $\forall n \in \mathbf{N}$

$$\int_{\|\xi\|\geqslant A} |\rho_n(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi \quad \leqslant \quad \frac{2}{\epsilon^2 A^2} M_1 + \frac{\delta}{2}$$

et donc

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \int_{\|\xi\|\geqslant A} |\rho_n(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi \quad \leqslant \quad \frac{2}{\epsilon^2 A^2} M_1 + \frac{\delta}{2}.$$

Comme $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{2}{\epsilon^2 A^2} M_1 = 0$, il existe A_0, tel que $\forall A \geqslant A_0$

$$\frac{2}{\epsilon^2 A^2} M_1 \leqslant \frac{\delta}{2}$$

Ainsi, $\forall A \geqslant A_0$, on a

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \int_{\|\xi\|\geqslant A} |\rho_n(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi \quad \leqslant \quad \delta.$$

On a donc bien prouvé que

$$\lim_{A\to\infty} \left\{ \sup_{n\in\mathbf{N}} \left(\int_{\|\xi\|\geqslant A} |\widehat{\rho}_n(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi \right) \right\} = 0.$$

3. Pour $A > 0$, on a $\forall \xi \in \mathbf{R}^2$

$$\widehat{\rho}_n(\xi) = \widehat{\rho}_n(\xi)\mathbf{1}_{\|\xi\|\geqslant A} + \widehat{\rho}_n(\xi)\mathbf{1}_{\|\xi\|<A} = \sigma_n^A(\xi) + \gamma_n^A(\xi).$$

Avec la question précédente, on a montré que $\sup_{n\in\mathbf{N}} \|\sigma_n^A\|_2 \leqslant \omega(A)$ avec $\lim\limits_{A\to+\infty} \omega(A) = 0$. Par ailleurs, $(\widehat{\rho}_n(\xi)\mathbf{1}_{\|\xi\|<A} = \gamma_n^A(\xi))_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compact, comme démontré dans la partie V question 5 ; on retrouve le même cas de figure car le support est inclus dans $B(0, A)$. Ainsi $(\widehat{\rho}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compact dans $L^2(\mathbf{R}^2)$ et par équivalence des normes, cela permet de conclure que $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compact dans $L^2(\mathbf{R}^2)$.

Chapitre 5

Épreuves orales : Algèbre et Géométrie ; Analyse et Probabilités ; Mathématiques–Option D ; Informatique fondamentale–Option D

5.1 Organisation générale des épreuves

Modalités Pour les épreuves de leçons, les candidats tirent au sort un couple de sujets. Le candidat est libre de choisir le sujet qui lui plaît parmi ces deux sujets proposés, celui où il se sent le plus à même de mettre en valeur ses connaissances. Il n'a pas à justifier ou commenter son choix.

Les candidats préparent l'interrogation pendant 3 heures. Durant tout ce temps, ils ont libre accès aux livres de la bibliothèque de l'agrégation, à ceux mis à disposition par les préparations universitaires ou à leurs propres ouvrages. Seuls sont autorisés les ouvrages avec un numéro ISBN et jouissant d'un minimum de diffusion commerciale. Les ouvrages imprimés par les candidats eux-mêmes (ou les bibliothèques universitaires) ne sont pas autorisés et les livres doivent être vierges d'annotation. Il n'est pas autorisé non plus de venir avec des livres dont certaines pages auraient été marquées au préalable. Le représentant du directoire présent lors de la préparation peut interdire tout ouvrage personnel ou envoyé par une préparation universitaire. Il est possible, et même recommandé, de venir muni d'un exemplaire du rapport du jury de l'agrégation externe de mathématiques, complet, relié et sans annotation. Les candidats n'ont pas accès à Internet et la possession d'un dispositif de communication ou de stockage de données (téléphone, calculatrice, clé USB, montre connectée,...) serait considérée comme une tentative de fraude, susceptible d'entraîner l'exclusion du concours. À l'issue de cette phase de préparation, le jury fait procéder à la photocopie des plans de la leçon élaborés par les candidats. Le temps de préparation est décompté dès l'ouverture des enveloppes contenant les sujets. Lorsque les plans des leçons sont ramassés pour leur reproduction, les candidats disposent encore de quelques minutes pour finaliser leur réflexion et ils peuvent, bien sûr, continuer à noter leurs idées sur leurs brouillons.

Le plans sont donc des documents manuscrits, communiqués à la commission d'interrogation. Ils comportent *au maximum 3 pages* au format A4, éventuellement complétées par une page de figures. Les candidats doivent veiller à la lisibilité de leur document, en tenant en compte le fait qu'ils vont être photocopiés : écrire suffisament gros, soigner la présentation, faire apparaître des titres, éviter l'utilisation de couleurs,... Le candidat doit clairement signaler sur ce plan les résultats qu'il estime significatifs, représentatifs de la leçon et qu'il propose de développer devant le jury.

L'épreuve s'organise en trois temps, prévus pour une durée totale de *55 minutes environ* : une présentation du plan de la leçon éventuellement suivie d'une brève discussion, un développement de 15 minutes maximum et enfin une partie consacrée au dialogue et aux questions. *Le candidat peut utiliser sa copie du plan pendant toute l'épreuve.* Pendant la première phase de l'interrogation consacrée à la présentation du plan, il peut utiliser toutes les notes manuscrites produites durant la préparation. Le développement doit quant à lui se faire sans utiliser ces notes manuscrites ; si le plan comporte lui-même trop de détails sur les développements proposés, le jury peut restreindre l'utilisation de ce document durant cette seconde phase de l'épreuve.

Commentaires généraux Le jury met en garde contre trois écueils qui peuvent altérer les performances des candidats :

— *le hors-sujet.* Le hors-sujet se manifeste de deux manières, qui dans tous les cas sont lourdement sanctionnées. Quelques candidats prennent des libertés quant au libellé de la leçon et s'en écartent notablement : les titres des leçons définissent le champ précis qu'il faut traiter. Par ailleurs, le jury constate l'abus de « recyclage » de thèmes plus ou moins classiques, mais qui ne sont pas exploités avec à propos dans les leçons et qui, parfois, prennent une place sans commune mesure avec leur importance mathématique.

— une mauvaise évaluation des attentes et du niveau, conduisant à un *défaut de maîtrise.* Le rapport distingue très clairement des niveaux différents auxquels peuvent être abordées les leçons. Trop de candidats proposent plan et développements au dessus de leur niveau, une stratégie qui ne peut pas être payante, tant ils se mettent en perdition lors de l'épreuve. Des connaissances des bases fermement maîtrisées et intelligemment utilisées valent mieux qu'un étalage artificiel de savoirs emmagasinés sans recul et à peine digérés, voire pas assimilés du tout. Une maîtrise avérée et solide des bases assure déjà une note très convenable, certainement de nature à permettre l'admission, en l'état du concours.

— *la fatigue et le stress.* Une grande majorité des candidats se présente avec une forte charge émotionnelle, à la mesure de l'enjeu et de leur investissement personnel, qui peut nuire à l'expression de leurs connaissances. Cela est d'autant plus vrai que l'épreuve ne se réduit pas à la simple récitation d'un cours mais à un échange avec le jury et donc, là encore, à une réflexion personnelle, à une prise de hauteur et à la démonstration, dans un temps court, non seulement de la maîtrise technique mais aussi de l'aptitude à construire un raisonnement. Le jury est pleinement conscient de ces difficultés et s'emploie à en réduire les effets négatifs en mettant en pratique une posture de bienveillance constante. Le jury ne cherche en rien à déstabiliser le candidat pendant l'épreuve, mais au contraire cherche à valoriser les connaissances du candidat. Les premières questions, parfois très simples, visent souvent à préciser une notation, un point du plan ou du développement, pour que le jury s'assure de la compréhension par le candidat des notions qu'il vient d'exposer et non pour lui tendre un quelconque piège. Mettre le candidat en confiance, le respecter, l'écouter, poser des questions ouvertes, permettre au candidat déstabilisé de se reprendre sans l'acculer au silence, stimuler le dialogue sont autant d'objectifs que s'assignent les membres du jury.

Une liste d'énoncés, quelque sophistiqués qu'ils soient, ne peut suffire à convaincre le jury. Il faut savoir motiver les énoncés et expliquer comment ils s'enchaînent et en quoi ils sont pertinents. Les leçons doivent donc être illustrées avec des exemples judicieusement choisis. De nombreux titres de leçons se terminent d'ailleurs par « exemples et applications » : le jury attend donc que le plan soit riche en exemples et applications et/ou que le candidat puisse en développer lors de la présentation de son plan.

Liste des leçons Depuis la session 2017, afin d'aider les candidats et les préparateurs, le jury annonce dans son rapport la liste des leçons qui seront utilisées l'année suivante. On trouvera donc en annexe les leçons qui seront utilisées pour la session 2019 du concours. Cette liste est aussi reprise sur le site http://www.agreg.org. Cette pratique peut conduire à une certaine sclérose. Aussi, afin de conserver un minimum de dynamisme et éviter un rabâchage nuisible dans les préparations, le jury a souhaité faire évoluer cette liste, par des reformulations, des suppressions ou l'introduction de nouveaux sujets de réflexion. Si des titres disparaissent, cela ne signifie en rien, le programme étant stable par ailleurs, que les notions qui y sont liées deviennent de moindre importance. Le rapport indique d'ailleurs des pistes permettant d'exploiter ces notions sous d'autres titres. Les commentaires qui suivent prennent en compte les évolutions de la liste des leçons qui seront proposées. Le jury espère que candidats et préparateurs sauront se saisir de ces indications pour proposer des développements originaux.

5.1.1 Première partie : présentation de la leçon

Dans cette première phase de l'épreuve, le candidat est convié à utiliser son temps de parole, *6 minutes maximum*, pour présenter, argumenter, mettre en valeur et faire une synthèse de sa leçon.

Pour cette partie de l'épreuve, le candidat devrait s'imaginer dans la situation où il doit introduire à un auditoire, pendant 6 minutes, une leçon destinée ensuite à être développée sur plusieurs séances. Quel est l'intérêt du sujet ? Comment se positionne-t-il dans un paysage mathématique plus large ? Comment s'articulent les différentes sections qui composent la leçon ? Comment s'expliquent et se motivent les enchaînements ? Comment se hiérarchisent les résultats et les difficultés ? Il s'agit aussi de s'interroger sur les enjeux didactiques de la leçon, c'est-à-dire dans quel ordre et comment présenter les choses pour que le tout soit cohérent, compréhensible et pédagogiquement efficace. De plus, cette présentation doit être illustrée. Des exemples doivent bien mettre en évidence les difficultés, faire ressortir le rôle des hypothèses et décrire des applications met en valeur l'intérêt des résultats. Enfin, des figures peuvent aussi contribuer à expliquer les idées maîtresses.

Le rapport du concours indique des pistes pour chaque leçon ; il ne s'agit que de suggestions que le candidat n'est pas tenu de suivre et qui ne constituent pas une trame obligatoire pour le plan. Notamment le rapport distingue clairement le cœur des leçons et des extensions dont le contenu peut être techniquement plus exigeant. La vocation de ces commentaires n'est donc pas d'être repris de manière exhaustive ; il ne s'agit que de guider les candidats dans leur auto-évaluation et les encourager à présenter des notions avec lesquelles ils sont à l'aise. Notamment, ils peuvent tout à fait exploiter des notions ou des applications qui trouvent leur motivation dans les options de modélisation qu'ils ont choisies.

Il existe maintenant de nombreux plans *tout faits* disponibles dans la littérature, plus ou moins pertinents, de plus ou moins grande valeur. Il est naturel que les candidats s'inspirent de sources de qualité et, d'une certaine manière, le choix de ces sources, la capacité à s'en affranchir ou à pleinement se les approprier, participent au regard que le jury peut porter sur leur maturité scientifique. Il est bien entendu que se contenter simplement de recopier un plan ou le réciter par cœur n'a pas d'intérêt. Le jury ne cherche pas des plans absolument originaux, le plus important est que le plan soit bien structuré, maîtrisé par le candidat et qu'y figure une quantité substantielle d'exemples et de mathématique. Exploiter des ouvrages de référence n'a rien de condamnable, mais le jury attend que le candidat fasse preuve d'un investissement personnel sur le sujet et qu'il explique pourquoi il adopte cette présentation et qu'il soit en mesure de la commenter.

Il s'agit d'une épreuve *orale*. Le document écrit transmis au jury se justifie pour servir de base pour la discussion et constitue un fil conducteur qui guide le jury pour mener la partie consacrée au dialogue et aux questions. Ce plan ne doit être ni une énumération d'énoncés, ni un cours ou un exposé complet avec développement des démonstrations. En revanche, il doit définir avec suffisamment de précision les notions mathématiques introduites, donner les énoncés complets (notamment les hypothèses) des résultats fondamentaux, citer des exemples et des applications. Le plan est important puisqu'il calibre l'ensemble de la leçon, il détermine l'orientation et le niveau choisis par le candidat. Les choix doivent être motivés lors de la présentation et éventuellement lors de la discussion avec le jury. Il est nécessaire d'être en mesure de démontrer les résultats importants et de pouvoir les illustrer avec des exemples simples. Soigner la présentation d'un document écrit qui sert de support pour un cours est une compétence professionnelle importante du métier d'enseignant. Aussi, la formalisation mathématique et le français doivent être soignés, ainsi, autant que possible dans le temps de préparation imparti, que la mise en forme : ces éléments ne peuvent que faciliter les interactions avec le jury. Il est contre-productif de chercher à remplir à tout prix les 3 feuilles autorisées, surtout avec des éléments que le candidat ne maîtrise manifestement pas.

Un exposé oral qui se réduit à relire simplement ce qui est écrit sur le document photocopié n'a pas beaucoup d'intérêt. Trop de candidats se contentent d'une présentation linéaire, sans expliquer ou mettre en valeur les articulations du plan, ni faire ressortir les méthodes ou les résultats importants. Il est inutile de recopier le plan au tableau, puisque le jury dispose d'une copie de ce document. Toutefois le jury encourage les candidats à exploiter le tableau comme support pédagogique. Faire apparaître la structure de la leçon, illustrer une difficulté technique ou le principe d'une démonstration par une figure... permet au candidat de s'affranchir de ses notes et rend l'exposé plus vivant. La présentation orale, la qualité d'expression, la compréhension synthétique, la plus-value de l'exposé par rapport au plan écrit, la capacité du candidat à intéresser son auditoire sur une leçon donnée, constituent des éléments importants d'évaluation. Le jury se réjouit d'ailleurs des progrès constatés cette année sur cette partie de l'épreuve.

Le jury attache une grande importance à la *maîtrise du plan* qui intervient de manière substantielle dans la grille de notation. Le plan ne peut être considéré comme maîtrisé si l'exposé ressemble à une récitation. Les résultats exposés doivent être compris ainsi que l'organisation d'ensemble de la leçon. Il est souhaitable que le candidat connaisse dans leurs grandes lignes les démonstrations des résultats figurant au programme du concours. Il est indispensable que le candidat ait une idée assez claire de la difficulté des démonstrations des résultats qu'il évoque dans son plan. Le jury rappelle qu'il n'est pas nécessaire de s'aventurer au-delà des contours du programme pour prétendre à une très bonne note ! Plus généralement, il vaut mieux se cantonner à un niveau où l'on se sait solide plutôt que de chercher à placer des énoncés débordant du programme mais sans le recul, ni l'assurance technique nécessaires. Bien entendu, réussir cette partie de l'épreuve ne s'improvise pas et le discours doit avoir été réfléchi durant la préparation de l'épreuve, et plus largement tout au long du parcours qui conduit les candidats jusqu'au concours.

À la fin de cette présentation de la leçon, le jury peut éventuellement questionner très brièvement le candidat et aborder quelques points techniques, sans entrer dans des détails qui retarderaient le début du développement.

5.1.2 Deuxième partie : le développement

Le jury demande au candidat de proposer *deux développements au moins*. Il s'agit de résultats représentatifs de la leçon que le candidat est en mesure d'exposer en détail et sans notes.

Proposer un seul développement ou des développements de niveaux trop disparates conduit à une minoration de la note. Ces propositions de développements doivent être clairement mentionnées sur le plan écrit et non pas vaguement évoquées à l'oral. Dans cet esprit, le candidat motivera soigneusement le choix des développements qu'il propose, expliquant en quoi il estime que ces résultats ou énoncés sont centraux ou jouent à ses yeux un rôle particulier sur le sujet. Le candidat doit aussi préciser, sur son plan écrit, ce qu'il va démontrer et, le cas échéant, les résultats de son plan qu'il va admettre pour mener à bien son développement. Il faut prendre garde dans ce choix à ne pas déclarer admis un énoncé majeur qui, une fois acquis, rend l'objet du développement trivial. De même il faut prendre garde aux « raisonnements circulaires » en faisant appel à un énoncé qu'on interpréterait comme une conséquence de celui qu'on cherche à démontrer. De telles maladresses sont perçues comme un défaut de maîtrise et de recul qui est pénalisé.

Le jury choisit le développement qui va être effectivement exposé par le candidat. Le candidat dispose de 15 minutes (maximum) pour mener à bien son développement. La gestion du temps est une des difficultés de l'épreuve. Un exposé trop court est le signe d'un sujet mal choisi, inapproprié au concours ; une démonstration inachevée dans le temps imparti témoigne d'un manque de maîtrise. Le jury demande au candidat de bien gérer son tableau, en particulier le candidat doit demander aux membres du jury l'autorisation d'effacer. Lors du développement, le jury attend du candidat des explications sur la preuve et sur l'utilisation pertinente des notions développées durant l'exposé oral ; il peut être opportun, lors du développement, de se référer explicitement au plan présenté. Trop peu de candidats commencent leur développement par une rapide synthèse des grandes idées ou des étapes qui le composent. Expliquer l'approche adoptée, et les difficultés, au début du développement est une démarche pédagogique appréciée. Un ou plusieurs dessins peuvent aider à clarifier la discussion technique. Il est inutile de se précipiter ou de parler trop vite ; on veillera au contraire à préciser ses notations, à soigner sa présentation, à placer sa voix et à regarder de temps en temps le jury. Le développement ressemble parfois à une succession plus ou moins convaincante de résultats intermédiaires *ad hoc*. Cette phase de l'épreuve vise à mettre en valeur des qualités pédagogiques autant que techniques et l'exposé doit faire la preuve de la compréhension du sujet par le candidat. La récitation mécanique d'un développement ne peut pas être convaincante ; le jury veille à ce que les futurs enseignants comprennent ce qu'ils exposent et sachent exposer ce qu'ils comprennent. C'est une qualité essentielle d'un futur agrégé. Enfin, même si le jury laisse évoluer le candidat durant son développement, en intervenant le moins possible, il peut, en cas de lacunes ou d'erreurs manifestes, interrompre le candidat pour demander des explications. Cette intervention ne donne pas droit à une extension du temps consacré au développement.

Le jury veille à la cohérence du plan et des propositions de développements. Il est souhaitable que le candidat recherche une adéquation entre le niveau auquel il souhaite se placer et les développements proposés. Un candidat ne sera pas avantagé s'il présente un développement non maîtrisé, manifestement mal compris. Si le niveau de l'agrégation ne peut se cantonner aux notions abordées dans une classe de Terminale ou une première année post-bac, trop de candidats se lancent, curieusement, dans des propositions, parfois aux limites du programme, qui dépassent largement leur niveau technique. Dans un cas comme dans l'autre, il en résulte une appréciation négative. Le développement doit être en lien direct avec le thème de la leçon présentée. L'utilisation d'un résultat qui n'apparaît pas dans le plan écrit doit être explicitement signalée par le candidat. Toute utilisation d'un lemme non démontré et enfermant l'essence de la preuve est sanctionnée. Le jury peut exiger la démonstration d'un lemme admis, si celui-ci est essentiellement le cœur du développement. Il faut éviter de présenter ou d'utiliser un résultat préliminaire ou intermédiaire sans explication convaincante. Dans le cas d'un développement difficile, il ne faut pas négliger les cas élémentaires et les détails utiles à la compréhension du jury. Le jury déplore l'abus de certains développements plus ou moins classiques, qui ne sont pas toujours utilisés à bon escient et qui occupent parfois une place disproportionnée (l'ellipsoïde de JOHN, la décomposition de DUNFORD, le théorème de BERNSTEIN, le processus de GALSTON-WATSON,...). Trop de candidats ont tendance à replacer exagérément et de manière inappropriée de tels développements et se retrouvent ainsi hors sujet, impair qui est sévèrement sanctionné.

Le programme du concours comprend maintenant un chapitre spécifique consacré aux méthodes numériques. Les candidats sont invités à explorer ce champ, éventuellement en s'appuyant sur leurs connaissances spécifiques à l'option de modélisation qu'ils ont choisie, pour proposer des développements originaux en lien avec l'analyse d'algorithmes de calcul. La description des leçons indique quelques pistes dans cette direction. Le jury se réjouit que des candidats aient su saisir ces opportunités et espère que cette tendance, qui enrichit les contenus, se renforcera.

La pertinence des explications, le souci pédagogique, la capacité à mener à bien et complètement le sujet dans le temps imparti, l'aisance technique sont des éléments importants d'appréciation. Par ailleurs, le candidat doit s'attendre à être interrogé lors de la période de discussion sur des applications ou illustrations élémentaires de son développement. Il est donc essentiel qu'il soit capable de reconnaître dans une question donnée un cas particulier simple du résultat général qu'il vient d'exposer.

5.1.3 Troisième partie : questions et dialogue

Le jury teste systématiquement la maîtrise du plan présenté. Une part importante de la discussion porte donc sur le plan, ou trouve sa source dans le plan présenté par le candidat. Il faut éviter que ce plan dépasse largement le niveau que l'on maîtrise. Le candidat doit se préparer à des questions élémentaires voire considérées comme « évidentes » sur tout énoncé mis dans son plan, questions auxquelles il doit répondre avec précision. Des candidats après des prestations relevées ont parfois pu être surpris de telles questions portant sur les bases ; elles sont pourtant quasi-systématiques, le jury souhaitant précisément s'assurer de la maîtrise de ces bases. Le jury peut aussi proposer des calculs illustrant les notions évoquées par le plan.

Cette phase de l'épreuve requiert un certain recul qui ne peut être que le fruit d'un travail de préparation approfondi en amont du concours où l'on doit se demander si on est capable de mettre en œuvre des énoncés sur des situations simples et, pour certains théorèmes, réfléchir à des exemples ou des contre-exemples.

Les réponses aux questions des examinateurs ne prennent pas forcément une forme unique et ceux-ci se placent dans une posture de dialogue avec le candidat. Le jury pose aussi des exercices en rapport direct avec la leçon et le plan proposé mais ne s'attend pas à ce que le candidat trouve une solution immédiatement. Ces exercices ont plutôt pour objectif de voir évoluer le futur agrégé dans une démarche scientifique rigoureuse et méthodique. Le candidat doit réfléchir, utiliser son plan et rattacher l'exercice à sa leçon. Le fait de ne pas résoudre un exercice ne doit pas être perçu comme un échec et le candidat ne doit pas se décourager : plus qu'achever l'exercice, ce sont les réactions du candidat qui importent (par exemple en identifiant l'énoncé de la leçon qui permettrait de traiter le problème et en se demandant si les hypothèses d'application sont satisfaites). Dans cette partie de l'épreuve le candidat doit faire preuve de capacité d'écoute ; il doit rester attentif aux suggestions du jury. Pendant cette discussion, le jury veille à laisser un temps raisonnable au candidat pour réfléchir, sans le submerger de questions.

Enfin, l'objet du concours étant de recruter de futurs enseignants, le jury peut aussi, comme l'indique l'article 8 de l'arrêté du 25 juillet 2014, poser toute question qu'il juge utile *lui permettant d'apprécier la capacité du candidat, en qualité de futur agent du service public d'éducation, à prendre en compte dans le cadre de son enseignement la construction des apprentissages des élèves et leurs besoins, à se représenter la diversité des conditions d'exercice du métier, à en connaître de façon réfléchie le contexte, les différentes dimensions (classe, équipe éducative, établissement, institution scolaire, société) et les valeurs qui le portent, dont celles de la République. Le jury peut, à cet effet, prendre appui sur le référentiel des compétences professionnelles des métiers du professorat et de l'éducation fixé par l'arrêté du 1er juillet 2013.*

5.2 L'épreuve orale d'algèbre et géométrie

Le jury apprécie que les candidats soient capables d'appliquer les résultats fondamentaux de leur leçon à des cas simples. Par exemple il est indispensable de savoir

— justifier qu'une matrice est diagonalisable ou en déterminer un polynôme annulateur ;

— effectuer des manipulations élémentaires sur les éléments appartenant à diverses structures algébriques standards ($\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, $\mathfrak{S}_n$, $\mathbf{F}_q$, etc.) ;

— mettre en œuvre des algorithmes exposés dans le plan (opérations élémentaires sur des systèmes ou des déterminants, réduction de Gauss d'une forme quadratique, *etc.*).

Dans les leçons, les illustrations des notions algébriques par des exemples et des applications issus de la géométrie sont les bienvenues. Les thèmes relevant de la théorie des groupes se prêtent tout particulièrement à de telles illustrations. De plus, les connaissances spécifiques à chacune des trois options A, B et C fournissent des exemples d'applications très appréciés par le jury.

Les notions de quotients sont importantes, il est important à ce stade de dominer la projection canonique et surtout, les subtilités du passage au quotient dans le cadre d'un morphisme.

La théorie des représentations est naturellement reliée à bon nombre de leçons. En effet, en dehors des leçons directement concernées, les représentations peuvent figurer naturellement dans les leçons 101, 102, 103, 104, 105, 106 et 150.

Les remarques qui suivent sont spécifiques à chaque leçon et permettent aux candidats de mieux saisir les attentes du jury sur chacun de ces sujets. On y distingue clairement ce qui constitue le cœur du sujet d'éléments plus sophistiqués et ambitieux, qui dépassent cette base.

101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Dans cette leçon, il faut bien dominer les deux approches de l'action de groupe : l'approche naturelle et l'approche *via* le morphisme du groupe agissant vers le groupe des permutations de l'ensemble sur lequel il agit. La formule des classes et ses applications immédiates sont incontournables. Des exemples de natures différentes doivent être présentés : actions sur un ensemble fini, sur un espace vectoriel (en particulier les représentations), sur un ensemble de matrices, sur des groupes ou des anneaux. Les exemples issus de la géométrie ne manquent pas (groupes d'isométries d'un solide ou d'un polygone régulier). Il est important de savoir calculer des stabilisateurs et des orbites notamment dans le cadre de l'action par conjugaison. Les théorèmes de SYLOW peuvent avoir leur place dans cette leçon.

Parmi les applications des actions de groupes, on pourra citer des résultats de dénombrement, comme par exemple la formule de LUCAS qui permet de calculer efficacement les cœfficients binomiaux.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en décrivant les actions naturelles de $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{F}_q)$ sur la droite projective, ou de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur le demi-plan de POINCARÉ.

En notant que l'injection du groupe de permutations dans le groupe linéaire par les matrices de permutations donne lieu à des représentations, ils pourront facilement en déterminer le caractère.

102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

Cette leçon ne doit pas se cantonner aux aspects élémentaires. Elle doit donner l'occasion d'expliquer où et comment les nombres complexes de module 1 et les racines de l'unité apparaissent dans divers domaines des mathématiques (exponentielle complexe et ses applications, polynômes cyclotomiques, spectre de matrices remarquables, théorie des représentations). Il ne faut pas non plus oublier la partie « groupe » de la leçon : on pourra s'intéresser au relèvement du groupe unité au groupe additif des réels et aux propriétés qui en résultent. De même, il est pertinent d'étudier les sous-groupes finis de $\mathbf{S}^1$ dans cette leçon.

On pourra aussi s'intéresser aux groupes des nombres complexes de $\mathbf{Q}[i]$, et les racines de l'unité qui y appartiennent ; tout comme aux sous-groupes compacts de $\mathbf{C}^*$. Les transformées de FOURIER discrètes et rapides peuvent aussi être abordées dans cete leçon.

103 : Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

Dans cette leçon, il faut non seulement évoquer les notions de groupe quotient, de sous-groupe dérivé et de groupe simple mais surtout savoir les utiliser et en expliquer l'intérêt. On pourra utiliser des exemples issus de la géométrie, de l'arithmétique, de l'algèbre linéaire (utilisation d'espaces vectoriels quotients par exemple). La notion de produit semi-direct n'est plus au programme ; mais, lorsqu'elle est utilisée, il faut savoir la définir proprement et savoir reconnaître des situations simples où de tels produits apparaissent (le groupe diédral D_n par exemple).

S'ils le désirent, les candidats peuvent poursuivre en illustrant ces notions à l'aide d'une table de caractères et décrire le treillis des sous-groupes distingués, ainsi que l'indice du sous-groupe dérivé, d'un groupe fini à l'aide de cette table.

104 : Groupes finis. Exemples et applications.

Dans cette leçon il faut savoir manipuler correctement les éléments de différentes structures usuelles ($\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, $\mathfrak{S}_n$, etc.) comme, par exemple, en proposer un générateur ou une famille de générateurs, savoir calculer un produit de deux permutations, savoir décomposer une permutation en produit de cycles à supports disjoints. Il est important que la notion d'ordre d'un élément soit mentionnée et comprise dans des cas simples. Le théorème de structure des groupes abéliens finis doit être connu. Il est bon de connaître les groupes d'ordre p et p^2 pour p premier ainsi que les groupes d'ordre inférieur à 8.

Les exemples doivent figurer en bonne place dans cette leçon. Les groupes d'automorphismes fournissent des exemples très naturels. On peut aussi étudier les groupes de symétries $\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{A}_5$ et relier sur ces exemples géométrie et algèbre, les représentations ayant ici toute leur place ; il est utile de connaître les groupes diédraux.

S'ils le désirent, les candidats peuvent ensuite mettre en avant les spécificités de groupes comme le groupe quaternionique, les sous-groupes finis de $\mathrm{SU}(2)$ ou les groupes $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_q)$.

105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

Parmi les attendus, il faut savoir relier la leçon avec les notions d'orbites et d'actions de groupes. Il faut aussi savoir décomposer une permutation en cycles à supports disjoints, tant sur le plan théorique (preuve du théorème de décomposition), que pratique (sur un exemple). Il est important de savoir déterminer les classes de conjugaisons du groupe symétrique par la décomposition en cycles, d'être capable de donner des systèmes de générateurs.

L'existence du morphisme signature est un résultat non trivial mais ne peut pas constituer, à elle seule, l'objet d'un développement. Il est bon d'avoir en tête que tout groupe fini se plonge dans un groupe symétrique et de savoir calculer la signature des permutations ainsi obtenues dans des cas concrets.

Les applications sont nombreuses, il est très naturel de parler du déterminant, des polynômes symétriques ou des fonctions symétriques des racines d'un polynôme.

On peut également parler du lien avec les groupes d'isométries des solides.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant aux automorphismes du groupe symétrique, à des problèmes de dénombrement, aux représentations des groupes des permutations ou encore aux permutations aléatoires.

106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

Cette leçon ne doit pas se résumer à un catalogue de résultats épars sur $\mathrm{GL}(E)$. Il est important de savoir faire correspondre les sous-groupes du groupe linéaire avec les stabilisateurs de certaines actions naturelles (sur des formes quadratiques, symplectiques, sur des drapeaux, sur une décomposition en somme directe, *etc.*). On doit présenter des systèmes de générateurs de $\mathrm{GL}(E)$ et étudier la topologie de ce groupe en précisant pourquoi le choix du corps de base est important. Les liens avec le pivot de Gauss sont à détailler. Il faut aussi savoir réaliser $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ et faire le lien entre signature et déterminant, et entre les classes de conjugaison et les classes de similitude.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en remarquant que la théorie des représentations permet d'illustrer l'importance de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ et de son sous-groupe unitaire.

107 : Représentations et caractères d'un groupe fini sur un C-espace vectoriel. Exemples.

Il s'agit d'une leçon où théorie et exemples doivent apparaître. D'une part, il est indispensable de savoir dresser une table de caractères pour des petits groupes, et d'autre part, il faut savoir tirer des informations sur le groupe à partir de sa table de caractères, et être capable de trouver la table de caractères de certains sous-groupes. Les représentations peuvent provenir d'actions de groupes sur des ensembles finis, de groupes d'isométries, d'isomorphismes exceptionnels entre groupes de petit cardinal. Inversement, on peut chercher à interpréter des représentations de façon géométrique, mais il faut avoir conscience qu'une table de caractères provient généralement de représentations complexes *a priori* non réelles. La présentation du lemme de SCHUR est importante et ses applications doivent être parfaitement maîtrisées.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'aventurer dans la construction de l'icosaèdre à partir de la table de caractères de $\mathfrak{A}_5$ en utilisant l'indice de SCHUR (moyenne des caractères sur les carrés des éléments du groupe) ou évoquer la transformée de FOURIER.

108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

C'est une leçon qui doit être illustrée par des exemples très variés qui peuvent être en relation avec les groupes de permutations, les groupes linéaires ou leurs sous-groupes, comme $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$, $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ ou $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$. Les groupes $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, fournissent aussi des exemples intéressants. La connaissance de parties génératrices s'avère très utile dans l'analyse des morphismes de groupes ou pour montrer la connexité par arcs de certains sous-groupes de $\mathrm{Gl}_n(\mathbf{R})$ par exemple.

Tout comme dans la leçon 106, la présentation du pivot de GAUSS et de ses applications est envisageable.

Il est important de présenter les différents systèmes de générateurs du groupe symétrique et de savoir mettre en évidence l'intérêt du choix de ces systèmes dans divers exemples.

Le candidat pourra également parler des générateurs du groupe diédral et, si il le souhaite, il pourra donner une présentation par générateurs et relations d'un groupe (groupe diédral, groupe symétrique, ou groupe des tresses).

Il est également possible de parler du logarithme discret et de ces applications à la cryptographie (algorithme de DIFFIE-HELLMAN, cryptosystème de EL GAMAL).

110 : Structure et dualité des groupes abéliens finis. Applications.

Le théorème de structure des groupes abéliens finis a une place de choix dans cette leçon. Il s'agit d'un résultat de classification, et à ce titre, la clause d'unicité en est une composante essentielle. La dualité des groupes abéliens finis doit être détaillée. Comme application, la cyclicité du groupe multiplicatif d'un corps fini est tout à fait adaptée. D'ailleurs, des exemples de caractères, additifs, ou multiplicatifs dans le cadre des corps finis, sont les bienvenus. Il est possible de s'intéresser aux sommes de GAUSS.

Pour aller plus loin, la leçon peut naturellement déboucher sur l'introduction de la transformée de FOURIER discrète qui pourra être vue comme son analogue analytique, avec ses formules d'inversion, sa formule de PLANCHEREL, mais dans une version affranchie des problèmes de convergence, qui font le sel des leçons d'Analyse sur ce sujet. Ainsi, la leçon peut mener à introduire la transformée de FOURIER rapide sur un groupe abélien dont l'ordre est une puissance de 2 ainsi que des applications à la multiplication d'entiers, de polynômes et éventuellement au décodage de codes via la transformée de HADAMARD.

120 : Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

Dans cette leçon, l'entier n n'est pas forcément un nombre premier. Il est utile de connaître et d'étudier le groupe des inversibles de l'anneau et les idéaux de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Il est nécessaire de bien maîtriser le théorème chinois et sa réciproque. S'ils le désirent, les candidats peuvent poursuivre en donnant une généralisation du théorème chinois lorsque deux éléments ne sont pas premiers entre eux, ceci en faisant apparaître le PGCD et le PPCM de ces éléments.

Il faut bien sûr savoir appliquer le théorème chinois à l'étude du groupe des inversibles et, ainsi, retrouver la multiplicativité de l'indicatrice d'EULER. Toujours dans le cadre du théorème chinois, il est bon de distinguer clairement les propriétés de groupes additifs et d'anneaux.

Enfin, il est indispensable de présenter quelques applications arithmétiques des propriétés des anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, telles que l'étude de quelques équations diophantiennes bien choisies. De même, les applications cryptographiques telles que l'algorithme RSA sont naturelles dans cette leçon.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant au calcul effectif des racines carrées dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, au logarithme discret, ou à la transformée de Fourier rapide. Il est également possible de parler des nombres p-adiques.

121 : Nombres premiers. Applications.

Le sujet de cette leçon est très vaste. Aussi les choix devront être clairement motivés. La réduction modulo p n'est pas hors-sujet et constitue un outil puissant pour résoudre des problèmes arithmétiques simples. La répartition des nombres premiers est un résultat historique important qu'il faudrait citer. Sa démonstration n'est bien sûr pas exigible au niveau de l'agrégation.

Quelques résultats sur les corps finis et leur géométrie sont les bienvenus, ainsi que des applications en cryptographie.

122 : Anneaux principaux. Applications.

Comme l'indique son intitulé, cette leçon n'est pas uniquement théorique. Il est possible de présenter des exemples d'anneaux principaux classiques autres que $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}[X]$ (décimaux, entiers de Gauss ou d'Eisenstein), accompagnés d'une description de leurs irréductibles. Les applications en algèbre linéaire ne manquent pas et doivent être mentionnées. Par exemple, les notions de polynôme minimal sont très naturelles parmi les applications. Les anneaux euclidiens représentent une classe d'anneaux principaux importante et l'algorithme d'Euclide a toute sa place dans cette leçon pour effectuer des calculs.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant à l'étude des réseaux, à des exemples d'anneaux non principaux, mais aussi à des exemples d'équations diophantiennes résolues à l'aide d'anneaux principaux. À ce sujet, il sera fondamental de savoir déterminer les unités d'un anneau, et leur rôle au moment de la décomposition en facteurs premiers. De même, le calcul effectif des facteurs invariants de matrices à coefficients dans certains anneaux peut être fait.

123 : Corps finis. Applications.

Une construction des corps finis doit être connue et une bonne maîtrise des calculs dans les corps finis est indispensable. Les injections des divers $\mathbf{F}_q$ doivent être connues. Les applications des corps finis (y compris pour $\mathbf{F}_q$ avec q non premier !) ne doivent pas être oubliées, par exemple l'étude de polynômes à coefficients entiers et de leur irréductibilité peut figurer dans cette leçon. Le calcul des degrés des extensions et le théorème de la base téléscopique sont incontournables. La structure du groupe multiplicatif doit aussi être connue. L'étude des carrés dans un corps fini et la résolution d'équations de degré 2 sont envisageables.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en détaillant des codes correcteurs ou en étudiant l'irréductiblilité des polynômes à coefficients dans un corps fini.

125 : Extensions de corps. Exemples et applications.

Le théorème de la base téléscopique et ses applications à l'irréductibilité de certains polynômes, ainsi que les corps finis, sont incontournables. De même il faut savoir calculer le polynôme minimal d'un élément algébrique dans des cas simples, notamment pour quelques racines de l'unité. La leçon peut être illustrée par des exemples d'extensions quadratiques et leurs applications en arithmétique, ainsi que par des extensions cyclotomiques.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'aventurer en théorie de Galois ou expliquer comment l'utilisation du résultant permet de calculer des polynômes annulateurs de sommes et de produits de nombres algébriques.

126 : Exemples d'équations diophantiennes.

Pour la session 2019, le titre de cette leçon évolue en

Exemples d'équations en arithmétique.

Ce nouvel intitulé traduit le souhait d'élargir le contexte de la leçon, au delà des seules équations sur $\mathbf{Z}$ pour étudier aussi des équations dans $\mathbf{Z}/\mathbf{nZ}$ et dans les corps finis.

Malgré le changement d'intitulé, les équations diophantiennes occupent une place importante et doivent absolument être abordées dans cette leçon. On doit présenter les notions de bases servant à aborder les équations de type $ax + by = d$ (identité de BEZOUT, lemme de GAUSS) mais aussi bien entendu la méthode de descente de FERMAT et l'utilisation de la réduction modulo un nombre premier p. La leçon peut aussi dériver vers la notion de factorialité, illustrée par des équations de type MORDELL, PELL-FERMAT, et même FERMAT (pour $n = 2$, ou pour les nombres premiers de Sophie GERMAIN). La résolution des systèmes linéaires sur $\mathbf{Z}$ peut être abordée.

Il est naturel de s'intéresser à la résolution des systèmes de congruences, à la recherche de racines carrées dans les corps finis. Les candidats peuvent plus généralement aborder la recherche des racines des polynômes dans les corps finis.

S'il le désirent, les candidats peuvent étudier les coniques sur les corps finis et la recherche de points sur ces coniques.

141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

La présentation du bagage théorique permettant de définir corps de rupture, corps de décomposition, ainsi que des illustrations dans différents types de corps (réel, rationnel, corps finis) sont inévitables. Les corps finis peuvent être illustrés par des exemples de polynômes irréductibles de degré 2, 3, 4 sur $\mathbf{F}_2$ ou $\mathbf{F}_3$. Il est nécessaire de présenter des critères d'irréductibilité de polynômes et des polynômes minimaux de quelques nombres algébriques.

Il faut savoir qu'il existe des corps algébriquement clos de caractéristique nulle autres que $\mathbf{C}$; il est bon de savoir montrer que l'ensemble des nombres algébriques sur le corps $\mathbf{Q}$ des rationnels est un corps algébriquement clos. Le théorème de la base téléscopique, ainsi que les utilisations arithmétiques (utilisation de la divisibilité) que l'on peut en faire dans l'étude de l'irréductibilité des polynômes, est incontournable.

142 : PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

Le champ d'étude de cette leçon ne peut se limiter au cas de $\mathbf{Z}$; il s'agit de définir et manipuler les notions de PGCD et PPCM dans un anneau factoriel et comme générateurs de sommes/intersections d'idéaux dans un anneau principal. Le candidat devra prendre soin de différencier le cadre théorique des anneaux factoriels ou principaux dans lequel sont définis les objets et dans lequel s'appliquent les énoncés des théorèmes proposés et le cadre euclidien fournissant les algorithmes. Bien sûr, la leçon peut opportunément s'illustrer d'exemples élémentaires d'anneaux euclidiens, comme $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}[X]$.

La leçon doit accorder une part substantielle à la présentation d'algorithmes : algorithme d'EUCLIDE, algorithme binaire, algorithme d'EUCLIDE étendu. Dans le cas des polynômes, on étudiera l'évolution de la suite des degrés et des restes. Il est important de savoir évaluer le nombre d'étapes de ces algorithmes dans les pires cas et on pourra faire le lien avec les suites de FIBONACCI.

La leçon abordera des applications élémentaires : calcul de relations de BÉZOUT, résolutions d'équations diophantiennes linéaires, inversion modulo un entier ou un polynôme, calculs d'inverses dans les corps de ruptures, les corps finis. On peut aussi évoquer le théorème chinois effectif, la résolution d'un système de congruences et faire le lien avec l'interpolation de LAGRANGE.

Pour aller plus loin, on pourra évoquer le rôle de algorithme d'EUCLIDE étendu dans de nombreux algorithmes classique en arithmétique (factorisation d'entiers, de polynômes, *etc*). Décrire l'approche matricielle de l'algorithme d'EUCLIDE et l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur $\mathbf{Z}^2$ est tout à fait pertinent. On pourra établir l'existence d'un supplémentaire d'une droite dans $\mathbf{Z}^2$, ou d'un hyperplan de $\mathbf{Z}^n$, la possibilité de compléter un vecteur de $\mathbf{Z}^n$ en une base.

La leçon peut amener à étudier les matrices à coefficients dans un anneau principal ou euclidien, la forme normale d'HERMITE et son application à la résolution d'un système d'équations diophantiennes linéaires. Aborder la forme normale de SMITH, et son application au théorème de la base adaptée, permet de faire le lien avec la réduction des endomorphismes *via* le théorème des invariants de similitude.

La leçon invite aussi, pour des candidats familiers de ces notions, à décrire le calcul de PGCD dans $\mathbf{Z}[X]$ et $\mathbf{K}[X,Y]$, avec des applications à l'élimination de variables. On pourra rappeler les relations entre PGCD et résultant et montrer comment obtenir le PGCD en échelonnant la matrice de SYLVESTER. Sur l'approximation diophantienne, on peut enfin envisager le développement d'un rationnel en fraction continue et l'obtention d'une approximation de PADÉ-HERMITE à l'aide de l'algorithme d'EUCLIDE, la recherche d'une relation de récurrence linéaire dans une suite ou le décodage des codes BCH.

144 : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications

Dans cette leçon, des méthodes, même élémentaires, de localisation des racines ont toute leur place. Ils peuvent déboucher sur des résultats de topologie à propos de la continuité des racines.

Il peut être pertinent d'introduire la notion de polynôme scindé et de citer le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS. Les relations entre cœfficients et racines doivent être maîtrisées et pouvoir être mises en œuvre.

Il est apprécié de faire apparaître le lien entre la recherche des racines d'un polynôme et la réduction des matrices. Les candidats peuvent également s'intéresser aux racines des polynômes orthogonaux, ou aux règles des signes de DESCARTES et de STURM. L'étude des propriétés des nombres algébriques peuvent trouver leur place dans cette leçon. La théorie des corps et le cas particulier des corps finis peuvent aussi être évoqués de façon pertinente.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'aventurer en théorie de GALOIS ou s'intéresser à des problèmes plus avancés de localisation des valeurs propres, comme les disques de GERSHGORIN.

Il ne s'agit par contre en aucun cas d'adapter le plan de la leçon 141 : l'irréductibilité des polynômes peut être évoquée mais ne doit pas être l'élément central de la leçon.

150 : Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

Dans cette leçon il faut présenter différentes actions (congruence, similitude, équivalence, ...) et dans chaque cas on pourra dégager d'une part des invariants (rang, matrices échelonnées réduites...) et d'autre part des algorithmes, comme le pivot de GAUSS, méritent aussi d'être présentés dans cette leçon. Si l'on veut aborder un aspect plus théorique, il est pertinent de faire apparaître à travers ces actions quelques décompositions célèbres ; on peut décrire les orbites lorsque la topologie s'y prête.

S'ils le désirent, les candidats peuvent travailler sur des corps finis et utiliser le dénombrement dans ce contexte.

151 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Dans cette leçon, il est indispensable de présenter les résultats fondateurs de la théorie des espaces vectoriels de dimension finie en ayant une idée de leurs preuves. Ces théorèmes semblent simples car ils ont été très souvent pratiqués, mais leur preuve demande un soin particulier. Il est important de savoir justifier pourquoi un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est aussi de dimension finie. Le pivot de Gauss ainsi que les diverses notions et caractérisations du rang trouvent leur place dans cette leçon. Les applications sont nombreuses, on peut par exemple évoquer l'existence de polynômes annulateurs ou alors décomposer les isométries en produits de réflexions.

On pourra utiliser les caractérisations du rang pour démontrer l'invariance du rang par extension de corps, ou pour établir des propriétés topologiques (sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$).

S'ils le désirent, les candidats peuvent déterminer des degrés d'extensions dans la théorie des corps ou s'intéresser aux nombres algébriques.

On pourra également explorer des applications en analyse comme les extrémas liés ou l'étude de l'espace vectoriel engendré par les translatés d'une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

Dans un autre registre, il est pertinent d'évoquer la méthode des moindres carrés dans cette leçon, par exemple en faisant ressortir la condition de rang maximal pour garantir l'unicité de la solution et s'orienter vers les techniques de décomposition en valeurs singulières pour le cas général. On peut alors naturellement explorer l'approximation d'une matrice par une suite de matrices de faible rang.

152 : Déterminant. Exemples et applications.

Dans cette leçon, il faut commencer par définir correctement le déterminant. Il est possible d'entamer la leçon en disant que le sous-espace des formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n est de dimension 1 et, dans ce cas, il est essentiel de savoir le montrer. Le plan doit être cohérent ; si le déterminant n'est défini que sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, il est délicat de définir $\det(A - XI_n)$ avec A une matrice carrée. L'interprétation du déterminant comme volume est essentielle. On peut rappeler son rôle dans les formules de changement de variables, par exemple pour des transformations de variables aléatoires.

Le calcul explicite est important, mais le jury ne peut se contenter d'un déterminant de Vandermonde ou d'un déterminant circulant. Les opérations élémentaires permettant de calculer des déterminants, avec des illustrations sur des exemples, doivent être présentées. Il est bienvenu d'illustrer la continuité du déterminant par une application, ainsi que son caractère polynomial. Pour les utilisations des propriétés topologiques, on n'omettra pas de préciser le corps de base sur lequel on se place.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'intéresser aux calculs de déterminants sur $\mathbf{Z}$ avec des méthodes multimodulaires. Le résultant et les applications simples à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes peuvent aussi trouver leur place dans cette leçon pour des candidats ayant une pratique de ces notions.

153 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Cette leçon ne doit pas être un catalogue de résultats autour de la réduction qui est ici un moyen pour démontrer des théorèmes ; les polynômes d'endomorphismes doivent y occuper une place importante. Il faut consacrer une courte partie de la leçon à l'algèbre $\mathbf{K}[u]$ et connaître sa dimension sans hésitation. Il est ensuite possible de s'intéresser aux propriétés globales de cette algèbre.

Les liens entre réduction d'un endomorphisme u et la structure de l'algèbre $\mathbf{K}[u]$ sont importants, tout comme ceux entre les idempotents et la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques. Il faut bien préciser que, dans la réduction de Dunford, les composantes sont des polynômes en l'endomorphisme, et en connaître les conséquences théoriques et pratiques.

L'aspect *applications* est trop souvent négligé. Il est possible, par exemple, de mener l'analyse spectrale de matrices stochastiques. On attend d'un candidat qu'il soit en mesure, pour une matrice simple de justifier la diagonalisabilité et de déterminer un polynôme annulateur (voire minimal). Il est bien sûr important de ne pas faire de confusion entre diverses notions de multiplicité pour une valeur propre λ donnée (algébrique ou géométrique). Enfin, calculer A^k ne nécessite pas, en général, de réduire A (la donnée d'un polynôme annulateur de A suffit souvent). Il est possible d'envisager des applications aux calculs d'exponentielles de matrices.

S'il le souhaite, le candidat pourra étudier des équations matricielles et de calcul fonctionnel, avec par exemple l'étude de l'extraction de racines ou du logarithme.

154 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Dans cette leçon, il faut présenter des propriétés de l'ensemble des sous-espaces stables par un endomorphisme. Des études détaillées sont les bienvenues, par exemple dans le cas d'une matrice diagonalisable ou dans le cas d'une matrice nilpotente d'indice maximum.

L'étude des endomorphismes cycliques et des endomorphismes semi-simples trouvent tout à fait leur place dans cette leçon. Dans le cas des corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, on pourra, si on le souhaite, caractériser ces derniers par la fermeture de leur orbite.

La réduction des endomorphismes normaux et l'exemple de résolutions d'équations matricielles peuvent être présentés en applications.

La décomposition de Frobenius constitue également une application intéressante de cette leçon. Il ne faut pas oublier d'examiner le cas des sous-espaces stables par des familles d'endomorphismes. Ceci peut déboucher par exemple sur des endomorphismes commutants entre eux ou sur la théorie des représentations.

155 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Dans cette leçon, on attend des exemples naturels d'endomorphismes diagonalisables et des critères de diagonalisabilité. On doit notamment savoir expliquer pourquoi l'application induite par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable est encore diagonalisable. On n'oubliera pas de parler du cas des endomorphismes symétriques. On peut étudier certaines propriétés topologiques en prenant le soin de donner des précisions sur le corps $\mathbf{K}$ et la topologie choisie pour $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Le calcul de l'exponentielle d'un endomorphisme diagonalisable est immédiat une fois que l'on connaît les valeurs propres et ceci sans diagonaliser la matrice, par exemple à l'aide des projecteurs spectraux. Sur les corps finis, on a des critères spécifiques de diagonalisabilité. On peut dénombrer les endomorphismes diagonalisables, ou possédant des propriétés données, liées à la diagonalisation.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'intéresser aux liens qui peuvent aussi être fait avec la théorie des représentations et la transformée de Fourier rapide.

156 : Exponentielle de matrices. Applications.

Bien que ce ne soit pas une leçon d'analyse, il faut toutefois pouvoir justifier clairement la convergence de la série exponentielle. La distinction entre le cas réel et complexe doit être clairement évoqué.

Les questions de surjectivité ou d'injectivité doivent être abordées. Par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle l'exponentielle d'une matrice à coefficients réels ? La matrice définie par blocs $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est-elle l'exponentielle d'une matrice à coefficients réels ?

La décomposition de Dunford multiplicative (décomposition de Jordan) de $\exp(A)$ trouve toute son utilité dans cette leçon. Notons que l'exponentielle fait bon ménage avec la décomposition polaire dans bon nombre de problèmes sur les sous-groupes du groupe linéaire. L'étude du logarithme (quand il est défini) trouve toute sa place dans cette leçon. Si l'on traite du cas des matrices nilpotentes, on pourra évoquer le calcul sur les développements limités.

Il est bon de connaître l'image par exponentielle de certains sous-ensembles de matrices (ensemble des matrices symétriques, hermitiennes, ou antisymétriques).

Les applications aux équations différentielles méritent d'être présentées sans toutefois constituer l'essentiel de la leçon. On pourra par exemple faire le lien entre réduction et comportement asymptotique, mais le jury déconseille aux candidats de proposer ce thème dans un développement de cette leçon, sauf à avoir bien compris comment les apports algébriques permettent ici de simplifier les conclusions analytiques.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'aventurer vers les sous-groupes à un paramètre du groupe linéaire (on peut alors voir si ces sous-groupes constituent des sous-variétés fermées de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$) ou vers les algèbres de Lie.

157 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Il est bon de savoir expliquer pourquoi l'application induite par un endomorphisme trigonalisable (respectivement nilpotent) sur un sous-espace stable est encore trigonalisable (respectivement nilpotent). L'utilisation des noyaux itérés est fondamentale dans cette leçon, par exemple pour déterminer si deux matrices nilpotentes sont semblables. Il est intéressant de présenter des conditions suffisantes de trigonalisation simultanée ; l'étude des endomorphismes cycliques a toute sa place dans cette leçon. L'étude des nilpotents en dimension 2 débouche naturellement sur des problèmes de quadriques et l'étude sur un corps fini donne lieu à de jolis problèmes de dénombrement.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi présenter la décomposition de Frobenius, ou des caractérisations topologiques des endomorphismes nilpotents, ou encore des propriétés topologiques de l'ensemble des endomorphismes nilpotents.

158 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

Le théorème spectral est indispensable dans cette leçon sans toutefois constituer un développement consistant. Les matrices symétriques positives et définies positives ont une place importante dans cette leçon ; les candidats doivent connaître leurs propriétés fondamentales, leur rôle, et la structure de leur ensemble. La notion de signature pourra être présentée ainsi que son unicité dans la classe de congruence d'une matrice symétrique réelle. L'action du groupe linéaire et du groupe orthogonal sur l'espace des matrices symétriques peut donner un cadre naturel à cette leçon. Le lien avec les formes quadratiques et les formes hermitiennes est incontournable. La partie réelle et la partie imaginaire d'un produit hermitien définissent des structures sur l'espace vectoriel réel sous-jacent. L'orthogonalisation simultanée est un résultat important de cette leçon. Il faut en connaître les applications géométriques aux quadriques.

Les candidats familiers avec ces notions pourront illustrer la leçon en évoquant le cas des matrices de covariance de vecteurs aléatoires et discuter les conditions en assurant le caractère inversible.

Une discussion de la décomposition de Cholesky, qui a de nombreuses applications pour le calcul scientifique (en lien avec la résolution de systèmes linéaires ou de problèmes de moindres carrés) ou en probabilités (construction d'un vecteur gaussien de matrice de covariance donnée à partir d'un vecteur gaussien de matrice de covariance identité), peut mériter sa place dans cette leçon. On poura également évoquer la décomposition en valeurs singulières d'une matrice (particulièrement importante pour le traitement massif de données).

159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Il est important de bien placer la thématique de la dualité dans cette leçon ; celle-ci permet de mettre en évidence des correspondances entre un morphisme et son morphisme transposé, entre un sous-espace et son orthogonal (canonique), entre les noyaux et les images ou entre les sommes et les intersections. Bon nombre de résultats d'algèbre linéaire se voient dédoublés par cette correspondance. Les liens entre base duale et fonctions de coordonnées doivent être parfaitement connus. Le passage d'une base à sa base duale ou antédualte, ainsi que les formules de changement de base, doivent être maîtrisés. On pourra s'intéresser aux cas spécifiques où l'isomorphisme entre l'espace et son dual est canonique (cas euclidien, cas des matrices).

Savoir calculer la dimension d'une intersection d'hyperplans via la dualité est important dans cette leçon. L'utilisation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permet facilement d'obtenir les équations d'un sous-espace vectoriel ou d'exhiber une base d'une intersection d'hyperplans.

Cette leçon peut être traitée sous différents aspects : géométrique, algébrique, topologique ou analytique. Il faut que les développements proposés soient en lien direct avec la leçon. Enfin rappeler que la différentielle d'une fonction à valeurs réelles est une forme linéaire semble incontournable.

Il est possible d'illustrer la leçon avec un point de vue probabiliste, en rappelant que la loi d'un vecteur aléatoire X est déterminée par les lois unidimensionnelles de $X \cdot u$ pour tout vecteur u.

160 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Dans cette leçon, le caractère euclidien de l'espace est essentiel pour que l'endomorphisme soit remarquable. Le théorème spectral pour les auto-adjoints et la réduction des endomorphismes orthogonaux sont des résultats incontournables. Le jury met les candidats en garde sur le fait que le lemme des noyaux ou la décomposition de Dunford ne sont pas des développements adaptés à cette leçon. En revanche, l'utilisation du fait que l'orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme est stable par l'adjoint doit être mis en valeur. De même la réduction d'endomorphismes normaux peut être évoquée.

Une illustration pertinente peut s'appuyer sur la description de problèmes de moindres carrés en faisant ressortir le rôle de l'hypothèse de rang plein de A sur le caractère inversible de $A^{\mathsf{T}}A$.

161 : Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Applications en dimensions 2 et 3.

Le titre de cette leçon évolue en 2019 et devient :

Distances et isométries d'un espace affine euclidien.

Le jury souhaite ainsi élargir le thème de la leçon. Bien entendu, le cadre classique des dimensions 2 et 3 reste très important et doit figurer en bonne place dans la leçon ; la classification des isométries en dimension 2 et 3 est exigible. En dimension 3, il faut savoir classifier les rotations et connaître les liens avec la réduction. On peut aussi penser aux isométries laissant stables certains objets en dimension 2 et 3. Il faut savoir prouver qu'une isométrie est affine, pouvoir donner des générateurs du groupe des isométries affines et savoir composer des isométries affines.

Les candidats pourront en outre parler de la définition de la distance, de la distance à un sous-espace vectoriel et de déterminant de Gram. Les groupes de similitude peuvent également être abordés.

S'ils le désirent, les candidats peuvent évoquer l'interprétation de l'écart-type comme une distance, et présenter la matrice de covariance comme un exemple pertinent de matrice de Gram. Ainsi, les déterminants de Gram permettent de calculer l'erreur commise dans le cadre de prédictions affines.

162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Dans cette leçon, les techniques liées au simple pivot de Gauss constituent l'essentiel des attendus. Il est impératif de faire le lien avec la notion de système échelonné, (dont on donnera une définition précise et correcte), et de situer l'ensemble dans le contexte de l'algèbre linéaire (sans oublier la dualité). Un point de vue opératoire doit accompagner l'étude théorique et l'intérêt algorithmique des méthodes présentées doit être expliqué. On pourra illustrer cela par des exemples simples (où l'on attend parfois une résolution explicite).

Parmi les conséquence théoriques, les candidats pourront notamment donner des systèmes de générateurs de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$. Ils peuvent aussi présenter les relations de dépendance linéaire sur les colonnes d'une matrice échelonnée qui permettent de décrire simplement les orbites de l'action à gauche de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ donnée par $(P, A) \mapsto PA$.

S'ils le désirent, les candidats peuvent exploiter les propriétés des systèmes d'équations linéaires pour définir la dimension des espaces vectoriels et obtenir une description de l'intersection de deux sous-espaces vectoriels donnés par des systèmes générateurs, ou d'une somme de deux sous-espaces vectoriels donnés par des équations.

De même, des discussions sur la résolution de systèmes sur $\mathbf{Z}$ et la forme normale de HERMITE peuvent trouver leur place dans cette leçon. Enfin, il est possible de présenter les décompostions LU et de CHOLESKI, en évaluant le coût de ces méthodes ou encore d'étudier la résolution de l'équation normale associée aux problèmes des moindres carrés et la détermination de la solution de norme minimale par la méthode de décomposition en valeurs singulières.

170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

Il faut tout d'abord noter que l'intitulé implique implicitement que le candidat ne doit pas se contenter de travailler sur $\mathbf{R}$. Le candidat pourra parler de la classification des formes quadratiques sur le corps des complexes et sur les corps finis. L'algorithme de GAUSS doit être énoncé et pouvoir être mis en œuvre sur une forme quadratique simple.

Les notions d'isotropie et de cône isotrope sont un aspect important de cette leçon. On pourra rattacher cette notion à la géométrie différentielle.

171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

Dans cette leçon, la loi d'inertie de SILVESTER doit être présentée ainsi que l'orthogonalisation simultanée. L'algorithme de GAUSS doit être énoncé et pouvoir être expliqué sur une forme quadratique de $\mathbf{R}^3$; le lien avec la signature doit être clairement énoncé et la signification géométrique des deux entiers r et s composant la signature d'une forme quadratique réelle doit être expliqué. La différentielle seconde d'une fonction de plusieurs variables est une forme quadratique importante qui mérite d'être présentée dans cette leçon.

La définition et les propriétés classiques des coniques d'un plan affine euclidien doivent être connues. On pourra présenter les liens entre la classification des formes quadratiques et celles des coniques ; de même il est intéressant d'évoquer le lien entre le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et la signature de la forme quadratique $ax^2 + bxy + cy^2$.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi aller vers la théorie des représentations et présenter l'indicatrice de SCHUR-FROBENIUS qui permet de réaliser une représentation donnée sur le corps des réels.

181 : Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

Dans cette leçon, la notion de coordonnées barycentriques est incontournable ; des illustrations dans le triangle (coordonnées barycentriques de certains points remarquables) sont envisageables. Les candidats doivent savoir reconnaître des lignes de niveau et des lieux de points en utilisant des coordonnées barycentriques. Il est important de parler d'enveloppe convexe et de savoir dessiner l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points dans le plan ; le théorème de GAUSS-LUCAS trouve parfaitement sa place dans cette leçon. Il semble approprié d'évoquer les points extrémaux, ainsi que des applications qui en résultent. Par ailleurs, il est important d'avoir compris le lien entre fonctions convexes et ensembles convexes.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en présentant le lemme de FARKAS, le théorème de séparation de HAHN-BANACH, les théorèmes de HELLY et de CARATHEODORY, ou parler des sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

182 : Applications des nombres complexes à la géométrie.

Cette leçon ne doit pas rester au niveau de la classe de Terminale. L'étude des inversions est tout à fait appropriée, en particulier la possibilité de ramener un cercle à une droite et inversement ; la formule de PTOLÉMÉE illustre bien l'utilisation de cet outil. On peut parler des suites définies par récurrence par une homographie et leur lien avec la réduction dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi étudier l'exponentielle complexe et les homographies de la sphère de RIEMANN. La réalisation du groupe SU_2 dans le corps des quaternions et ses applications peuvent trouver leur place dans la leçon. Il est possible de présenter les similitudes, les homographies et le birapport.

183 : Utilisation des groupes en géométrie.

C'est une leçon dans laquelle on s'attend à trouver des utilisations variées. On s'attend à ce que soient définis différents groupes de transformations (isométries, déplacements, similitudes, translations) et à voir résolus des problèmes géométriques par des méthodes consistant à composer des transformations. De plus, les actions de groupes sur la géométrie permettent aussi de dégager des invariants essentiels (angle, birapport, excentricité d'une conique). Les groupes d'isométries d'une figure sont incontournables.

190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Il est nécessaire de dégager clairement différentes méthodes de dénombrement et de les illustrer d'exemples significatifs. De nombreux domaines de mathématiques sont concernés par des problèmes de dénombrement, cet aspect varié du thème de la leçon doit être mis en avant. L'utilisation de séries génératrices est un outil puissant pour le calcul de certains cardinaux. De plus, il est naturel de calculer des cardinaux classiques et certaines probabilités. Il est important de connaître l'interprétation ensembliste de la somme des coefficients binomiaux et ne pas se contenter d'une justification par le binôme de NEWTON. L'introduction des corps finis (même en se limitant aux cardinaux premiers) permet de créer un lien avec l'algèbre linéaire. Les actions de groupes peuvent également conduire à des résultats remarquables.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi présenter des applications de la formule d'inversion de MÖEBIUS ou de la formule de BURNSIDE. Des candidats ayant un bagage probabiliste pourront explorer le champ des permutations aléatoires, en présentant des algorithmes pour générer la loi uniforme sur le groupe symétrique S_n et analyser certaines propriétés de cette loi uniforme (points fixes, cycles, limite $n \to +\infty$...).

5.3 L'épreuve orale d'analyse et probabilités

On trouvera dans cette section des commentaires sur chaque leçon de l'oral d'Analyse et Probabilités de la session 2018. La plupart des commentaires sur les leçons sont structurés en deux parties : la première présente ce que le jury considère comme le socle de la leçon ; la seconde partie propose des suggestions pour sortir de ce socle de base, éventuellement en allant au-delà des contours stricts du programme. Il ne s'agit que de suggestions. En particulier, s'aventurer sur des notions qui ne sont pas officiellement au programme du concours est un choix qui doit être réfléchi et qui réclame, bien entendu, de maîtriser ces notions (et, cela va de soi, celles qui sont en amont). Le jury rappelle que ces excursions au delà du programme ne sont que des options ouvertes et qu'elles ne sont pas nécessaires pour briguer d'*excellentes* notes. Il vaut bien mieux présenter deux développements classiques, pertinents (et notamment en rapport très clair avec la leçon) et maîtrisés tant au niveau du fond que de la présentation (en respectant bien les 15 minutes allouées à cette partie de l'épreuve) plutôt que de s'aventurer sur des terrains où l'on risque de manquer d'adresse et de recul.

Indépendamment du positionnement du niveau, déjà évoqué, le candidat doit sélectionner des développements pertinents relativement au thème de la leçon. Le jury peut avoir un jugement sévère lorsque l'intersection avec le titre du sujet est anecdotique. Certains développements intéressants font l'objet de réutilisations abusives parfois hors de propos (on peut citer par exemple « base hilbertienne de polynômes sur L^2 avec poids d'ordre exponentiel », « méthode de NEWTON », « GALTON-WATSON », « ellipsoïde de JOHN », « polynômes de BERNSTEIN », ...) ce qui peut conduire à un hors-sujet. Enfin, trop de candidats se lancent dans des développements difficiles pour lesquels ils ne sont manifestement pas suffisament armés (« la densité des fonctions continues nulle part dérivable », « théorème de RIESZ-FISCHER »...), une approche de l'épreuve qui ne peut être que contre-productive.

201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.

C'est une leçon riche où le candidat devra choisir soigneusement le niveau auquel il souhaite se placer. Les espaces de fonctions continues sur un compact (par exemple sur l'intervalle $[0, 1]$) offrent des exemples élémentaires et pertinents. Les candidats peuvent se concentrer dans un premier temps sur les espaces de fonctions continues et les propriétés de l'espace selon la norme dont il est muni. La norme $\|\cdot\|_\infty$ est naturellement associée à la convergence uniforme dont il faut avoir assimilé les bases (en particulier, le jury attend une maîtrise du fait qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue). On peut aussi envisager les variantes faisant intervenir une ou plusieurs dérivées.

Les espaces de HILBERT de fonctions comme l'espace des fonctions L^2 constituent ensuite une ouverture déjà significative. Le jury attend que les candidats aient réfléchi à leur choix et les illustrent avec des applications et exemples, ce qui parfois peut manquer dans la présentation.

Pour aller plus loin, d'autres espaces usuels tels que les espaces L^p ont tout à fait leur place dans cette leçon. Les espaces de fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$ constituent aussi une ouverture de très bon niveau ou, dans d'autres directions, l'espace de SOBOLEV $H^1_0(]0, 1[)$, l'espace de SCHWARTZ $\mathscr{S}(\mathbf{R})$, l'espace des fonctions C^∞ à support compact.

202 : Exemples de parties denses et applications.

C'est une leçon également très riche et le candidat doit faire des choix en fonction du niveau auquel il souhaite se placer.

Le théorème de WEIERSTRASS *via* les polynômes de BERNSTEIN peut être abordé à des niveaux divers (le choix du point de vue probabiliste exige d'en maîtriser tous les aspects) suivant que l'on précise ou pas la vitesse de convergence.

Le jury signale également qu'il ne faut pas négliger les exemples élémentaires comme la densité de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$, ou encore les sous-groupes additifs de $\mathbf{R}$ et leurs applications (par exemple la densité des $(\cos(n\theta))_{n\in\mathbf{N}}$).

Les critères de densité dans un espace de HILBERT sont également pertinents. Des exemples matriciels trouvent leur place dans cette leçon comme l'étude de l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathbf{C}$ (et même dans $\mathbf{R}$ pour les candidats voulant aller plus loin.)

Pour aller plus loin, la version plus abstraite du théorème de WEIERSTRASS (le théorème de STONE-WEIERSTRASS) est aussi intéressante et a de multiples applications. Cette leçon permet aussi d'explorer les questions d'approximation de fonctions par des polynômes et des polynômes trigonométriques, ou plus généralement la densité de certains espaces remarquables de fonctions dans les espaces de fonctions continues, ou dans les espaces L^p. Il est également possible de parler de propriétés d'équirépartition.

203 : Utilisation de la notion de compacité.

Il est important de ne pas concentrer la leçon sur la compacité en général et d'éviter la confusion entre *utilisation de la notion compacité* et *notion de compacité*. Le jury recommande vivement de rester en priorité dans le cadre métrique. Néanmoins, on attend des candidats d'avoir une vision synthétique de la compacité. Des exemples d'applications comme le théorème de HEINE et le théorème de ROLLE doivent y figurer et leur démonstration être connue. Par ailleurs, le candidat doit savoir quand la boule unité d'un espace vectoriel normé est compacte. Des exemples significatifs d'utilisation comme le théorème de STONE-WEIERSTRASS (version qui utilise la compacité), des théorèmes de point fixe, voire l'étude qualitative d'équations différentielles, sont tout à fait envisageables. Le rôle de la compacité pour des problèmes d'existence d'extrema mériterait d'être davantage étudié. On peut penser ensuite à des exemples en dimension $n \geqslant 2$.

Pour aller plus loin, les familles normales de fonctions holomorphes fournissent des exemples fondamentaux d'utilisation de la compacité. Les opérateurs auto-adjoints compacts sur un espace de HILBERT relèvent également de cette leçon, et on pourra développer l'analyse de leurs propriétés spectrales.

204 : Connexité. Exemples et applications.

L'objectif de cette leçon est de dégager clairement l'intérêt de la notion de connexité en analyse. Deux aspects sont notamment à mettre en valeur dans cette leçon : le fait que la connexité est préservée par image continue avec les théorèmes du type « valeurs intermédiaires » qui en résultent et le rôle clef de la connexité dans le passage du local au global, par exemple en calcul différentiel, voire pour les fonctions holomorphes. Il est important de présenter des résultats naturels dont la démonstration utilise la connexité. La stabilité par image continue, la structure des ouverts de $\mathbf{R}$, l'identification des connexes de $\mathbf{R}$ sont des résultats incontournables.

La caractérisation des fonctions constantes parmi les fonctions différentiables sur un ouvert connexe trouve tout à fait sa place dans cette leçon. La version « distributions » de ce résultat peut aussi être abordée.

La connexité par arcs permet, lorsqu'elle se produit, de conclure immédiatement sur la connexité. Toutefois, on distinguera bien connexité et connexité par arcs en général (avec des exemples compris par le candidat), mais il est pertinent de présenter des situations où ces deux notions coïncident. La notion de composantes connexes doit également trouver sa place dans cette leçon (pouvant être illustrée par des exemples matriciels). L'illustration géométrique de la connexité sera un point apprécié par le jury.

Des exemples issus d'autres champs (algèbre linéaire notamment) seront valorisés. Pour aller plus loin, le principe des zéros isolés, son lien avec le prolongement analytique, ainsi que des illustrations avec des fonctions spéciales telles que ζ, θ, Γ, ou encore le principe du maximum, fournissent des thèmes très riches pour cette leçon.

Dans une autre direction, on pourra s'intéresser aux solutions d'une équation différentielle non linéaire avec le passage d'un théorème d'existence et d'unicité local à un théorème d'existence et d'unicité de solutions maximales.

Enfin, le choix des développements doit être pertinent, même s'il fait aussi appel à des thèmes différents ; on peut ainsi suggérer le théorème de RUNGE pour les candidats qui le souhaitent. Pour aller plus loin, on peut éventuellement évoquer certaines parties totalement discontinues remarquables telles que l'ensemble triadique CANTOR et ses applications.

205 : Espaces complets. Exemples et applications.

Les candidats devraient faire apparaître que l'un des intérêts essentiels de la complétude est de fournir des théorèmes d'existence : que ce soit tout simplement dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ mais aussi dans certains espaces de dimension infinie (par exemple dans certains espaces de fonctions). Il est important de présenter des exemples d'espaces usuels, dont on sait justifier la complétude. Un candidat à l'agrégation doit manifester une bonne maîtrise de la convergence uniforme. Les espaces L^p sont des exemples pertinents qui ne sont pas sans danger pour des candidats aux connaissances fragiles (les $\ell^p(\mathbf{N})$, peut être plus accessibles, fournissent déjà de beaux exemples). On peut évoquer dans cette leçon des théorèmes classiques tels que le théorème du point fixe des applications contractantes et le théorème de Cauchy-Lipschitz.

On ne s'aventurera pas à parler du théorème de Baire sans applications pertinentes et maîtrisées (elles sont nombreuses). Un développement autour des fonctions continues nulle part dérivables est très souvent proposé, mais extrêmement rares sont les candidats qui arrivent avec succès jusqu'au bout. Le jury attire l'attention sur le fait qu'il existe des preuves constructives de ce résultat qui n'utilisent pas le théorème de Baire.

La construction de l'espace $H_0^1(]0,1[)$ pourra être abordé pour les candidats qui le souhaitent avec des applications illustrant l'intérêt de cet espace.

207 : Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

Cette leçon de synthèse est à nouveau riche et le choix du niveau auquel se place le candidat doit être bien clair.

Il ne faut pas hésiter à commencer par des exemples très simples tels que le prolongement en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ avec des exemples d'utilisations, mais il faut aller plus loin que le simple prolongement par continuité.

Les candidats ne connaissent pas bien les résultats élémentaires autour du prolongement par continuité en un point d'une fonction d'une variable réelle, ou les résultats autour du prolongement C^1 (lorsque la dérivée a une limite par exemple).

Pour aller plus loin, le prolongement analytique relève bien sûr de cette leçon, et des exemples sur des fonctions classiques (ζ, Γ,...) seront appréciés. On peut également parler de l'extension à L^2, voire à l'espace des distributions tempérées, de la transformation de Fourier. Le théorème de Hahn-Banach, dans le cas séparable voire simplement en dimension finie, peut être un exemple de résultat très pertinent. La résolution d'un problème de Dirichlet, correctement formulé, associé à une équation aux dérivées partielles classique, avec donnée au bord, peut être envisagée.

208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Le jury rappelle qu'une telle leçon doit contenir beaucoup d'illustrations et d'exemples, notamment avec quelques calculs élémentaires de normes subordonnées (notion qui met en difficulté un trop grand nombre de candidats). Le lien avec la convergence des suites du type $X_{n+1} = AX_n$ doit être connu (et éventuellement illustré, sans que cela puisse être mis au cœur de la leçon, de considérations d'analyse numérique matricielle). Lors du choix de ces exemples, le candidat veillera à ne pas mentionner des exemples pour lesquels il n'a aucune idée de leur pertinence et à ne pas se lancer dans des développements trop sophistiqués.

La justification de la compacité de la boule unité en dimension finie doit être maîtrisée. Il faut savoir énoncer le théorème de Riesz sur la compacité de la boule unité fermée d'un espace vectoriel normé. Le théorème d'équivalence des normes en dimension finie, ou le caractère fermé de tout sous-espace de dimension finie d'un espace normé, sont des résultats fondamentaux à propos desquels les candidats doivent se garder des cercles vicieux. Des exemples d'espaces vectoriels normés de dimension infinie ont leur place dans cette leçon et il faut connaître quelques exemples de normes usuelles non équivalentes, notamment sur des espaces de suites ou des espaces de fonctions et également d'applications linéaires qui ne sont pas continues. On peut aussi illustrer le théorème de Riesz sur des exemples simples dans le cas des espaces classiques de dimension infinie.

Les espaces de Hilbert ont également leur place dans cette leçon, mais le jury met en garde contre l'écueil de trop s'éloigner du cœur du sujet.

209 : Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.

Cette leçon comporte un certain nombre de classiques comme par exemple les polynômes de Bernstein, éventuellement agrémentés d'une estimation de la vitesse de convergence (avec le module de continuité). Il n'est pas absurde de voir la formule de Taylor comme une approximation locale d'une fonction par des polynômes mais on veillera à ne pas trop s'attarder sur ce point. Les polynômes d'interpolation de Lagrange peuvent être mentionnés en mettant en évidence les problèmes qu'ils engendrent du point de vue de l'approximation. La résolution de l'équation de la chaleur et/ou des ondes peut trouver sa place dans cette leçon.

Le théorème de Fejér (versions L^1, L^p ou $C(\mathbf{T})$) offre aussi la possibilité d'un joli développement, surtout s'il est agrémenté d'applications (polynômes trigonométriques lacunaires, injectivité de la transformée de Fourier sur L^1,...). La convolution avec d'autres noyaux (Dirichlet, Jackson) est aussi une source de résultats intéressants.

213 : Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

Il faut absolument illustrer la leçon par des exemples de bases hilbertiennes (polynômes orthogonaux, séries de Fourier,...). Il est bon de connaître et savoir justifier le critère de densité des sous-espaces par passage à l'orthogonal.

Il est important de faire la différence entre base algébrique et base hilbertienne, notions qui mettent en difficulé nombre de candidats. Toutefois cette année, le jury se réjouit d'avoir pu constater de réels efforts sur ce point. La formule de la projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie d'un espace de Hilbert doit absolument être connue de même que l'interprétation géométrique de la méthode de Gram-Schmidt. Le théorème de projection sur les convexes fermés (ou sur un sous-espace vectoriel fermé) d'un espace de Hilbert H est régulièrement mentionné. Les candidats doivent s'intéresser au sens des formules

$$x = \sum_{n \geqslant 0} (x|e_n)e_n \quad \text{et} \quad ||x||^2 = \sum_{n \geqslant 0} |(x|e_n)|^2$$

en précisant les hypothèses sur la famille $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et en justifiant la convergence. La notion d'adjoint d'un opérateur continu peut illustrer cette leçon. Le théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints compacts peut alors être abordé.

Pour aller plus loin, le programme permet d'aborder la résolution et l'approximation de problèmes aux limites en dimension 1 par des arguments exploitant la formulation variationnelle de ces équations. La construction de l'espace $H_0^1(]0,1[)$ pourra donc éventuellement être abordée, ainsi que le théorème de Lax-Milgram avec des applications pertinentes. Plus généralement, l'optimisation de fonctionnelles convexes sur les espaces de Hilbert peut être explorée.

214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

Il s'agit d'une leçon qui exige une bonne maîtrise du calcul différentiel. Même si le candidat ne propose pas ces thèmes en développement, on est en droit d'attendre de lui des idées de démonstration des deux théorèmes fondamentaux qui donnent son intitulé à la leçon. Il est indispensable de savoir mettre en pratique le théorème des fonctions implicites au moins dans le cas de deux variables réelles. On attend des applications en géométrie différentielle notamment dans la formalisation de la méthode des multiplicateurs de Lagrange. En ce qui concerne la preuve du théorème des extrema liés, la présentation de la preuve par raisonnement « sous-matriciel » est souvent obscure ; on privilégiera si possible une présentation géométrique s'appuyant sur l'espace tangent. Plusieurs inégalités classiques de l'analyse peuvent se démontrer avec ce point de vue : arithmético-géométrique, Hölder, Carleman, Hadamard,...

Pour aller plus loin, l'introduction des sous-variétés est naturelle dans cette leçon. Il s'agit aussi d'agrémenter cette leçon d'exemples et d'applications en géométrie, sur les courbes et les surfaces.

215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

Cette leçon requiert une bonne maîtrise de la notion de différentielle première et de son lien avec les dérivées partielles, mais aussi de ce qui les distingue. Le jury note que chez beaucoup de candidats cela pose problème, il invite donc les candidats à consolider ces notions. On doit pouvoir savoir trouver la différentielle d'applications classiques, comme, par exemple $M \in GL_n(\mathbf{R}) \to M^{-1}$, $M \to M^2$ ou encore $M \to \det(M)$ en revenant à la définition. Il est important de bien comprendre le développement sous-jacent de $f(x+h)$, et, pour ceux qui utilisent cette notation, de bien maîtriser la notion de o. On doit pouvoir mettre en pratique le théorème de différentiation composée pour calculer des dérivées partielles de fonctions composées dans des situations simples (par exemple le laplacien en coordonnées polaires). La différentiation à l'ordre 2 est attendue, avec son lien avec la hessienne, notamment pour les applications classiques quant à l'existence d'extrema locaux. On peut aussi faire figurer dans cette leçon la différentielle d'applications issues de l'algèbre linéaire (ou multilinéaire). La méthode du gradient pour la minimisation de la fonctionnelle $\frac{1}{2}(Ax|x) - (b|x)$, où A est une matrice symétrique définie positive, conduit à des calculs de différentielles qui doivent être acquis par tout candidat.

Pour aller plus loin, l'exponentielle matricielle est une ouverture pertinente. D'autres thèmes issus de la leçon 214 trouvent aussi leur place ici.

218 : Applications des formules de TAYLOR.

Il faut connaître les formules de TAYLOR et certains développements très classiques et surtout être capable de faire la différence entre les formules (celle locale et celle globale) et de maîtriser leurs champs d'application. Illustrer cette leçon avec des exemples sur des études de suites, par exemple, peut tout à fait trouver sa place. En général, le développement de TAYLOR d'une fonction comprend un terme de reste qu'il est crucial de savoir analyser. Le candidat doit pouvoir justifier les différentes formules de TAYLOR proposées ainsi que leur intérêt. Le jury s'inquiète des trop nombreux candidats qui ne savent pas expliquer clairement ce que signifient les notations o ou O qu'ils utilisent. De plus la différence entre l'existence d'un développement limité à l'ordre deux et l'existence de dérivée seconde doit être connue. On peut aussi montrer comment les formules de TAYLOR permettent d'établir le caractère développable en série entière (ou analytique) d'une fonction dont on contrôle les dérivées successives.

Pour aller plus loin, on peut mentionner des applications en algèbre bilinéaire (lemme de MORSE), en géométrie (étude locale au voisinage des points stationnaires pour les courbes et des points critiques pour la recherche d'extrema) et, même si c'est plus anecdotique, en probabilités (théorème central limite). On peut aussi penser à la méthode de LAPLACE, du col, de la phase stationnaire ou aux inégalités contrôlant les dérivées intermédiaires lorsque f et sa dérivée n-ième sont bornées, ou encore à l'analyse de méthodes d'intégration numérique ou l'étude de consistance de l'approximation de $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ par différences finies.

Il est aussi possible de mettre en évidence le rôle des formules de TAYLOR pour des raisonnements sur les distributions, par exemple pour résoudre des équations du type $xT = 0$, établir le lien entre taux d'accroissement et dérivée faible, ou, plus ambitieux, étudier la structure des distributions à support dans un singleton.

Cette leçon 218 ne sera pas reconduite durant la session 2019. Bien entendu, les formules de TAYLOR restent un élément important du programme, qui pourront et devront être évoquées dans d'autres leçons, comme cela apparaît clairement dans les commentaires.

219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Comme souvent en analyse, il est tout à fait opportun d'illustrer dans cette leçon un exemple ou un raisonnement à l'aide d'un dessin. Il faut savoir faire la distinction entre propriétés locales (caractérisation d'un extremum local) et globales (existence par compacité, par exemple). Dans le cas important des fonctions convexes, un minimum local est également global. Les applications de la minimisation des fonctions convexes sont nombreuses et elles peuvent illustrer cette leçon.

L'étude des algorithmes de recherche d'extremums y a toute sa place : méthode du gradient et analyse de sa convergence, méthode à pas optimal,... Le cas particulier des fonctionnelles sur $\mathbf{R}^n$ de la forme $\frac{1}{2}(Ax|x) - (b|x)$, où A est une matrice symétrique définie positive, ne devrait pas poser de difficultés (la coercivité de la fonctionnelle pose problème à de nombreux candidats). Les problèmes de minimisation sous contrainte amènent à faire le lien avec les extrema liés et la notion de multiplicateur de LAGRANGE. Sur ce point, certains candidats ne font malheureusement pas la différence entre recherche d'extremums sur un ouvert ou sur un fermé. Une preuve géométrique des extrema liés sera fortement valorisée par rapport à une preuve algébrique, formelle et souvent mal maîtrisée. On peut ensuite mettre en œuvre ce théorème en justifiant une inégalité classique : arithmético-géométrique, HÖLDER, CARLEMAN, etc... Enfin, la question de la résolution de l'équation d'EULER-LAGRANGE peut donner l'opportunité de mentionner la méthode de NEWTON.

Les candidats pourraient aussi être amenés à évoquer les problèmes de type moindres carrés, ou, dans un autre registre, le principe du maximum et des applications.

220 : Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études des solutions en dimension 1 et 2.

Une nouvelle fois, le jury s'alarme des nombreux défauts de maîtrise du théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ et, plus généralement, de l'extrême faiblesse des connaissances sur les équations différentielles. Il est regrettable de voir des candidats ne connaître qu'un énoncé pour les fonctions globalement lipschitziennes ou, plus grave, mélanger les conditions sur la variable de temps et d'état. Les notions de solution maximale et de solution globale sont souvent confuses. Le théorème de sortie de tout compact est attendu. Bien évidemment, le jury attend des exemples d'équations différentielles non linéaires. Le lemme de GRÖNWALL semble trouver toute sa place dans cette leçon mais est trop rarement énoncé. L'utilisation du théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ doit pouvoir être mise en œuvre sur des exemples concrets. Les études qualitatives doivent être préparées et soignées.

Pour les équations autonomes, la notion de point d'équilibre permet des illustrations pertinentes comme par exemple les petites oscillations du pendule. Trop peu de candidats pensent à tracer et discuter des portraits de phase alors que l'intitulé de la leçon y invite clairement.

Il est possible d'évoquer les problématiques de l'approximation numérique dans cette leçon en présentant le point de vue du schéma d'EULER. On peut aller jusqu'à aborder la notion de problèmes raides et la conception de schémas implicites pour autant que le candidat ait une maîtrise convenable de ces questions.

221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Le jury attend d'un candidat qu'il sache déterminer rigoureusement la dimension de l'espace vectoriel des solutions. Le cas des systèmes à cœfficients constants fait appel à la réduction des matrices qui doit être connue et pratiquée. Le jury attend qu'un candidat puisse mettre en œuvre la méthode de variation des constantes pour résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 simple (à coefficients constants par exemple) avec second membre ; un trop grand nombre de candidats se trouve déstabilisés par ces questions.

L'utilisation des exponentielles de matrices a toute sa place ici et doit être maitrisée. Les problématiques de stabilité des solutions et le lien avec l'analyse spectrale devraient être exploitées.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire constitue un exemple de développement pertinent pour cette leçon. Les résultats autour du comportement des solutions, ou de leurs zéros, de certaines équations linéaires d'ordre 2 (Sturm, Hill-Mathieu,...) sont aussi d'autres possibilités.

Pour aller plus loin, la résolution au sens des distributions d'équations du type $T' = 0$, ou des situations plus ambitieuses, trouvera sa place dans cette leçon.

222 : Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.

Cette leçon peut être abordée en faisant appel à des techniques variées et de nombreux développements pertinents peuvent être construits en exploitant judicieusement les éléments les plus classiques du programme. Le candidat ne doit pas hésiter à donner des exemples très simples (par exemple les équations de transport).

Les techniques d'équations différentielles s'expriment par exemple pour traiter $\lambda u - u'' = f$ avec des conditions de Dirichlet en $x = 0$, $x = 1$ ou pour analyser l'équation de transport par la méthode des caractéristiques.

Les séries de Fourier trouvent dans cette leçon une mise en pratique toute désignée pour résoudre l'équation de la chaleur dans différents contextes, l'équation des ondes ou de Schrödinger dans le cadre des fonctions périodiques. Des raisonnements exploitant la transformée de Fourier peuvent également être présentés.

Le point de vue de l'approximation numérique donne lieu à des développements originaux, notamment autour de la matrice du Laplacien et de l'analyse de convergence de la méthode des différences finies.

Des développements plus sophistiqués se placeront sur le terrain de l'analyse hilbertienne avec le théorème de Lax-Milgram, l'espace de Sobolev $H_0^1(]0, 1[)$, jusqu'à la décomposition spectrale des opérateurs compacts.

Pour aller plus loin, la notion de solution faible d'équations aux dérivées partielles linéaires pourra également être présentée, avec des applications à la résolution des équations de Laplace, de la chaleur ou des ondes. La régularité des solutions de l'équation $\Delta u = f$ au sens des distributions ou la résolution de l'équation de transport au sens des distributions pourront aussi être abordées.

223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications

Cette leçon permet souvent aux candidats de s'exprimer. Il ne faut pas négliger les suites de nombres complexes mais les suites vectorielles (dans $\mathbf{R}^n$) ne sont pas dans le sujet. Le jury attire l'attention sur le fait que cette leçon n'est pas uniquement à consacrer à des suites convergentes, mais tout comportement asymptotique peut être présenté. Le théorème de Bolzano-Weierstrass doit être cité et le candidat doit être capable d'en donner une démonstration. On attend des candidats qu'ils parlent des limites inférieure et supérieure d'une suite réelle bornée, et qu'ils en maîtrisent le concept. Les procédés de sommation peuvent être éventuellement évoqués mais le théorème de Cesàro doit être mentionné et sa preuve maîtrisée par tout candidat à l'agrégation. Les résultats autour des sous-groupes additifs de $\mathbf{R}$ permettent d'exhiber des suites denses remarquables et l'ensemble constitue un joli thème. Des thèmes des leçons 225 et 226 peuvent également se retrouver dans cette leçon.

Pour aller plus loin, un développement autour de l'équirépartition est tout à fait envisageable. La méthode de Newton peut aussi illustrer la notion de vitesse de convergence.

224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

Cette leçon doit permettre aux candidats d'exprimer leur savoir-faire sur les techniques d'analyse élémentaire que ce soit sur les suites, les séries ou les intégrales. On peut par exemple établir un développement asymptotique à quelques termes des sommes partielles de la série harmonique, ou bien la formule de Stirling que ce soit dans sa version factorielle ou pour la fonction Γ. On peut également s'intéresser aux comportements autour des singularités de fonctions spéciales célèbres. Du côté de l'intégration, on peut évaluer la vitesse de divergence de l'intégrale de la valeur absolue du sinus cardinal, avec des applications pour les séries de FOURIER, voire présenter la méthode de LAPLACE.

Par ailleurs, le thème de la leçon permet l'étude de suites récurrentes (autres que le poncif $u_{n+1} = \sin(u_n)$), plus généralement de suites ou de fonctions définies implicitement, ou encore des études asymptotiques de solutions d'équations différentielles (sans résolution explicite).

On peut aller plus loin en abordant des techniques de phase stationnaire et en en discutant des applications.

226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

Citer au moins un théorème de point fixe est évidemment pertinent et savoir le mettre en oeuvre sur un exemple simple est indispensable. Le jury est toutefois surpris que des candidats évoquent un théorème de point fixe dans les espaces de BANACH... sans être capables de définir ce qu'est un espace de BANACH ou d'en donner un exemple ! On peut déjà commencer par énoncer un théorème de point fixe sur $\mathbf{R}$. Le jury attend d'autres exemples que la sempiternelle suite récurrente $u_{n+1} = \sin(u_n)$ (dont il est souhaitable de savoir expliquer les techniques sous-jacentes et le jury ne se privera pas de vérifier ce point sur un exercice). La notion de points attractifs ou répulsifs peut illustrer cette leçon.

L'étude des suites linéaires récurrentes d'ordre p est souvent mal connue, notamment le lien avec l'aspect vectoriel, d'ailleurs ce dernier point est trop souvent négligé. Le comportement des suites vectorielles définies par une relation linéaire $X_{n+1} = AX_n$ fournit pourtant un matériel d'étude conséquent.

La formulation de cette leçon invite résolument à évoquer les problématiques de convergence d'algorithmes (notamment savoir estimer la vitesse) d'approximation de solutions de problèmes linéaires et non linéaires : dichotomie, méthode de NEWTON (avec sa généralisation au moins dans $\mathbf{R}^2$), algorithme du gradient, méthode de la puissance, méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires, schéma d'EULER,...

228 : Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Cette leçon permet des exposés de niveaux très variés. Les théorèmes de base doivent être maîtrisés et illustrés par des exemples intéressants, par exemple le théorème des valeurs intermédiaires pour la dérivée. Le jury s'attend évidemment à ce que le candidat connaisse et puisse calculer la dérivée des fonctions usuelles. Les candidats doivent disposer d'un exemple de fonction dérivable de la variable réelle qui ne soit pas continûment dérivable. La stabilité par passage à la limite des notions de continuité et de dérivabilité doit être comprise par les candidats. De façon plus fine, on peut s'intéresser à des exemples de fonctions continues nulle part dérivables.

Les propriétés de régularité des fonctions convexes peuvent être mentionnées. Pour aller plus loin, la dérivabilité presque partout des fonctions lipschitziennes ou des fonctions monotones relève de cette leçon. L'étude des liens entre dérivée classique et dérivée au sens des distributions de fonctions telles que la fonction de HEAVISIDE, de la valeur absolue ou de la fonction $x \mapsto \int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y$, f étant intégrable, peuvent trouver leur place dans cette leçon. On peut aussi relier la dérivée faible et la limite du taux d'accroissement au sens des distributions et établir le lien entre fonction croissante et dérivée faible positive.

229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

L'énoncé et la connaissance de la preuve de l'existence de limites à gauche et à droite pour les fonctions monotones sont attendues. Ainsi on doit parler des propriétés de continuité et de dérivabilité à gauche et à droite des fonctions convexes de la variable réelle. Il est souhaitable d'illustrer la présentation de la convexité par des dessins clairs. On notera que la monotonie concerne les fonctions réelles d'une seule variable réelle, mais que la convexité concerne également les fonctions définies sur une partie convexe de $\mathbf{R}^n$, qui fournissent de beaux exemples d'utilisation. L'étude de la fonctionnelle quadratique ou la minimisation de $||Ax - b||^2$ pourront illustrer agréablement cette leçon.

Pour aller plus loin, la dérivabilité presque partout des fonctions monotones est un résultat remarquable (dont la preuve peut être éventuellement admise). L'espace vectoriel engendré par les fonctions monotones (les fonctions à variation bornée) relève de cette leçon. Enfin, la dérivation au sens des distributions fournit les caractérisations les plus générales de la monotonie et de la convexité ; les candidats maîtrisant ces notions peuvent s'aventurer utilement dans cette direction.

230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

De nombreux candidats commencent leur plan par une longue exposition des conditions classiques assurant la convergence ou la divergence des séries numériques. Sans être hors sujet, cette exposition ne doit pas former l'essentiel de la matière de la leçon. Un thème important de la leçon est en effet le comportement asymptotique des restes et sommes partielles (équivalents, développements asymptotiques — par exemple pour certaines suites récurrentes — cas des séries de Riemann, comparaison séries et intégrales,...). Le manque d'exemples est à déplorer.

On peut aussi s'intéresser à certaines sommes particulières, que ce soit pour exhiber des nombres irrationnels (voire transcendants), ou mettre en valeur des techniques de calculs non triviales (par exemple en faisant appel aux séries de Fourier ou aux séries entières).

Enfin, si le jury apprécie que le théorème des séries alternées (avec sa version sur le contrôle du reste) soit maîtrisé, il rappelle aussi que ses généralisations possibles utilisant la transformation d'Abel trouvent toute leur place dans cette leçon.

233 : Méthodes itératives en analyse numérique matricielle.

Pour la session 2019, l'intitulé de cette leçon sera reformulé en

Analyse numérique matricielle : résolution approchée de systèmes linéaires, recherche de vecteurs propres, exemples.

Le jury reprend une formulation antérieure de l'intitulé car la leçon se focalisait trop exclusivement sur la résolution de systèmes linéaires par des méthodes itératives. Le jury souhaite un sujet plus ouvert et des propositions qui ne négligent plus la recherche de vecteurs propres et, de manière générale, l'exploitation de techniques d'analyse pour aborder la résolution approchée de systèmes linéaires et de leurs propriétés spectrales et approfondir la compréhension des algorithmes.

Dans cette leçon de synthèse, les notions de norme matricielle et de rayon spectral sont centrales, en lien avec le conditionnement et avec la convergence des méthodes itératives ; elles doivent être développées et maîtrisées. Le conditionnement d'une matrice symétrique définie positive doit être connu et un lien avec $\sup_{||x||=1} x^{\intercal}Ax$ doit être fait. Le résultat général de convergence, relié au théorème du point fixe de Banach, doit être enrichi de considérations sur la vitesse de convergence.

Le jury invite les candidats à étudier diverses méthodes issues de contextes variés : résolution de systèmes linéaires, optimisation de fonctionnelles quadratiques (du type $\frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$), recherche de valeurs propres,... Parmi les points intéressants à développer, on peut citer les méthodes de type Jacobi pour la résolution de systèmes linéaires, les méthodes de gradient dans le cadre quadratique, les méthodes de puissance et QR pour la recherche de valeurs propres. Les candidats pourront illustrer leur propos sur des matrices issues de schémas numériques pour les équations différentielles ou aux dérivées partielles linéaires.

234 : Espaces L^p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

Pour la session 2019, l'intitulé de cette leçon devient

Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

Cette leçon, héritée de la leçon *Espaces L^p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$*, est reformulée dans l'objectif de clarifier et de simplifier les attendus du jury. Elle concerne les fonctions intégrables au sens de la théorie de l'intégration de Lebesgue, les suites et les espaces de telles fonctions, mais elle n'est pas forcément restreinte au seul cas des fonctions intégrables pour la mesure de Lebesgue (dont on rappelle que la construction est admise dans le cadre du concours). On pourra donc envisager diverses mesures : la mesure de comptage, des mesures, finies ou non, absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue... En particulier, les espaces associés à une mesure de probabilité rentrent tout à fait dans le cadre de la leçon.

Le champ de la leçon est donc extrêmement large et amène à faire des choix : il y a bien des manières pertinentes de la présenter et de lui donner un contenu riche et cohérent, sans chercher à être exhaustif.

On pourra discuter, au travers d'exemples bien choisis, les distinctions entre fonctions Riemann-intégrables et Lebesgue-intégrables, entre fonctions admettant une intégrale généralisée et fonctions Lebesgue-intégrables.

Cette leçon nécessite d'avoir compris les notions de fonctions mesurables et de presque partout (comme par exemple les opérations sur les ensembles négligeables) et évidemment la définition des espaces L^1, L^2. Toutefois, la maîtrise des questions fines autour de la théorie de la mesure n'est pas exigée.

La leçon invite à étudier le comportement de suites de fonctions Lebesgue-intégrables. Ainsi, on pourra notamment mettre en évidence le rôle des fonctions étagées, avec les résultats d'approximation de fonctions mesurables par des fonctions étagées et la définition de l'intégrale qui en résulte. Les grands théorèmes de la théorie de l'intégration de Lebesgue (Fatou, Beppo-Lévi, Lebesgue) ont évidemment toute leur place dans cette leçon et le jury appréciera qu'ils soient illustrés par des exemples bien choisis.

S'ils occupent une place moins centrale dans ce nouvel intitulé, les espaces L^p méritent d'être discutés (au prix d'un léger abus de langage puisque les fonctions de L^p ne sont pas toujours intégrables). Évoquer la convolution entre fonctions L^1, et éventuellement entre fonctions de L^1 et de L^p, les propriétés de régularisation et de densité qui en résultent, font partie des attendus (on prendra garde toutefois d'éviter les raisonnements circulaires entre continuité des translations et approximation par convolution). Un développement original, mais techniquement exigeant, peut consister à étudier les conditions assurant la compacité de suites bornées dans L^p. Enfin, le cas particulier hilbertien $p = 2$ mérite attention mais il faut alors se concentrer sur les spécificités d'un espace de fonctions L^2 et éviter de faire un catalogue de propriétés vraies pour n'importe quel espace de Hilbert.

235 : Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

Cette leçon s'intéresse aux problèmes d'interversion limite-limite, limite-intégrale et intégrale-intégrale. Il ne s'agit pas de refaire un cours d'intégration. On pourra toutefois mettre en évidence le rôle important joué par des théorèmes cruciaux de ce cours. À un niveau élémentaire, on peut insister sur le rôle de la convergence uniforme, ou de la convergence normale (dans le cas de séries de fonctions).

Les théorèmes de convergence dominée, de convergence monotone et le théorème de Fubini (et Fubini-Tonelli) sont des attendus de cette leçon. On choisira des exemples pertinents pour illustrer l'intérêt de chacun de ces réultats, mais on pourra aussi exhiber des contre-exemples montrant que des hypothèses trop faibles ne permettent pas en général d'effectuer l'interversion tant désirée. Le jury note que ces différents points posent problèmes à de nombreux candidats, qui sont mis en difficulté sur des exemples assez simples. Ils sont donc invités à consolider ces notions avant de s'aventurer plus loin.

Pour les candidats qui le souhaitent, on pourra parler de la transformée de Fourier et/ou de la transformée de Laplace avec des exemples et des applications.

236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Cette leçon doit être très riche en exemples, que ce soit l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ ou bien d'autres encore. Il est tout à fait pertinent de commencer par les différentes techniques élémentaires (intégration par parties, changement de variables, décomposition en éléments simples, intégrale à paramètres,...). On peut également présenter des utilisations du théorème des résidus, ainsi que des exemples faisant intervenir les intégrales multiples comme le calcul de l'intégrale d'une gaussienne. Le calcul du volume de la boule unité de $\mathbf{R}^n$ ne doit pas poser de problèmes insurmontables. Le calcul de la transformation de FOURIER d'une gaussienne a sa place dans cette leçon.

On peut aussi penser à l'utilisation du théorème d'inversion de FOURIER ou du théorème de PLANCHEREL. Certains éléments de la leçon précédente, comme par exemple l'utilisation des théorèmes de convergence monotone, de convergence dominée et/ou de FUBINI, sont aussi des outils permettant le calcul de certaines intégrales.

Enfin, il est tout à fait pertinent d'évoquer les méthodes de calcul approché d'intégrales (méthodes des rectangles, méthode de Monte-Carlo, *etc.*).

239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Les candidats incluent les théorèmes de régularité (version segment — a minima — mais aussi version « convergence dominée ») ce qui est pertinent mais la leçon ne doit pas se réduire seulement à cela. Cette leçon doit être riche en exemples, ce qui parfois n'est pas suffisamment le cas, et peut être encore enrichie par des études et méthodes de comportements asymptotiques. Les propriétés de la fonction Γ d'EULER fournissent un développement standard, mais non sans risque (on pourra y inclure le comportement asymptotique, voire son prolongement analytique) ; certains candidats sont trop ambitieux pour le temps dont ils disposent. Le jury invite donc à bien préciser ce que le candidat souhaite montrer pendant son développement. Les différentes transformations classiques (FOURIER, LAPLACE,...) relèvent aussi naturellement de cette leçon. On peut en donner des applications pour obtenir la valeur d'intégrales classiques (celle de l'intégrale de DIRICHLET par exemple). Le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale est trop peu souvent cité.

Pour aller encore plus loin, on peut par exemple développer les propriétés des transformations mentionnées (notamment la transformée de FOURIER, par exemple en s'attardant sur le lien entre régularité de la fonction et décroissance de sa transformée de FOURIER), ainsi que de la convolution.

241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Les résultats généraux sur les différents types de convergence doivent être présentés et maîtrisés. Dans un deuxième temps, le jury attend du candidat qu'il évoque les séries de fonctions particulières classiques : séries entières, séries de FOURIER avec des exemples et des applications. On pourra également s'intéresser à la fonction zêta de RIEMANN, ou plus généralement aux séries de DIRICHLET.

Par ailleurs, la leçon n'exclut pas du tout de s'intéresser au comportement des suites et séries de fonctions dans les espaces de type L^p (notamment pour $p = 1$), ou encore aux séries de variables aléatoires indépendantes.

Pour aller plus loin, on pourra présenter comment identifier la limite au sens des distributions d'une famille qui régularise la masse de DIRAC ou encore aborder des exemples de construction de parties finies de HADAMARD.

243 : Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Les candidats évoquent souvent des critères (CAUCHY, D'ALEMBERT) permettant d'estimer le rayon de convergence mais oublient souvent la formule de CAUCHY-HADAMARD ou toute technique utilisant une majoration ou un équivalent. Le jury attend bien sûr que le candidat puisse donner des arguments justifiant qu'une série entière en 0 dont le rayon de convergence est R est développable en série entière en un point z_0 intérieur au disque de convergence et de minorer le rayon de convergence de cette série. Sans tomber dans un catalogue excessif, on peut indiquer les formules de développement de fonctions usuelles importantes (exp, log, $1/(1-z)$, sin,...). S'agissant d'exemples fondamentaux et classiques, le jury attend que le candidat puisse les donner sans consulter ses notes. En ce qui concerne la fonction exponentielle, le candidat doit avoir réfléchi au point de vue adopté sur sa définition et donc sur l'articulation entre l'obtention du développement en série entière et les propriétés de la fonction. À ce propos, les résultats sur l'existence du développement en série entière pour les fonctions dont on contrôle toutes les dérivées successives sur un voisinage de 0 sont souvent méconnus. Le comportement de la série entière dans le disque de convergence vis à vis des différents modes de convergence (convergence absolue, convergence uniforme, convergence normale) doit être maîtrisé.

Le théorème d'Abel (radial ou sectoriel) trouve toute sa place mais doit être agrémenté d'exercices pertinents. Réciproquement, les théorèmes taubériens offrent aussi de jolis développements. On pourra aller plus loin en abordant quelques propriétés importantes liées à l'analyticité de la somme d'une série entière ou encore la résolution de certaines équations différentielles ordinaires par la méthode du développement en série entière.

245 : Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$. Exemples et applications.

Les résultats autour de l'analyticité, ou encore le principe du maximum, le principe des zéros isolés, sont bien sûr cruciaux. Le lemme de Schwarz est un joli résultat permettant de faire un développement élémentaire s'il est agrémenté d'applications pertinentes, comme par exemple déterminer les automorphismes du disque unité. La notation $\int_\gamma f(z)dz$ a un sens précis, qu'il faut savoir expliquer. Même si cela ne constitue pas le cœur de la leçon, la définition d'une fonction méromorphe (l'ensemble des pôles doit être une partie fermée discrète) doit être connue des candidats et des exemples seront appréciés.

La leçon invite également à présenter le théorème d'holomorphie sous le signe intégral et des exemples de fonctions célèbres (par exemple la fonction Gamma, la fonction zêta, ...).

Pour les candidats qui le souhaitent, cette leçon offre beaucoup de possibilités, notamment en lien avec la topologie du plan. La preuve du théorème de l'application conforme de Riemann est par exemple un développement de très bon niveau mais qui nécessite une bonne maîtrise.

246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.

Les différents résultats autour de la convergence (L^2, Fejér, Dirichlet, ...) doivent être connus. On prendra garde au sens de la notation $\sum_{n\in\mathbf{Z}}$ (qu'il est plus prudent d'éviter car elle est souvent inadaptée). Il faut avoir les idées claires sur la notion de fonctions de classe C^1 par morceaux (elles ne sont pas forcément continues). Le théorème d'isométrie bijective entre espaces L^2 et ℓ^2 doit apparaitre. Dans le cas d'une fonction continue et C^1 par morceaux on peut conclure sur la convergence normale de la série Fourier sans utiliser le théorème de Dirichlet. Il est classique d'obtenir des sommes de séries remarquables comme conséquence de ces théorèmes.

On peut aussi s'intéresser à la formule de Poisson et à ses conséquences. L'existence d'exemples de séries de Fourier divergentes, associées à des fonctions continues (qu'ils soient explicites ou obtenus par des techniques d'analyse fonctionnelle) peuvent aussi compléter le contenu.

Il est souhaitable que cette leçon ne se réduise pas à un cours abstrait sur les cœfficients de Fourier. La résolution d'équations aux dérivées partielles (par exemple l'équation de la chaleur ou l'équation des ondes avec une estimation de la vitesse de convergence) peut illustrer de manière pertinente cette leçon, mais on peut penser à bien d'autres applications (inégalité isopérimétrique, comportements remarquables des fonctions à spectre lacunaire,...).

250 : Transformation de Fourier. Applications.

Cette leçon offre de multiples facettes. Les candidats peuvent adopter différents points de vue : L^1, L^2 et/ou distributions. L'aspect « séries de Fourier » n'est toutefois pas dans l'esprit de cette leçon ; il ne s'agit pas de faire de l'analyse de Fourier sur n'importe quel groupe localement compact mais sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}^d$.

La leçon nécessite une bonne maîtrise de questions de base telle que la définition du produit de convolution de deux fonctions de L^1. En ce qui concerne la transformation de Fourier, elle ne doit pas se limiter à une analyse algébrique de la transformation de Fourier. C'est bien une leçon d'analyse, qui nécessite une étude soigneuse des hypothèses, des définitions et de la nature des objets manipulés. Le lien entre la régularité de la fonction et la décroissance de sa transformée de Fourier doit être fait, même sous des hypothèses qui ne sont pas minimales. Les candidats doivent savoir montrer le lemme de Riemann-Lebesgue pour une fonction intégrable.

La formule d'inversion de Fourier pour une fonction L^1 dont la transformée de Fourier est aussi L^1 est attendue ainsi que l'extension de la transformée de Fourier à l'espace L^2 par Fourier-Plancherel. Des exemples explicites de calcul de transformations de Fourier, classiques comme la gaussienne ou $(1+x^2)^{-1}$, paraissent nécessaires.

Pour aller plus loin, la transformation de Fourier des distributions tempérées ainsi que la convolution dans le cadre des distributions tempérées peuvent être abordées. Rappelons une fois de plus que les attentes du jury sur ces questions restent modestes, au niveau de ce qu'un cours de première année de master sur le sujet peut contenir. Le fait que la transformée de Fourier envoie $\mathscr{S}(\mathbf{R}^d)$ dans lui même avec de bonnes estimations des semi-normes doit alors être compris et la formule d'inversion de Fourier maîtrisée dans ce cadre. Des exemples de calcul de transformée de Fourier peuvent être donnés dans des contextes liés à la théorie des distributions comme par exemple la transformée de Fourier de la valeur principale. Dans un autre registre, il est aussi possible d'orienter la leçon vers l'étude de propriétés de fonctions caractéristiques de variables aléatoires.

La résolution de certaines équations aux dérivées partielles telles que, par exemple, l'équation de la chaleur sur $\mathbf{R}$, peut être abordée, avec une discussion sur les propriétés qualitatives des solutions.

253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Il s'agit d'une leçon de synthèse, très riche, qui mérite une préparation soigneuse. Même si localement (notamment lors de la phase de présentation orale) des rappels sur la convexité peuvent être énoncés, ceci n'est pas nécessairement attendu dans le plan. Il s'agit d'aborder différents champs des mathématiques où la convexité intervient. On pensera bien sûr, sans que ce soit exhaustif, aux problèmes d'optimisation (par exemple de la fonctionnelle quadratique), au théorème de projection sur un convexe fermé, au rôle joué par la convexité dans les espaces vectoriels normés (convexité de la norme, jauge d'un convexe,...). Les fonctions convexes élémentaires permettent aussi d'obtenir des inégalités célèbres. On retrouve aussi ce type d'argument pour justifier des inégalités de type Brunn-Minkowski ou Hadamard. Par ailleurs, l'inégalité de Jensen a aussi des applications en intégration et en probabilités.

Pour aller plus loin, on peut mettre en évidence le rôle joué par la convexité dans le théorème de séparation de Hahn-Banach. On peut aussi parler des propriétés d'uniforme convexité dans certains espaces, les espaces L^p pour $p > 1$, par exemple, et de leurs conséquences.

260 : Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

Le jury attend des candidats qu'ils donnent la définition des moments centrés, qu'ils rappellent les implications d'existence de moments (décroissance des L^p). Les variables aléatoires à densité sont trop souvent négligées. Le candidat peut citer — mais doit surtout savoir retrouver rapidement — les espérances et variances de lois usuelles, notamment Bernoulli, binomiale, géométrique, Poisson, exponentielle, normale. La variance de la somme de variables aléatoires indépendantes suscite souvent des hésitations. Les inégalités classiques (de MARKOV, de BIENAYMÉ-CHEBYSHEV, de JENSEN et de CAUCHY-SCHWARZ) pourront être données, ainsi que les théorèmes de convergence (lois des grands nombres et théorème central limite). La notion de fonction génératrice des moments pourra être présentée ainsi que les liens entre moments et fonction caractéristique.

Pour aller plus loin, le comportement des moyennes empiriques pour une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées n'admettant pas d'espérance pourra être étudié. Pour les candidats suffisamment à l'aise avec ce sujet, l'espérance conditionnelle pourra aussi être abordée.

261 : Fonction caractéristique d'une variable aléatoire. Exemples et applications.

Pour la session 2019, cette leçon est reformulée en

Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.

Cette évolution est motivée d'une part par la suspension pour 2019 de la leçon 263 sur les variables aléatoires à densité et d'autre part afin d'élargir le champ de cette leçon, les candidats ayant tendance à restreindre leur étude à la définition de la fonction caractéristique et à des exemples pour les lois usuelles.

Cette leçon est l'occasion de présenter clairement la définition de la loi d'une variable aléatoire. On distinguera bien la probabilité P sur Ω de la probabilité P_X définie sur l'ensemble des valeurs de X par $P_X(A) = P(X \in A) = P(X^{-1}(A))$. Le théorème de transfert qui calcule $E(f(X))$ peut alors être donné comme une extension fonctionnelle de cette définition ensembliste. Inversement, on pourra s'intéresser à des classes $\mathcal{C}$ de fonctions telles que la connaissance de $E(f(X))$ pour $f \in \mathcal{C}$ détermine la loi de X. Ceci mène aux outils usuels de caractérisation de la loi (fonction caractéristique, fonction de répartition, mais aussi fonction génératrice, moments ou densité lorsque c'est pertinent). Les propriétés principales de ces objets doivent être connues (comportement d'une fonction de répartition, d'une fonction caractéristique, lien entre la régularité de la fonction caractéristique et l'existence de moments, comportement en 1 de la fonction génératrice, etc).

Les variables aléatoires à valeurs vectorielles (en restant dans le cadre de la dimension finie) font aussi partie de la leçon et on évoquera la loi conjointe et les lois marginales. La notion d'indépendance pourra alors être décrite.

Une telle leçon devra aussi s'enrichir de nombreux exemples de calculs de lois : présentation de lois usuelles en lien avec ce qu'elles modélisent, calculs de fonctions caractéristiques ou de densités selon pertinence, loi de $\phi(X)$ à partir de la loi de X, loi de $\max(X_1, \ldots, X_n)$, $\min(X_1, \ldots, X_n)$, $X_1 + \ldots + X_n$,...

262 : Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.

Pour la session 2019, le titre de cette leçon évolue en

Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

afin de donner un rôle plus important aux théorèmes limites. La maîtrise des différentes définitions des modes de convergence est attendue mais doit être completée par leur mise en pratique dans les différents théorèmes limites. Les différences entre ces théorèmes doivent être abordées avec des exemples et contre-exemples.

Les implications entre les divers modes de convergence, ainsi que les réciproques partielles doivent être connues. Des contre-exemples aux réciproques sont attendus par le jury. Les théorèmes de convergence (lois des grands nombres et théorème central limite) doivent être énoncés et il faut au moins en connaître l'architecture des preuves.

Pour aller plus loin, les candidats pourront s'intéresser au comportement asymptotique de marches aléatoires (en utilisant par exemple le lemme de BOREL-CANTELLI, les fonctions génératrices,...).

Enfin, les résultats autour des séries de variables aléatoires indépendantes comme le théorème de KOLMOGOROV peuvent tout à fait se placer dans cette leçon.

On peut aussi s'intéresser aux temps de retour pour une marche aléatoire simple. Pour aller plus loin, et pour les candidats maîtrisant ces notions, on peut suggérer aussi l'étude asymptotique de(s) chaînes de MARKOV. Toujours pour les candidats les plus solides, on peut aborder les lois infiniment divisibles, les lois stables ou encore les processus de renouvellement (qui donnent de beaux théorèmes de convergence).

263 : Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.

Cette leçon ne sera pas utilisée en 2019. Le jury attendait des candidats qu'ils rappellent la définition d'une variable aléatoire à densité et que des lois usuelles soient présentées, en lien avec des exemples classiques de modélisation. Certains candidats ont pu mentionner le théorème de RADON-NIKODYM, même si un cours abstrait sur l'absolue continuité aurait été jugé inopportun. Le lien entre indépendance et produit des densités est un outil important. Le lien entre la somme de variables indépendantes et la convolution de leurs densités a ét'e trop souvent oublié. Ce résultat général peut être illustré par des exemples issus des lois usuelles. Les candidats peuvent expliquer comment fabriquer n'importe quelle variable aléatoire à partir d'une variable uniforme sur $[0, 1]$.

Les candidats ont proposé parfois en développement la caractérisation de la loi exponentielle comme étant l'unique loi absolument continue sans mémoire : c'est une bonne idée de développement de niveau élémentaire pour autant que les hypothèses soient bien posées et toutes les étapes bien justifiées. On pouvait pousser ce développement à un niveau supérieur en s'intéressant au minimum ou aux sommes de telles lois. La preuve du théorème de SCHEFFÉ sur la convergence en loi pouvait faire l'objet d'une partie d'un développement. La loi de CAUCHY offre encore des idées de développements intéressants (par exemple en la reliant au quotient de deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale centrée).

Pour aller plus loin, les candidats pouvaient aborder la notion de vecteurs gaussiens et son lien avec le théorème central limite. On peut aussi proposer en développement le théorème de COCHRAN.

Bien que cet intitulé disparaisse de la sélection de leçons qui sera utilisée en 2019, il n'en reste pas moins que les variables aléatoires à densité demeurent une notion importante du programme, qui peut être judicieusement évoquée dans d'autres leçons de la sélection qui est proposée pour la session 2019.

264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Le jury attend des candidats qu'ils rappellent la définition d'une variable aléatoire discrète et que des lois usuelles soient présentées, en lien avec des exemples classiques de modélisation. Le lien entre variables aléatoires de BERNOULLI, binomiale et de POISSON doit être discuté. Il peut être d'ailleurs intéressant de mettre en avant le rôle central joué par les variables aléatoires de BERNOULLI.

Les techniques spécifiques aux variables discrètes, notamment à valeurs entières, devront être mises en évidence, comme par exemple la caractérisation de la convergence en loi, la notion de fonction génératrice.

Pour aller plus loin, le processus de GALTON-WATSON peut se traiter intégralement à l'aide des fonctions génératrices et cette voie a été choisie par plusieurs candidats : cela donne un développement de très bon niveau pour ceux qui savent justifier les étapes délicates.

Pour aller beaucoup plus loin, les candidats pourront étudier les marches aléatoires, les chaînes de MARKOV à espaces d'états finis ou dénombrables, les sommes ou séries de variables aléatoires indépendantes.

Pour la session 2019, une nouvelle leçon sera proposée :

265 : Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

Cette leçon est très riche ; c'est une leçon de synthèse qui doit permettre d'explorer de nombreux pans du programme. Évidemment, la leçon ne doit pas se cantonner au seul champ des fonctions usuelles (logarithme, exponentielle, trigonométriques, hyperboliques et réciproques). Le jury attend surtout d'un agrégé qu'il soit en mesure de présenter rapidement les définitions et les propriétés fondamentales de ces fonctions, qu'il sache les tracer sans difficultés, qu'il puisse mener l'étude aux bornes de leur domaine, ainsi que discuter leurs prolongements éventuels, leurs développements de TAYLOR ou en série entière, leurs applications au calcul intégral, les équations fonctionnelles associées ou formules particulières, etc. Le jury n'attend pas un catalogue mais plutôt un choix pertinent et réfléchi, avec des applications en probabilité, convexité, études de courbes, ou autour des développements asymptotiques. Les déterminations du logarithme complexe peuvent tout à fait mériter une discussion approfondie dans cette leçon et donner lieu à des développements de bon niveau, pouvant aller jusqu'à leur interprétation géométrique.

Le domaine des fonctions spéciales est très vaste. Il faut absolument éviter l'écueil d'une taxonomie fastidieuse et dépourvue de motivation ; il vaut bien mieux se concentrer sur des exemples restreints, mais fouillés, par exemple une étude approfondie (d'une) des fonctions Γ, ζ ou θ, leurs propriétés fonctionnelles, leurs prolongements, leur étude asymptotique aux bornes et les domaines d'applications de ces fonctions.

Il y a donc bien des manières, très différentes, de construire valablement cette leçon. Par exemple, on peut bâtir un exposé organisé selon des problématiques et des techniques mathématiques : suites et séries de fonctions, fonctions holomorphes et méromorphes, problèmes de prolongement, développements asymptotiques, calculs d'intégrales et intégrales à paramètres, transformées de FOURIER ou de LAPLACE, *etc.* Mais on pourrait tout aussi bien suivre un fil conducteur motivé par un domaine d'application :

— en arithmétique pour évoquer, par exemple, la fonction ζ et la distribution des nombres premiers,
— en probabilités où la loi normale et la fonction erreur sont évidemment incontournables mais on peut aussi évoquer les lois Gamma et Bêta, les fonctions de BESSEL et leurs liens avec la densité du χ^2 non centrée et celle de la distribution de VON MISES-FISHER ou plus simplement comme loi du produit de variables aléatoires normales et indépendantes, la loi ζ et ses liens avec la théorie des nombres,...
— en analyse des équations aux dérivées partielles où les fonctions spéciales interviennent notamment pour étudier le problème de DIRICHLET pour le Laplacien ou l'équation des ondes,
— il est aussi possible d'évoquer les polynômes orthogonaux, leurs propriétés et leurs diverses applications, en physique (oscillateur harmonique et polynômes de HERMITE), en probabilités (polynômes de HERMITE pour les lois normales, de LAGUERRE pour les lois Gamma, de JACOBI pour les lois Bêta...), pour l'étude d'équations aux dérivées partielles ou pour l'analyse de méthodes numériques,
— en théorie des représentations de groupes avec les fonctions de BESSEL,
— en algèbre en abordant les fonctions p-elliptiques.

Là encore, le jury renouvelle sa mise en garde d'éviter de faire un catalogue qui s'avérerait stérile, il s'agit bien plutôt de se tenir à détailler l'un ou l'autre de ces points de vue. Au final, cette leçon peut être l'occasion de montrer un véritable investissement personnel, adossé aux goûts du candidat.

5.4 Épreuves orales Option D

5.4.1 L'épreuve de leçon de mathématiques de l'option D

Dans cette épreuve, le candidat tire au sort un couple de sujets au sein d'une sélection d'une quarantaine de leçons d'algèbre-géométrie et d'analyse-probabilités extraite de la liste générale des autres options du concours. La sélection qui sera utilisée en 2019 est publiée en annexe du présent document. *Il n'y a pas nécessairement un sujet d'algèbre et un sujet d'analyse* : les couples de leçons proposés au tirage au sort peuvent comprendre deux sujets d'algèbre ou deux sujets d'analyse, par exemple : *Variables aléatoires discrètes* et *Fonctions monotones*. Le jury met donc les candidats en garde contre toute tentation de faire l'impasse sur une partie du programme. Les candidats de cette option préfèrent souvent, lorsque ce choix leur est donné, les sujets relevant de l'algèbre. Toutefois les modalités de formation des couplages de leçons rendent hasardeuse toute stratégie de préparation qui négligerait les connaissances en analyse et probabilités.

Le jury interroge les candidats dans le même esprit que dans les autres options ; la grille de notation et les critères d'évaluation sont strictement identiques. Les remarques détaillées concernant cette épreuve ne sont pas différentes des remarques concernant les épreuves de leçon des autres options et le lecteur est invité à se reporter aux sections précédentes de ce rapport.

5.4.2 L'épreuve orale de leçon d'informatique fondamentale de l'option D

De manière générale, le jury a apprécié la qualité de nombreuses leçons présentées, dans les différents domaines, ce qui confirme le bon travail des préparations spécifiques en amont du concours.

Ceci est particulièrement net dans les plans des présentations proposées. Beaucoup de candidats cernent bien le sujet de leurs leçons et proposent des développements intéressants, même si une plus grande diversité dans les développements proposés serait souhaitable. Le même développement est parfois proposé dans différentes leçons, et trop souvent au moins un des développements proposés n'est pas central dans la leçon.

Le jury a constaté que certains candidats ont choisi l'option D apparemment sans avoir identifié les connaissances attendues. L'épreuve de la leçon est une épreuve difficile, qui aborde des domaines variés couvrant largement le champ de la science informatique. Elle ne peut être réussie que si elle est préparée sérieusement et sur une période longue, et il serait illusoire de choisir cette option par défaut, sans préparation.

Le niveau constaté est assez hétérogène, ce qui conduit à une grande dispersion des notes. Le jury n'hésite pas à utiliser toute l'étendue de la plage de notation.

Organisation de la leçon Le jury rappelle qu'il s'agit bien d'une épreuve d'informatique, et non pas d'outils mathématiques pour l'informatique. Il appartient au candidat de montrer la pertinence des outils mathématiques qu'il développe vis-à-vis des objectifs du thème informatique développé dans la leçon. Les titres de nombreuses leçons mentionnent explicitement exemples ou/et applications, ce qui doit être pris en compte dans la leçon. En particulier, le candidat devra argumenter sur l'utilisation en informatique des notions introduites et proposer des exemples pertinents de leur application concrète. Quand des algorithmes ou des structures de données sont présentées, la question de la complexité est centrale.

Le jury invite les candidats à mettre en perspective les approches développées afin d'argumenter sur leurs bénéfices.

Enfin, il faut rappeler que lors de la présentation de son plan, le candidat doit proposer au moins deux développements : le jury est attentif d'une part à ce que les deux développements entrent strictement dans le cadre de la leçon, et que d'autre part ils ne se réduisent pas à des exemples triviaux. Tout hors sujet est sévèrement pénalisé.

Interaction avec le jury Une large partie de l'épreuve est consacrée à l'interaction avec le jury. Ici, il s'agit plutôt d'explorer de manière plus approfondie les notions qui ont été présentées, les domaines connexes, et surtout les exemples d'application de ces notions.

L'interaction est conduite sous la forme d'un dialogue avec le candidat. Le jury respecte le niveau choisi par le candidat : les questions s'ajustent à ce niveau. De même, toute digression du candidat sur un domaine connexe à celui de la leçon conduira le jury à tester les connaissances du candidat sur ce domaine : les connaissances solides seront récompensées, mais un manque de maîtrise sur des notions mises en avant par le candidat lui-même sera pénalisé.

Ce long temps d'interaction doit être considéré comme une occasion privilégiée pour le candidat de montrer ses connaissances. Il est indispensable que les candidats s'entraînent à ce type d'exercice avec leurs préparateurs.

5.4.3 Commentaires sur les leçons d'informatique fondamentale

La leçon 932 « *Fondements des bases de données relationnelles* » est une nouvelle leçon correspondant à l'évolution du programme. Les leçons 902 « *Diviser pour régner : exemples et applications* » et 906 « *Programmation dynamique : exemples et applications* » ont été fusionnées en la leçon 931 « *Schémas algorithmiques. Exemples et applications* ».

Les commentaires détaillés qui suivent concernent les intitulés qui seront proposés à la session 2019.

901 Structures de données. Exemples et applications.

Le mot algorithme ne figure pas dans l'intitulé de cette leçon, même si l'utilisation des structures de données est évidemment fortement liée à des questions algorithmiques. La leçon doit donc être orientée plutôt sur la question du choix d'une structure de données. Le jury attend du candidat qu'il présente différents types abstraits de structures de données en donnant quelques exemples de leur usage avant de s'intéresser au choix de la structure concrète. Le candidat ne peut se limiter à des structures linéaires simples comme des tableaux ou des listes, mais doit présenter également quelques structures plus complexes, reposant par exemple sur des implantations à l'aide d'arbres. Les notions de complexité des opérations usuelles sur la structure de données sont bien sûr essentielles dans cette leçon.

903 Exemples d'algorithmes de tri. Correction et complexité.

Sur un thème aussi classique, le jury attend des candidats la plus grande précision et la plus grande rigueur.

Ainsi, sur l'exemple du tri rapide, il est attendu du candidat qu'il sache décrire avec soin l'algorithme de partition et en prouver la correction en exhibant un invariant adapté. L'évaluation des complexités dans le cas le pire et en moyenne devra être menée avec rigueur : si on utilise le langage des probabilités, il importe que le candidat sache sur quel espace probabilisé il travaille.

On attend également du candidat qu'il évoque la question du tri en place, des tris stables, des tris externes ainsi que la représentation en machine des collections triées.

907 Algorithmique du texte. Exemples et applications.

Cette leçon devrait permettre au candidat de présenter une grande variété d'algorithmes et de paradigmes de programmation, et ne devrait pas se limiter au seul problème de la recherche d'un motif dans un texte, surtout si le candidat ne sait présenter que la méthode naïve.

De même, des structures de données plus riches que les tableaux de caractères peuvent montrer leur utilité dans certains algorithmes, qu'il s'agisse d'automates ou d'arbres par exemple.

Cependant, cette leçon ne doit pas être confondue avec la 909, « *Langages rationnels et Automates finis. Exemples et applications.* ». La compression de texte peut faire partie de cette leçon si les algorithmes présentés contiennent effectivement des opérations comme les comparaisons de chaînes : la compression LZW, par exemple, est plus pertinente dans cette leçon que la compression de HUFFMAN.

909 Langages rationnels et automates finis. Exemples et applications.

Pour cette leçon très classique, il importe de ne pas oublier de donner exemples et applications, ainsi que le demande l'intitulé.

Une approche algorithmique doit être privilégiée dans la présentation des résultats classiques (déterminisation, théorème de KLEENE, etc.) qui pourra utilement être illustrée par des exemples. Le jury pourra naturellement poser des questions telles que : connaissez-vous un algorithme pour décider de l'égalité des langages reconnus par deux automates ? quelle est sa complexité ?

Des applications dans le domaine de l'analyse lexicale et de la compilation entrent naturellement dans le cadre de cette leçon.

912 Fonctions récursives primitives et non primitives. Exemples.

Il s'agit de présenter un modèle de calcul : les fonctions récursives. S'il est bien sûr important de faire le lien avec d'autres modèles de calcul, par exemple les machines de TURING, la leçon doit traiter des spécificités de l'approche. Le candidat doit motiver l'intérêt de ces classes de fonctions sur les entiers et pourra aborder la hiérarchie des fonctions récursives primitives. Enfin, la variété des exemples proposés sera appréciée.

913 Machines de TURING. Applications.

Il s'agit de présenter un modèle de calcul. Le candidat doit expliquer l'intérêt de disposer d'un modèle formel de calcul et discuter le choix des machines de TURING. La leçon ne peut se réduire à la leçon 914 ou à la leçon 915, même si, bien sûr, la complexité et l'indécidabilité sont des exemples d'applications. Plusieurs développements peuvent être communs avec une des leçons 914, 915, mais il est apprécié qu'un développement spécifique soit proposé.

914 Décidabilité et indécidabilité. Exemples.

Le programme de l'option offre de très nombreuses possibilités d'exemples. Si les exemples classiques de problèmes sur les machines de TURING figurent naturellement dans la leçon, le jury apprécie des exemples issus d'autres parties du programme : théorie des langages, logique,...

Le jury portera une attention particulière à une formalisation propre des réductions, qui sont parfois très approximatives.

915 Classes de complexité. Exemples.

Le jury attend que le candidat aborde à la fois la complexité en temps et en espace. Il faut naturellement exhiber des exemples de problèmes appartenant aux classes de complexité introduites, et montrer les relations d'inclusion existantes entre ces classes, en abordant le caractère strict ou non de ces inclusions. Le jury s'attend à ce que les notions de réduction polynomiale, de problème complet pour une classe, de robustesse d'une classe vis à vis des modèles de calcul soient abordées.

Se focaliser sur la décidabilité dans cette leçon serait hors sujet.

916 Formules du calcul propositionnel : représentation, formes normales, satisfiabilité. Applications.

Le jury attend des candidats qu'ils abordent les questions de la complexité de la satisfiabilité.

Pour autant, les applications ne sauraient se réduire à la réduction de problèmes NP-complets à SAT.

Une partie significative du plan doit être consacrée à la représentation des formules et à leurs formes normales.

918 Systèmes formels de preuve en logique du premier ordre. Exemples.

Le jury attend du candidat qu'il présente au moins la déduction naturelle ou un calcul de séquents et qu'il soit capable de développer des preuves dans ce système sur des exemples classiques simples. La présentation des liens entre syntaxe et sémantique, en développant en particulier les questions de correction et complétude, et de l'apport des systèmes de preuves pour l'automatisation des preuves est également attendue.

Le jury appréciera naturellement si des candidats présentent des notions plus élaborées comme la stratégie d'élimination des coupures mais est bien conscient que la maîtrise de leurs subtilités va au-delà du programme.

921 Algorithmes de recherche et structures de données associées.

Le sujet de la leçon concerne essentiellement les algorithmes de recherche pour trouver un élément dans un ensemble : l'intérêt des structures de données proposées et de leur utilisation doit être argumenté dans ce contexte.

La recherche d'une clé dans un dictionnaire sera ainsi par exemple l'occasion de définir la structure de données abstraite « dictionnaire », et d'en proposer plusieurs implantations concrètes. De la même façon, on peut évoquer la recherche d'un mot dans un lexique : les arbres préfixes (ou *digital tries*) peuvent alors être présentés. Mais on peut aussi s'intéresser à des domaines plus variés, comme la recherche d'un point dans un nuage (et les *quad-trees*), et bien d'autres encore.

923 Analyses lexicale et syntaxique. Applications.

Cette leçon ne doit pas être confondue avec la 909, qui s'intéresse aux seuls langages rationnels, ni avec la 907, sur l'algorithmique du texte.

Si les notions d'automates finis et de langages rationnels et de grammaires algébriques sont au cœur de cette leçon, l'accent doit être mis sur leur utilisation comme outils pour les analyses lexicale et syntaxique. Il s'agit donc d'insister sur la différence entre langages rationnels et algébriques, sans perdre de vue l'aspect applicatif : on pensera bien sûr à la compilation. Le programme permet également des développements pour cette leçon avec une ouverture sur des aspects élémentaires d'analyse sémantique.

924 Théories et modèles en logique du premier ordre. Exemples.

Le jury s'attend à ce que la leçon soit abordée dans l'esprit de l'option informatique, en insistant plus sur la décidabilité/indécidabilité des théories du premier ordre que sur la théorie des modèles.

Il est attendu que le candidat donne au moins un exemple de théorie décidable (respectivement complète) et un exemple de théorie indécidable.

Le jury appréciera naturellement si des candidats connaissent l'existence du premier théorème d'incomplétude mais est bien conscient que la démonstration va au-delà du programme.

925 Graphes : représentations et algorithmes.

Cette leçon offre une grande liberté de choix au candidat, qui peut choisir de présenter des algorithmes sur des problèmes variés : connexité, diamètre, arbre couvrant, flot maximal, plus court chemin, cycle eulérien, etc. mais aussi des problèmes plus difficiles, comme la couverture de sommets ou la recherche d'un cycle hamiltonien, pour lesquels il pourra proposer des algorithmes d'approximation ou des heuristiques usuelles. Une preuve de correction des algorithmes proposés sera évidemment appréciée. Il est attendu que diverses représentations des graphes soient présentées et comparées, en particulier en termes de complexité.

926 Analyse des algorithmes : complexité. Exemples.

Il s'agit ici d'une leçon d'exemples. Le candidat prendra soin de proposer l'analyse d'algorithmes portant sur des domaines variés, avec des méthodes d'analyse également variées : approche combinatoire ou probabiliste, analyse en moyenne ou dans le pire cas.

Si la complexité en temps est centrale dans la leçon, la complexité en espace ne doit pas être négligée. La notion de complexité amortie a également toute sa place dans cette leçon, sur un exemple bien choisi, comme *union find* (ce n'est qu'un exemple).

927 Exemples de preuve d'algorithme : correction, terminaison.

Le jury attend du candidat qu'il traite des exemples d'algorithmes récursifs et des exemples d'algorithmes itératifs.

En particulier, le candidat doit présenter des exemples mettant en évidence l'intérêt de la notion d'invariant pour la correction partielle et celle de variant pour la terminaison des segments itératifs.

Une formalisation comme la logique de Hoare pourra utilement être introduite dans cette leçon, à condition toutefois que le candidat en maîtrise le langage. Des exemples non triviaux de correction d'algorithmes seront proposés. Un exemple de raisonnement type pour prouver la correction des algorithmes gloutons pourra éventuellement faire l'objet d'un développement.

928 Problèmes NP-complets : exemples et réductions.

L'objectif ne doit pas être de dresser un catalogue le plus exhaustif possible ; en revanche, pour chaque exemple, il est attendu que le candidat puisse au moins expliquer clairement le problème considéré, et indiquer de quel autre problème une réduction permet de prouver sa NP-complétude.

Les exemples de réduction polynomiale seront autant que possible choisis dans des domaines variés : graphes, arithmétique, logique, etc. Si les dessins sont les bienvenus lors du développement, le jury attend une définition claire et concise de la fonction associant, à toute instance du premier problème, une instance du second ainsi que la preuve rigoureuse que cette fonction permet la réduction choisie et que les candidats sachent préciser comment sont représentées les données.

Un exemple de problème NP-complet dans sa généralité qui devient P si on contraint davantage les hypothèses pourra être présenté, ou encore un algorithme P approximant un problème NP-complet.

929 Lambda-calcul pur comme modèle de calcul. Exemples.

Il s'agit de présenter un modèle de calcul : le lambda-calcul pur. Il est important de faire le lien avec au moins un autre modèle de calcul, par exemple les machines de Turing ou les fonctions récursives. Néanmoins, la leçon doit traiter des spécificités du lambda-calcul. Ainsi le candidat doit motiver l'intérêt du lambda-calcul pur sur les entiers et pourra aborder la façon dont il permet de définir et d'utiliser des types de données (booléens, couples, listes, arbres).

930 Sémantique des langages de programmation. Exemples.

L'objectif est de formaliser ce qu'est un programme : introduction des sémantiques opérationnelle et dénotationnelle, dans le but de pouvoir faire des preuves de programmes, des preuves d'équivalence, des preuves de correction de traduction.

Ces notions sont typiquement introduites sur un langage de programmation (impératif) jouet. On peut tout à fait se limiter à un langage qui ne nécessite pas l'introduction des CPOs et des théorèmes de point fixe généraux. En revanche, on s'attend ici à ce que les liens entre sémantique opérationnelle et dénotationnelle soient étudiés (toujours dans le cas d'un langage jouet). Il est aussi important que la leçon présente des exemples d'utilisation des notions introduites, comme des preuves d'équivalence de programmes ou des preuves de correction de programmes.

931 Schémas algorithmiques. Exemples et applications.

Cette leçon permet au candidat de présenter différents schémas algorithmiques, en particulier « diviser pour régner », programmation dynamique et approche gloutonne. Le candidat pourra choisir de se concentrer plus particulièrement sur un ou deux de ces paradigmes. Le jury attend du candidat qu'il illustre sa leçon par des exemples variés, touchant des domaines différents et qu'il puisse discuter les intérêts et limites respectifs des méthodes. Le jury ne manquera pas d'interroger plus particulièrement le candidat sur la question de la correction des algorithmes proposés et sur la question de leur complexité, en temps comme en espace.

932 Fondements des bases de données relationnelles.

Le cœur de cette nouvelle leçon concerne les fondements théoriques des bases de données relationnelles : présentation du modèle relationnel, approches logique et algébrique des langages de requêtes, liens entre ces deux approches.

Le candidat pourra ensuite orienter la leçon et proposer des développements dans des directions diverses : complexité de l'évaluation des requêtes, expressivité des langages de requête, requêtes récursives, contraintes d'intégrité, aspects concernant la conception et l'implémentation, optimisation de requêtes...

Chapitre 6

Épreuves orales de modélisation

6.1 Déroulement des épreuves de Modélisation

Lors de l'inscription au concours, quatre options sont proposées :

A. Probabilités et Statistiques,
B. Calcul scientifique,
C. Algèbre et Calcul formel,
D. Informatique.

L'épreuve de modélisation comporte une période de préparation de quatre heures et une interrogation dont la durée est d'une heure, modalités qui s'appliqueront encore pour la session 2019.

Le jury rappelle que, même s'il s'agit d'une épreuve plus appliquée ou moins académique que les deux autres épreuves orales, cela ne dispense en aucun cas les candidats de faire preuve de la rigueur mathématique requise : quand on utilise un théorème, il faut impérativement être capable d'en restituer un jeu d'hypothèses. Par jeu d'hypothèses correct, on entend que le théorème soit vrai et qu'il s'applique effectivement au contexte considéré. Le jury n'attend pas nécessairement un énoncé avec les hypothèses les plus générales possibles.

L'épreuve de modélisation permet aux candidats de mettre en avant diverses qualités : les connaissances mathématiques / informatiques (pour l'option D), la réflexion et la mise en perspective des connaissances, l'aptitude à les appliquer à des problèmes concrets de modélisation, la pertinence des illustrations informatiques, les qualités pédagogiques de mise en forme d'un exposé construit et cohérent, la capacité à faire preuve d'initiative pour s'exprimer et manifester des qualités pédagogiques et de synthèse. La capacité des candidats à répondre aux questions fait partie intégrante de l'évaluation de cette épreuve. Comme pour l'ensemble des oraux, le caractère vivant de l'exposé est un atout.

Le texte fourni est la base pour construire et exposer un traitement mathématique / informatique (pour l'option D) d'un problème « concret » en s'appuyant sur les éléments, généralement partiels, disséminés dans le texte. La présentation doit s'appuyer sur un dosage cohérent et harmonieux entre introduction motivée de modèles, preuves mathématiques, illustrations informatiques, critiques éventuelles du texte, réponses aux questions, mise en lumière des connaissances. Les candidats doivent utiliser leurs connaissances mathématiques et informatiques pour justifier certains points mentionnés dans le texte, proposer un retour sur le modèle ainsi qu'une conclusion.

6.1.1 Texte

L'épreuve de modélisation repose sur l'exploitation d'un texte d'environ 5 à 6 pages (hors l'exercice de programmation pour l'option D) que les candidats choisissent parmi les deux qui leur sont proposés lors du tirage.

En 2019, ces textes seront surmontés, pour les options A, B, C des bandeaux :

> *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte, dont il dispose d'une copie pendant l'interrogation, sans toutefois être censé le connaître. La présentation, bien que totalement libre, doit être organisée et le jury recommande qu'un plan soit annoncé en préliminaire. L'exposé doit être construit en évitant la paraphrase et mettant en lumière vos connaissances, à partir des éléments du texte. Il doit contenir des illustrations informatiques réalisées sur ordinateur, ou, à défaut, des propositions de telles illustrations. Des pistes de réflexion, indicatives et largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte.*

Pour l'option D, le bandeau sera :

> *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte, dont il dispose d'une copie pendant l'interrogation, sans toutefois être censé le connaître. La présentation, bien que totalement libre, doit être organisée et le jury recommande qu'un plan soit annoncé en préliminaire. L'exposé doit être construit en évitant la paraphrase et mettant en lumière vos connaissances, à partir des éléments du texte. L'exercice de programmation doit être présenté lors de l'exposé. Des pistes de réflexion, indicatives et largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte.*

Les textes se termineront par le texte suivant pour les options A, B, C :

> *Les pistes de réflexion suivantes ne sont qu'indicatives et il n'est pas obligatoire de les suivre. Vous pouvez choisir d'étudier, ou non, certains des points proposés, de façon plus ou moins approfondie, mais aussi toute autre question à votre initiative. Vos investigations comporteront une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats. A défaut, si vos illustrations informatiques n'ont pas abouti, il est conseillé d'expliquer ce que vous auriez souhaité mettre en œuvre.*

Pour l'option D, la fin des textes comportera la mention suivante :

> *Les pistes de réflexion suivantes ne sont qu'indicatives et il n'est pas obligatoire de les suivre. Vous pouvez choisir d'étudier, ou non, certains des points proposés, de façon plus ou moins approfondie, mais aussi toute autre question à votre initiative. Vos investigations comporteront une partie traitée sur ordinateur, notamment à travers l'exercice de programmation.*

Les textes sont souvent motivés par des problèmes concrets. Ils peuvent présenter des arguments rapides, voire heuristiques, qui sont dans ce cas signalés comme tels, mais ils ne contiennent pas d'assertion délibérément trompeuse et se concluent par une liste de suggestions.

Même si la plupart des textes s'appuient sur des problématiques issues de sciences autres que les mathématiques, aucune connaissance dans ces domaines n'est exigée par le jury. Discuter la modélisation proposée par un texte consiste donc avant tout à dégager les comportements qualitatifs du modèle, la manière dont il dépend d'éventuels paramètres et s'il semble apte à rendre compte des phénomènes qu'il est censé représenter. Toutefois, le jury s'attend à ce que les candidats ne se contentent pas d'un exposé intégralement qualitatif et démontrent certains résultats évoqués dans le texte ; il apprécie particulièrement, sans toutefois l'exiger, qu'un candidat montre sa compréhension du modèle en exhibant les conséquences d'une variation de paramètres ou de données, notamment dans l'illustration informatique. *A contrario*, les interprétations qualitatives du comportement des modèles sont trop souvent absentes des exposés. Pourtant, montrer que l'on comprend un modèle ne se réduit pas à prouver un théorème, et nécessite d'exposer des expérimentations informatiques à fin d'illustration.

Chaque année, des textes sont rendus publics et sont disponibles sur le site de l'agrégation de mathématiques http://agreg.org. Ces textes sont représentatifs de l'épreuve et permettent aux candidats de se familiariser avec le format des textes, de se faire une idée des attentes du jury, de réfléchir à des illustrations numériques pertinentes dans le cadre du texte ou d'avoir des exemples d'exercices de programmation pour l'option D.

6.1.2 Préparation

Durant les quatre heures de préparation, les candidats ont accès à la bibliothèque et disposent d'un ordinateur dont la configuration est décrite sur le site de l'agrégation de mathématiques, à l'adresse http://agreg.org. Les candidats retrouveront le même environnement sur l'ordinateur de la salle d'interrogation. Il n'est évidemment pas réaliste de découvrir les logiciels à disposition des candidats le jour de l'épreuve : la configuration informatique utilisée pour le concours et sa documentation sont accessibles et téléchargeables sur le site http://clefagreg.dnsalias.org/ et permettent de se familiariser avec l'environnement offert lors de l'épreuve.

Il est recommandé aux candidats de consacrer une partie de leur temps de préparation à s'interroger sur le discours qu'ils tiendront, la stratégie d'exploitation du tableau et d'utilisation de l'outil informatique et le temps qu'ils vont consacrer à chacune des parties de leur plan, ce qui leur permettra de mettre au mieux en valeur leurs connaissances et leur compréhension du texte ou d'une partie de celui-ci. Proposer un exposé structuré et cohérent ne peut s'improviser au moment de l'oral et doit faire l'objet d'une réflexion préalable durant la préparation.

6.1.3 Oral

Au début de l'interrogation, le jury rappelle les modalités de l'épreuve, puis invite les candidats à vérifier que les fichiers qu'ils ont créés lors de la préparation ont bien été transférés sur la machine servant pour l'épreuve (dont l'environnement est identique à celui de la salle de préparation). L'épreuve est scindée en deux temps : un exposé de 35 minutes suivi de 25 minutes d'échanges avec le jury. Les candidats ont la recommandation de commencer par donner la structure de leur présentation sous forme d'un plan et le déroulement de l'exposé doit être en cohérence avec cette structure. Grâce à ce plan, le jury pourra ainsi avoir une vision globale de l'exposé et aider, si besoin, les candidats à gérer leur temps. Comme les candidats se le voient rappeler en début d'épreuve, l'exposé doit être accessible à un public qui découvre les problématiques du texte et doit permettre d'en faire comprendre les enjeux à un public qui ne le connaîtrait pas. Le jury, tout en étant conscient des difficultés du concours, attend un minimum d'aisance au tableau, la manifestation d'une certaine volonté de capter l'attention de l'auditoire et un discours clair et précis.
L'exercice de l'exposé en temps limité n'est pas simple et nécessite un certain entraînement. Il est malheureusement fréquent de voir des exposés un peu trop lents pendant les 20 à 25 premières minutes qui accélerent brutalement dans les 10 dernières minutes et que les candidats peinent à conclure dans le temps imparti. Notons par ailleurs que, si le jury sanctionne le fait de faire un exposé significativement trop bref, la démarche consistant à « jouer la montre » est encore plus sévèrement pénalisée.

Durant l'exposé, les candidats disposent de leurs notes, d'un tableau et d'un ordinateur. Ils peuvent alterner, quand bon leur semble, entre un exposé oral, quelques éléments rédigés au tableau de façon propre et lisible et la présentation de ce qui a été préparé à l'aide de l'outil informatique. Les candidats doivent gérer correctement le tableau et demander, si besoin, au jury les parties qu'ils peuvent effacer, le jury pouvant souhaiter conserver certains passages et y revenir lors des échanges avec les candidats. Le jury n'est pas censé connaître le texte présenté par le candidat, mais chaque membre dispose néanmoins d'un exemplaire papier, afin que les candidats puissent y faire référence pour éviter de recopier les notations, les énoncés complets ou certaines formules. Même si les programmes ne fonctionnent pas comme ils l'auraient souhaité ou si les simulations numériques n'ont pas abouti, les candidats sont invités à expliquer ce qu'ils voulaient mettre en œuvre, illustrer ou programmer. Si, lors de la phase d'exposé, les candidats n'ont pas du tout utilisé l'ordinateur dix minutes avant la fin du temps qui leur est imparti, le jury les en alertera.

Il n'y a pas de « format type » pour cette épreuve. Sur un même texte, des prestations très différentes, tant dans leur forme que dans leur contenu, peuvent conduire également à des notes élevées. Comme dans tout oral, la construction de l'exposé doit être une préoccupation importante des candidats. Une réflexion s'impose afin de produire un tout cohérent et intelligible par un public qui, dans l'esprit de l'épreuve, découvre le texte à travers l'exposé des candidats. Une brève introduction à la problématique avant de s'engager dans une longue digression (succession de définitions, théorèmes,...) sans lien avec le problème de départ ne peut conduire à une prestation jugée comme satisfaisante.

De même, un exposé se réduisant à la présentation de la problématique du texte et à des illustrations informatiques, ou à l'énumération linéaire des pistes de réflexion proposées par le texte, sans contribution des candidats, ne peut conduire au mieux qu'à un résultat médiocre. Un texte traité de façon partielle mais en profondeur peut au contraire donner une note élevée. Plutôt qu'un survol superficiel de l'intégralité du texte sans apport mathématique / informatique ou critique scientifique, les candidats doivent préférer une discussion fouillée d'une portion du texte, bâtie sur des arguments mathématiques / informatiques solides, des simulations pertinentes accompagnées de commentaires de bon aloi. Néanmoins, dans l'ensemble, les candidats semblent avoir perçu la nécessité d'utiliser, au mieux, le temps qui leur est dédié. Le jury apprécie de voir de plus en plus de candidats qui se sont approprié le texte et en donnent une présentation pertinente et autre qu'une paraphrase linéaire.

Pour enrichir leur propos, les candidats sont invités à mobiliser leurs connaissances sur des aspects variés du programme, en étayant les arguments seulement esquissés dans le texte par des énoncés précis. Il est totalement illusoire de chercher à impressionner le jury par une logorrhée de mots savants : les textes proposés peuvent être discutés en exploitant un bagage technique qui n'utilise pas les éléments les plus sophistiqués du programme. En particulier, le jury ne manque pas de s'attarder sur toute notion amenée par les candidats durant leur présentation et il est toujours dommageable de s'aventurer sur des terrains méconnus. Bien plus qu'une démonstration de virtuosité technique, le jury attend que les candidats montrent leur maîtrise d'énoncés relativement simples « en situation » : c'est là que réside une des difficultés principales de l'épreuve. Nombre de candidats peinent à formaliser précisément des notions de base du programme ou à mettre en œuvre certaines de leurs connaissances.

A contrario, utiliser une portion excessive du temps de parole pour recycler un chapitre de cours ou un développement d'une leçon d'Analyse et Probabilités, d'Algèbre et Géométrie ou d'Informatique, en s'éloignant des enjeux du texte, est considéré comme un hors sujet et est sévèrement sanctionné. La paraphrase pure et simple d'amples portions du texte ne constitue en aucun cas un exposé satisfaisant. Les textes fournissent souvent des esquisses de démonstrations qui sont précisément destinées à être complétées et commentées. Les candidats ne doivent pas se contenter de ces esquisses de démonstration. S'ils en font mention, le jury s'assurera que les candidats ont compris en profondeur et qu'ils maîtrisent la démonstration dans sa totalité.

Le jury n'est pas dupe lorsque des candidats font semblant de connaître une notion ou d'avoir compris un point du texte ou une démonstration. Il ne se laisse pas tromper non plus par les candidats qui font des indications du texte un argument d'autorité, tentative maladroite de masquer des insuffisances techniques. Un regard critique (« il faudrait prouver que... mais je n'ai pas réussi à le faire », « les hypothèses du théorème de XXX que je connais pour aborder des problèmes similaires ne sont pas satisfaites dans le cas présent » ...) est une attitude bien plus payante.

Les candidats, disposant d'une grande liberté dans la gestion de leur exposé, sont encouragés à réfléchir à l'organisation qu'ils vont adopter et qui peut constituer une réelle plus-value. Des formats très différents de prestation ont été valorisés : certains s'éloignant du découpage opéré par le texte et arrangeant les éléments autrement ; d'autres présentant un survol du problème, de la méthode et des résultats obtenus avant de détailler des aspects plus mathématiques ; d'autres au contraire suivant de près la progression du texte mais en y apportant les éclairages et les illustrations nécessaires. De bons exposés ont parfois choisi d'aller loin dans le texte pour en décrire la dynamique globale et l'aboutissement (quitte à ne pas traiter toutes les démonstrations) ; d'autres exposés, tout aussi bons, ont traité un passage plus limité du texte mais de manière détaillée et en fournissant tous les arguments pertinents. L'essentiel est d'*éviter la paraphrase sans plus-value mathématique*. En particulier, *de* *nombreuses affirmations des textes ne sont pas justifiées et le jury s'attend à ce que le candidat les identifie pendant sa préparation et fournisse les explications manquantes* (ou, à défaut, des pistes). A titre d'exemple, si une preuve très détaillée du texte omet délibérément un point important, le jury déplorera que cette preuve soit intégralement recopiée sans que le point en question ne soit même relevé. Au contraire, le jury valorisera tous les « lacunes » que le candidat aura repérées et comblées par lui-même. En début d'épreuve, le jury rappelle qu'il a le texte sous les yeux. Ainsi, la réécriture à l'identique et au tableau de longs passages du texte ne présente qu'un intérêt très limité si elle n'est pas accompagnée d'apports du candidat.

6.1.4 Echanges avec le jury

Durant 25 minutes, le jury revient sur certains propos des candidats qui méritent précision. Il peut demander un énoncé précis de théorèmes utilisés pour démontrer une assertion.

Les échanges peuvent également porter sur la modélisation, les illustrations informatiques ou les exercices de programmation pour l'option D.

6.2 Recommandations du jury, communes aux options A, B, C

Le jury tient à souligner les attentes partagées entre les trois options A (Probabilités et Statistiques), B (Calcul scientifique) et C (Algèbre et Calcul formel).

Le jury regrette de ne pas voir davantage de dessins (soignés) ou schémas explicatifs qui peuvent rendre l'argumentation plus claire et convaincante. La capacité à revenir sur le problème de départ et à conclure quant à l'efficacité de l'approche mathématique proposée pour y répondre est une qualité très appréciée. La rigueur et la clarté de l'organisation, la gestion du temps, la pertinence des choix opérés parmi les différentes questions soulevées par le texte sont des éléments de l'évaluation. Les qualités de synthèse sont aussi appelées à s'exprimer : il vaut mieux indiquer les étapes cruciales d'un raisonnement que de se lancer dans un long calcul fastidieux qu'on aura du mal à mener à bien et à mettre en valeur. Les candidats doivent être attentifs au fait que les arguments présents dans les textes, notamment au cours des démonstrations, peuvent être partiels. Il est très important que les affirmations des candidats soient étayées et que les preuves exposées soient entièrement reprises et *complètes*. L'évaluation repose pour une grande part sur la capacité des candidats à identifier les lacunes et ellipses volontaires. Enfin, l'aspect pédagogique de l'exposé, même si le texte n'est restitué que partiellement mènera à une note bien plus élevée qu'un catalogue de type paraphrase.

Illustration informatique

Le jury rappelle son fort attachement à cet aspect de l'épreuve, dont les ambitions sont clairement délimitées. Il ne s'agit en aucun cas, et pour aucune des trois options, d'un exercice de programmation. L'objectif est d'être capable d'utiliser l'outil informatique pour illustrer, de façon pertinente, le contenu du texte. La réalisation de cet objectif constitue une part incompressible de la note finale attribuée à l'épreuve. Une très bonne évaluation peut résulter d'une exploitation judicieuse de programmes simples, reposant largement sur les routines standards des logiciels fournis. La forme et la nature des illustrations proposées n'obéissent à aucun format préétabli. En revanche, elles doivent faire la preuve d'une véritable réflexion scientifique et être agrémentées de commentaires, sur les résultats et les méthodes. Une analyse sommaire de la complexité des algorithmes est attendue. Les illustrations informatiques devraient plus souvent permettre de faire un retour sur la problématique du texte et il convient de commenter les résultats obtenus dans le cadre du modèle proposé par le texte. Des illustrations peuvent mettre en valeur les limites du modèle étudié et le jury apprécie particulièrement que les candidats aient un regarde critique sur le texte et ne prennent pas celui-ci pour vérité absolue.

Si un bel effort est produit par la majorité des candidats, un nombre très limité d'entre eux rechignent encore à toucher à l'outil informatique. Cette stratégie, dont on pourrait naïvement penser qu'elle permet de consacrer plus de temps à l'analyse du texte et à la préparation de l'exposé oral, est fortement sanctionnée.

Il est important de se rappeler qu'il s'agit d'une illustration. Les candidats peuvent choisir de présenter leur code, s'ils le souhaitent, mais ils doivent réfléchir à en extraire les points clés ; une présentation exhaustive et linéaire est préjudiciable à l'exposé, car elle risque d'empiéter sur le temps à consacrer à la restitution du texte. Cependant, le jury pourra demander des précisions sur un point du code. Dans le cas d'une représentation graphique, il est important de préciser, au moins oralement, ce qui est représenté en abscisses et ordonnées.

Pour finir, le jury est tout à fait conscient de la difficulté de de l'utilisation de l'outil informatique en temps limité et en situation de stress. Il reste bienveillant face aux candidats dont les illustrations informatiques n'ont pas abouti au résultat souhaité. Dans une telle situation les candidats sont encouragés à expliquer ce qu'ils ont fait et quel type de résultats ils espéraient obtenir. Le jury sait prendre en compte dans sa notation la démarche suivie lorsqu'elle est clairement argumentée et permettrait, avec des aménagements mineurs, de mettre en évidence des aspects intéressants du texte.

Liens avec les épreuves d'Analyse-Probabilités et Algèbre-Géométrie

Les candidats ne doivent pas hésiter à s'appuyer sur leurs connaissances spécifiques pour proposer des développements originaux dans les leçons d'Analyse et Probablités ou d'Algèbre et Géométrie. Par exemple,

A. les candidats de l'option A peuvent nourrir leurs leçons de thèmes et d'exemples probabilistes (la fonction caractéristique d'une variable aléatoire est une transformée de Fourier, le produit de convolution a un sens probabiliste, les espaces L^p d'une mesure de probabilité sont intéressants, l'étude de certaines séries aléatoires est possible, la fonction de répartition est une fonction monotone digne d'intérêt, le calcul intégral est en lien étroit avec les probabilités,...).

B. les candidats de l'option B peuvent centrer leur propos sur des problématiques motivées par les préoccupations du calcul scientifique (approximation de solutions d'équations linéaires ou non linéaires, d'équations différentielles, convergence d'algorithmes, analyse matricielle, calcul effectif d'exponentielle de matrice,...).

C. les candidats de l'option C peuvent s'appuyer sur leurs connaissances spécifiques en algèbre effective.

6.3 Option A : Probabilités et Statistiques

6.3.1 Commentaires généraux

Les deux aspects, probabiliste et statistique, forment un tout cohérent dans l'étude des phénomènes aléatoires, et les textes proposés mêlent souvent ces deux points de vue. Cependant, il n'est pas impossible de se voir proposer le choix entre deux textes où l'aspect statistique est plus marqué : il est donc nécessaire que les candidats fassent un effort de formation statistique. La part importante de la statistique dans l'enseignement et les applications des mathématiques justifie cet investissement.

En outre, la difficulté des textes étant progressive, une honnête maîtrise des fondamentaux du programme permet, sans virtuosité technique, d'aborder l'épreuve favorablement. Il n'est pas rare qu'un texte commence avec des résultats classiques (par exemple, la loi des grands nombres ou le théorème central limite). Être à l'aise avec ces notions (hypothèses précises et conclusion) permet de démarrer l'exposé en confiance.

6.3.2 Recommandations spécifiques

Au vu de son expérience, des constats faits au cours de la session 2018 et des *questions qu'il pose souvent*, le jury estime judicieux, pour se préparer adéquatement à l'épreuve, de réfléchir aux techniques et notions suivantes.

— **Méthodes classiques en probabilités** : définition de la loi $\mathbf{P}_X$ de X, calcul de la loi de $f(X)$ à partir de $\mathbf{P}_X$, probabilités conditionnelles et formules des probabilités totales ou de l'espérance totale, calcul de $\mathbf{E}(f(X,Y))$ en fonction de la loi du couple (X,Y). À titre d'exemple, le calcul de $\mathbf{P}(X=Y)$ lorsque X,Y sont indépendantes et que X n'a pas d'atome pose souvent problème. Le jury regrette aussi les confusions entre $\mathbf{P}$ (probabilité sur Ω) et $\mathbf{P}_X$ (probabilité sur l'ensemble des valeurs de X).

— **Convergences de suites de variables aléatoires.** Le jury rappelle qu'il en existe différents modes (presque-sûre, dans L^p, en probabilité, en loi). Leurs définitions, caractérisations et implications sont des questions fréquemment posées. Un peu de familiarité avec leur manipulation pourra être utile (par exemple, si $X_n \to X$ et $Y_n \to Y$, a-t-on $f(X_n) \to f(X)$ ou $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$?). Par ailleurs, si des séries de variables aléatoires sont considérées, il faudra préciser le mode de convergence et veiller aux manipulations possibles (par exemple, $\mathbf{E}(\sum_{n=0}^{+\infty} X_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{E}(X_n)$).

— **La loi des grands nombres et le théorème central limite.** Ce sont des incontournables de l'épreuve et il faut en maîtriser les hypothèses et la conclusion, notamment le sens de la convergence énoncée. Il est utile de percevoir que le théorème central limite précise la vitesse de convergence dans la loi des grands nombres. Le jury encourage les candidats à être attentif à la place (numérateur ou dénominateur) du $\sqrt{n}$ dans ce théorème ! Du point de vue de l'estimation d'un paramètre, la loi des grands nombres met un estimateur en évidence et le théorème central limite permet de construire un intervalle de confiance (asymptotique). Le jury rappelle que la loi faible des grands nombres a des hypothèses plus fortes et une conclusion plus faible que la loi forte. Elle n'a donc pas d'intérêt autre que pédagogique, en raison de la simplicité de sa preuve.

— **Intervalles de confiance.** De très nombreux textes invitent à fabriquer un intervalle de confiance dans différents contextes. Le jury suggère aux candidats de clarifier leurs idées à ce sujet : un tel intervalle sert à préciser l'estimation d'un paramètre qu'il convient d'abord d'identifier, cet intervalle est aléatoire, fabriqué à partir des observations et ses bornes ne doivent pas s'exprimer en fonction du paramètre à estimer. Il est à noter aussi que le lemme de Slutsky s'avère utile pour remplacer des valeurs théoriques inconnues par des valeurs empiriques : il faut pouvoir expliquer ceci précisément.

— **Chaînes de** Markov**.** Énoncer les propriétés de Markov faible et forte pose souvent d'insurmontables difficultés. La présentation récursive $X_{n+1} = f(X_n, \varepsilon_{n+1})$ d'une chaîne de Markov est importante et le jury se satisfait de voir qu'elle est souvent reconnue. Les définitions précises des mots « classe (de communication) », « irréductible », « récurrent », « récurrent positif », « apériodique », « mesure stationnaire (ou invariante) » méritent d'être précisément connues. La notion de mesure stationnaire doit pouvoir être interprétée de manière à la fois matricielle et probabiliste. Parmi les théorèmes importants, il faudra distinguer l'existence d'une mesure stationnaire, d'une probabilité stationnaire, son éventuelle unicité, la convergence en loi de la chaîne, la convergence presque-sûre des moyennes $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i)$. Des hypothèses différentes sont propres à chacun de ces résultats et il faudra éviter des paquets maximalistes (par exemple, des affirmations du type « la chaîne est irréductible, récurrente positive, apériodique et à espace d'états fini donc il existe une mesure stationnaire » sont certes vraies mais elles ne montrent pas une compréhension très fine des concepts en jeu).

— **Espérance conditionnelle.** Le jury demande souvent d'en formuler la définition précise (le jury entend parfois parler de projection dans L^2 mais le point crucial de la tribu sous-jacente est ignoré ou bien la propriété $E(X\mathbf{1}_A) = E(Y\mathbf{1}_A)$ est mentionnée mais sans que la mesurabilité de Y ou l'appartenance de A soit précisée). Il faut avoir compris qu'une variable X-mesurable est de la forme $f(X)$ et avoir réfléchi au sens de l'expression $E(Y|X = x)$. En outre, il est indispensable d'avoir déjà fait quelques calculs concrets d'espérance conditionnelle (un exemple fondamental et récurrent : $\mathbf{E}(g(X, Y)|Y)$ lorsque X, Y sont indépendantes ou lorsque le couple (X, Y) admet une densité). Si A est un évènement et Y une variable aléatoire, la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}(A|Y)$ doit être comprise comme $\mathbf{E}(\mathbf{1}_A|Y)$. À chaque fois qu'un conditionnement est écrit, une hygiène recommandable serait de se demander s'il s'agit d'un conditionnement élémentaire (par un évènement de probabilité strictement positive) ou non.

— **Martingales.** Ce concept ne doit pas être confondu avec celui de chaîne de Markov. Il s'agit d'un outil parfois utile pour prouver des convergences presque-sûres ou L^2.

— **Modèle linéaire.** Il s'agit essentiellement de comprendre que la minimisation d'une distance euclidienne est assurée par une projection orthogonale. Il est bon de savoir que la projection orthogonale sur F est simplement caractérisée par son action sur F et sur $F^{\perp}$.

— **Vecteurs gaussiens.** Connaître la définition précise en termes de combinaison linéaire des composantes est indispensable et permet de voir qu'une application affine conserve l'ensemble des vecteurs gaussiens, modifiant moyenne et covariance. Le théorème de Cochran, problématique pour de nombreux candidats, s'en déduit immédiatement car des projections orthogonales Π_V, Π_W sur des espaces orthogonaux vérifient $\Pi_V \Pi_V^T = \Pi_V$ et $\Pi_V \Pi_W = 0$.

— **Tests statistiques.** Le principe général est souvent mal connu. Le jury rappelle qu'un test fixe deux hypothèses H_0, H_1 et un niveau α, qu'il majore la probabilité sous H_0 de rejeter H_0 par α et qu'il évalue aussi la puissance (probabilité sous H_1 d'accepter H_1). Ainsi, lorsqu'un test est présenté, la région de rejet doit apparaître clairement. Les tests d'adéquation du χ^2 et de Kolmogorov-Smirnov méritent d'être connus précisément : mise en oeuvre mais aussi théorème sous-jacent qui justifie le test (au moins l'énoncé car la démonstration du test de Kolmogorov-Smirnov est hors-programme).

À titre de satisfaction, le jury a noté lors de cette session des progrès en ce qui concerne la connaissance et la maîtrise de la loi des grands nombres, du lemme de Slutsky et du modèle linéaire.

6.3.3 Modélisation et mise en œuvre informatique

Le jury suggère aux candidats de réfléchir aux illustrations informatiques pertinentes en probabilités et statistiques. La présentation d'un test doit faire apparaître clairement la valeur de la statistique de test obtenue et le quantile de la loi pertinente. Si un intervalle de confiance I_n dépend de n observations, on gagnera à présenter graphiquement l'évolution $n \mapsto I_n$. Illustrer le comportement asymptotique d'une suite de variables aléatoires demande d'avoir réfléchi aux différents modes de convergence. Une convergence presque-sûre se « voit » sur une trajectoire (même s'il peut être pertinent de préciser un intervalle de confiance ou de fluctuation). Ici se présente le caractère délicat de l'illustration informatique de la convergence d'une suite numérique (même déterministe) : voir que $u_1, \ldots, u_{1000}$ se rapprochent de ℓ suggère mais ne prouve rien, au contraire $\lim_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$ même si $\ln(1000)$ est « petit » : la vitesse de convergence est à examiner. Une convergence en loi demande de simuler un échantillon, de représenter l'histogramme ou la fonction de répartition empirique associés et de pouvoir expliquer pourquoi ces tracés empiriques sont proches de leurs pendants théoriques. De manière générale, lorsqu'un programme mêle une boucle et un aléa, il faut se demander si l'aléa doit être simulé avant la boucle ou bien à chaque étape de cette dernière.

S'il est parfaitement légitime d'utiliser les routines préprogrammées dans les logiciels disponibles, il pourra être pertinent d'avoir un peu réfléchi à leurs fonctionnements (calcul d'une fonction de répartition ou d'un quantile, simulation de lois usuelles, simulation de chaînes de Markov, calcul de mesures stationnaires).

Le jury rappelle que de nombreux textes sont assortis d'un jeu de données numériques sur lequel les candidats sont invités à mettre en œuvre des illustrations. Le jury se réjouit de l'augmentation du nombre de candidats traitant effectivement ces données. Cela constitue une réelle plus-value pour l'exposé. Signalons que ces textes sont accompagnés d'une notice expliquant comment ouvrir les fichiers de données avec les logiciels `Python`, `Scilab`, `Octave` et `R`, logiciels que le jury estime les mieux adaptés à l'option A.

Enfin, s'il est bon que les choix de modélisation soient commentés, il ne s'agit pas de se livrer à une critique gratuite et systématique de toutes les hypothèses. Si une hypothèse semble restrictive, il sera judicieux d'expliquer en quoi elle simplifie les calculs. Si une généralisation est suggérée, il pourra être intéressant de signaler les complications techniques qu'elle entraînerait. Le jury valorise les efforts faits pour interpréter la signification sur le modèle des résultats mathématiques obtenus.

6.4 Option B : Calcul scientifique

6.4.1 Commentaires généraux

Si les modalités et les attentes de cette épreuve semblent connues par une majorité des candidats admissibles, une part importante d'entre eux ne maîtrisent tout simplement pas les notions de base du programme général intervenant dans les textes. Afin d'aborder sereinement les textes proposés dans l'option B, le jury attend des candidats de :

— Connaître le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ et être en mesure de l'appliquer pour des systèmes différentiels simples en citant correctement toutes les hypothèses nécessaires à son utilisation.
— Construire, analyser et mettre en œuvre la méthode d'EULER explicite.
— Connaître les principes des méthodes directes de résolution de systèmes linéaires (pivot de GAUSS, LU), la notion de conditionnement, la recherche d'éléments propres de matrices, analyser et mettre en œuvre la méthode de la puissance.
— Analyser et mettre en œuvre la méthode de NEWTON (cas vectoriel).
— Construire la matrice correspondant à la discrétisation par différences finies de $(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2})$ et connaître ses propriétés.
— être capable d'énoncer et appliquer le théorème des extrêma liés (typiquement pour des problèmes de minimisation de fonctionnelles convexes sur $\mathbb{R}^N$ avec contraintes linéaires), analyser et mettre en œuvre un algorithme du gradient.
— Maîtriser les outils d'analyse de FOURIER.
— Connaître les méthodes de quadratures classiques.

Le jury souligne que les textes exploitent ces notions dans leurs versions les plus élémentaires et ne requièrent aucun raffinement technique. Un énoncé précis des théorèmes utilisés est exigible.

6.4.2 Recommandations spécifiques

Le jury émet les recommandations plus spécifiques suivantes :

— **Quadratures numériques.** L'erreur commise par la méthode des rectangles doit être connue et une preuve élémentaire est exigible des candidats.
— **Analyse des équations différentielles ordinaires et calcul différentiel.** La dérivation de fonctions de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ ne devrait pas poser de difficulté au niveau de l'agrégation. Les formules de développements de TAYLOR contiennent généralement un terme de reste, dont l'analyse est un point souvent crucial. Les candidats devraient faire preuve d'automatismes à la lecture de la moindre équation différentielle ordinaire. Par exemple, un texte indiquant « la solution de l'équation différentielle [...] est définie pour tout temps et reste positive » doit amener à :

  1. énoncer de façon précise le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ le plus adapté au problème (version linéaire si le problème est linéaire, version globale quand elle s'applique,...) et donner une définition claire de la notion de solution utilisée.
  2. Expliquer comment il s'applique dans le contexte présent (détailler explicitement la fonction $(t, X) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \mapsto f(t, X) \in \mathbb{R}^n$ qui permet de mettre le problème sous la forme $X'(t) = f(t, X(t))$, distinguer la variable vectorielle X et la fonction $X : t \mapsto X(t)$ sont malheureusement des obstacles majeurs pour une grande proportion des candidats).
  3. Connaître les critères classiques garantissant la positivité de la solution et sa globalité en temps. Trop de candidats sont pris en défaut sur la notion de solution maximale.

— **Schémas numériques pour les équations différentielles.** Le jury considère la description des schémas d'EULER comme un élément central du programme de l'option B. Les candidats doivent être capables de présenter clairement les principes guidant l'écriture de ces schémas et l'analyse de leurs propriétés de convergence, ainsi que les avantages et inconvénients des méthodes explicites et implicites. Trop rares sont les candidats capables de formaliser correctement une définition de la convergence d'un schéma numérique, qui est trop souvent confondue avec la consistance du schéma. La confusion récurrente entre l'approximation X_n et l'évaluation $X(t_n)$ de la solution exacte au temps t_n, l'incapacité à relier le nombre de points de discrétisation et le pas Δt témoignent d'une compréhension déficiente du sujet. La mise en œuvre de ces méthodes peut être l'occasion de discuter des difficultés potentielles liées à la stabilité et aux contraintes portant sur le pas de temps.

— **Equations aux dérivées partielles.** Le jury précise que les textes qui évoquent des problèmes d'équations aux dérivées partielles peuvent être abordés avec des outils rudimentaires et ne nécessitent *a priori* aucune connaissance sur la théorie des distributions, bien que ces notions fassent partie programme commun, ni ne réclament de dextérité particulière d'analyse fonctionnelle. Il est néanmoins important de savoir faire la différence entre un problème aux limites et un problème de CAUCHY, et d'utiliser la discrétisation adaptée au type de problème considéré. Le jury s'attend à ce que les matrices associées à la discrétisation de $(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2})$ par différences finies pour des conditions aux limites classiques (DIRICHLET, NEUMANN, périodiques) soient connues.

— **Algèbre linéaire.** Des lacunes profondes et inquiétantes sont trop régulièrement relevées. Au grand étonnement du jury, de nombreux candidats ne font pas le lien entre matrices symétriques et formes quadratiques. Les raisonnements liés à la réduction des matrices sont trop souvent extrêmement laborieux et les méthodes pratiques de calcul (résolution de systèmes, calcul de puissance, inverse d'une matrice,...) méconnues. La notion de conditionnement est bien souvent trop imprécise et les liens entre rayon spectral et normes matricielles sont mal maîtrisés.

— **Optimisation.** Les théorèmes de base se rapportant aux d'extrema sont mal connus. On s'attend à ce que les candidats soient capable de préciser les hypothèses requises pour :

1. obtenir l'existence d'un extremum,
2. obtenir l'unicité,
3. caractériser l'extremum (sans contrainte ou avec contraintes d'égalité).

— **Analyse de FOURIER.** Le jury s'étonne que de nombreux candidats aient du mal à préciser les hypothèses de régularité assurant la convergence de la série de FOURIER. Le lien entre la régularité de la fonction et le comportement asymptotique de ses coefficients de FOURIER doit être connu.

6.4.3 Modélisation et mise en œuvre informatique

Le jury de l'option B rappelle qu'une illustration réalisée avec les routines de base des logiciels fournis est tout à fait satisfaisante si elle est clairement présentée, motivée et discutée. Si `Scilab` ou `Python` sont certainement les langages les mieux adaptés, le jury relève qu'un certain nombre de candidats a pu fournir des résultats très convaincants avec un logiciel comme `Octave`, `XCas` ou `Sage`. Le jury insiste sur le fait qu'il est important de commenter les résultats informatiques (courbes, solutions, erreurs...) obtenus et de les relier au problème de modélisation traité par le texte ou à des résultats mathématiques sous-jacents. Une présentation `libreoffice` ne pourra pas être considérée comme une illustration informatique.

6.5 Option C : Algèbre et Calcul formel

6.5.1 Commentaires généraux

La ligne directrice de l'option C est dans un premier temps la recherche de l'*effectivité*, puis de l'*efficacité* (souvent en temps, parfois en espace) du calcul algébrique. Cela va des des aspects les plus élémentaires (algèbre linéaire, groupes, calcul avec les entiers, les polynômes, les entiers modulo) aux aspects plus avancés (élimination, géométrie effective, codes correcteurs d'erreur). Si l'option dispose d'un programme spécifique, les textes peuvent traiter de toute notion au programme, en particulier au programme d'algèbre. De fait, il est tout à fait possible qu'un texte parle de réduction d'endomorphismes ou de groupes, même si ces notions ne sont pas mentionnées dans le programme spécifique de l'option.

6.5.2 Recommandations spécifiques

Le programme de l'option est résolument orienté sur les problématiques du calcul algébrique effectif. Lorsqu'un énoncé du texte affirme l'existence d'un objet (scalaire, vecteur, matrice, élément d'un groupe, entier, polynôme, etc...), le jury apprécie que les candidats mènent la réflexion suivante :
- peut-on calculer cet objet ?
- si oui, par quelle(s) méthodes ?
- ces méthodes sont-elles efficaces ? quel est leur coût ?

Si la démarche reste rare, le jury observe une progression du nombre de candidats se saisissant spontanément d'une question de complexité. Cette démarche est perçue très positivement par le jury. Pour prendre un exemple, quand le texte parle de cryptographie, comparer le coût des opérations de chiffrement et déchiffrement du système proposé avec le coût d'une attaque, même naïve, est une initiative intéressante. Une telle étude est beaucoup plus à sa place qu'un exposé détaillé de RSA plaqué sur un texte qui n'en parle pas — la mention rapide de RSA dans un texte introduisant un système de chiffrement pour comparer des complexités restant bien sûr pertinente.

Sur les aspects mathématiques et la maîtrise des éléments du programme, les principales observations du jury sont les suivantes.

- **Résultant.** Le jury regrette de constater que cette notion est de plus en plus souvent boudée par les candidats. Rappelons que si le résultant ne fait plus partie du programme de mathématiques générales, il continue à figurer parmi les notions au programme de l'option.
  Si les candidats interrogés sur le résultant sont en général capables d'en donner une définition, ses propriétés élémentaires et surtout son utilisation pour éliminer des variables dans un système d'équations polynomiales semblent très floues pour un trop grand nombre d'entre eux. Beaucoup le voient comme un critère d'existence d'un facteur commun et ne pensent plus (surtout dans le cas des polynômes à une variable) au PGCD qui est un objet bien plus simple à appréhender.
- **Corps finis.** Sur cette notion, les connaissances des candidats sont très inégales. Tout d'abord, il n'est pas acceptable de n'avoir pas d'autres exemples de corps finis en tête que $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. La construction d'extensions de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ doit être connue ainsi que la manière dont les opérations de corps s'effectuent. Par ailleurs, il est important de savoir différentier les structures algébriques sous-jacentes : par exemple, savoir que $\mathbf{F}_{p^n}$ est isomorphe en tant que groupe (et même en tant que $\mathbf{F}_p$-espace-vectoriel) à $(\mathbf{F}_p)^n$, mais pas en tant que corps.
- **Codes correcteurs d'erreurs.** Depuis quelques années, le jury constate une sensible progression des connaissances des candidats sur le sujet. Les codes correcteurs sont une partie limitée du programme et très peu de connaissances sont exigibles (et exigées). Toutefois, il est nécessaire de s'y être confronté pour se familiariser avec les problématiques sous-jacentes. À savoir, typiquement, qu'un bon code correcteur a une grande dimension et une grande distance minimale (par rapport à sa longueur).
  Si les définitions de base (codes, distance de Hamming, distance minimale) sont souvent connues, les candidats peinent toujours à en donner une interprétation pratique. Par exemple, peu de

candidats sont capables d'interpréter le ratio k/n pour un code de dimension k dans $(\mathbf{F}_q)^n$ comme un rendement ou un taux d'information. Certains candidats ne savent même pas expliquer comment utiliser concrètement un code donné. Enfin, il faut être conscient que la méconnaissance des corps finis est souvent rédhibitoire pour ce sujet.

— **Algorithmes et complexité.** Il s'agit d'un point fondamental de l'option C que les candidats ne peuvent négliger. Il est malheureusement encore trop rare de voir des candidats prendre spontanément l'initiative d'analyser la complexité d'un algorithme pendant leur exposé. Le jury observe toutefois une progression des connaissances dans ce domaine même si les bases restent trop souvent fragiles :
  — Beaucoup de candidats savent dire que la complexité du pivot de GAUSS est en $O(n^3)$ mais peinent à expliquer pourquoi.
  — De même, si la notion d'exponentiation rapide est connue de la plupart des candidats, peu d'entre eux savent l'expliquer de façon rigoureuse et encore moins en donner la complexité.
  — Si l'algorithme d'EUCLIDE est bien connu des candidats, la plupart d'entre eux ne savent obtenir des relations de BÉZOUT qu'en effectuant l'algorithme d'EUCLIDE classique puis en procédant à une laborieuse « remontée ». Rappelons que l'algorithme d'EUCLIDE *étendu* est explicitement au programme de l'option.

6.5.3 Modélisation et mise en œuvre informatique

Le jury apprécie de constater qu'à quelques rares exceptions, tous les candidats ont utilisé l'outil informatique durant leur présentation pendant la session 2018.

Il est important que les programmes et les calculs effectués avec l'outil informatique s'intègrent de façon pertinente dans l'exposé. L'aptitude à présenter, discuter et mettre en valeur les résultats d'exécution d'un programme puis à les relier à certains énoncés du texte est une démarche qui sera bien plus valorisée que la dextérité en programmation.

Le jury attire particulièrement l'attention sur les points suivants :

— Reprendre un extrait de code d'un livre est tout à fait acceptable à condition que les candidats comprennent exactement ce que fait ce code et que son utilisation fasse sens dans le cadre du texte.

— Utiliser une routine fournie par le logiciel est tout à fait normal mais les candidats doivent être en mesure d'expliquer dans les grandes lignes ce que fait cette routine et comment elle le fait. Par exemple, les candidats faisant appel à une fonction calculant le PGCD de deux polynômes doivent pouvoir détailler le déroulement des algorithmes d'EUCLIDE et EUCLIDE étendu si le jury le leur demande.

— Le jury est parfois surpris de voir des candidats développer de longs et fastidieux calculs au tableau alors que l'utilisation de l'outil informatique leur aurait permis de gagner en temps et en clarté.

6.6 Option D : Informatique

La session 2018 a été de très bon niveau pour les candidats de l'option D et le jury a réellement eu l'impression que les commentaires du rapport 2017 ont été pris en compte par l'ensemble des préparateurs et des candidats.

Le jury interroge les candidats dans le même esprit que dans les autres options et les critères d'évaluation sont largement identiques, sauf en ce qui concerne l'exercice de programmation qui est spécifique.

6.6.1 Attentes du jury

Les textes présentent généralement une problématique concrète, informatique ou de la vie de tous les jours, avant d'en proposer une formalisation plus ou moins complète et une analyse informatique plus ou moins détaillée. Ils sont souvent plutôt de nature descriptive et volontairement allusifs.

Exposé des motivations

Beaucoup de candidats omettent la phase indispensable d'introduction et de motivation. C'est aux candidats d'introduire le sujet du texte et de motiver la présentation qui va suivre. Cette motivation sera le plus souvent l'évocation de situations concrètes dans lesquelles on a besoin d'outils informatiques spécifiques. Ces situations peuvent être proposées par le texte lui-même, mais elles peuvent également être tirées de l'expérience personnelle des candidats. Toute contribution personnelle à ce niveau est toujours très appréciée !

Présentation du texte

Il est attendu des candidats une restitution argumentée d'une partie cohérente du texte, ainsi qu'un effort de formalisation sur les parties descriptives et allusives du texte.

Il est bon d'essayer de donner une ou des preuves complètes d'énoncés du texte, ou de compléter les arguments parfois lapidaires fournis par ce dernier. Les énoncés considérés comme vraiment trop difficiles pour être prouvés dans le cadre d'une préparation en temps limité en partant des connaissances du programme sont systématiquement pointés comme devant être admis.

Il est attendu des candidats qu'ils soient fidèles à l'esprit du texte. Il ne s'agit pas de traiter l'intégralité des points du texte, mais que le traitement choisi soit cohérent : les candidats doivent par exemple pouvoir expliquer pourquoi ils ont choisi de développer certains points, et pas certains autres.

L'exposé doit exploiter intelligemment le tableau, sur un mode qui gagnerait à se rapprocher beaucoup plus du cours (structure, cohérence de ce qui est écrit au tableau indépendamment du discours) que de l'exposé de séminaire de recherche.

Exercice de programmation informatique

Nature de l'exercice. L'exercice de programmation proposé est en règle générale très simple, et peut presque toujours être traité en une vingtaine de lignes. La simplicité de l'exercice vient du fait que le jury souhaite avant tout tester une capacité (et non une virtuosité) à organiser un programme simple, clair, et pédagogique : le programme doit pouvoir être présenté et les choix (structures de données, style impératif *vs.* fonctionnel, types), argumentés.

Le jury n'accorde pas une importance excessive aux considérations d'élégance ou d'efficacité tant que ce qui est proposé reste dans les limites du raisonnable. Il est en revanche attaché à une pratique rigoureuse de la programmation, sachant éviter débordements de tableaux, divisions par zéro, etc., et en particulier un traitement soigneux des « cas limites ».

Exposé de l'exercice. L'exercice de programmation doit être présenté au jury : le code produit durant la préparation est projeté dans la salle d'interrogation et le jury attend un commentaire pertinent de ce code, qui aide à la compréhension toujours difficile dans un temps court d'un programme écrit par un autre.

La présentation au jury doit être faite, que le programme fonctionne — ce que l'on espère ! — ou pas. C'est seulement dans un deuxième temps que les candidats lancent une exécution. Dans tous les cas, le jury évalue la qualité générale du code réalisé. Cette évaluation interactive permet aux candidats réactifs de repérer une erreur, voire de la corriger, de recompiler et de relancer l'exécution.

Il serait bon que les candidats s'entraînent à cet exercice de présentation d'un programme durant leur formation en vue du concours et ne le découvrent pas le jour de l'épreuve.

Remarques sur le style de programmation. Les commentaires sont appréciés par le jury quand ils apportent un plus : spécification, pré ou post-conditions, invariants, complexité ; ils doivent rester en quantité raisonnable, ne pas empêcher la continuité et la lisibilité du code et ne pas être une simple paraphrase du code lui-même. Ces éléments peuvent être explicitement demandés dans l'énoncé de l'exercice de programmation, auquel cas ils doivent être considérés comme faisant partie intégrante de ce dernier.

Enfin, il n'est pas vain de répéter que tous les exercices sont construits de manière à pouvoir être traités confortablement dans le cadre de tous les langages du programme ; par ailleurs, quand les énoncés disent « tableau » ou « liste », ils sous-entendent toujours « liste ou tableau » à la guise des candidats qui doivent savoir argumenter leur choix — au minimum en expliquant que le langage ou le style de programmation choisi s'accomode mieux de l'un ou de l'autre.

La lisibilité de l'expression du programme dans le langage choisi fait partie des éléments appréciés par le jury. Il est surtout attendu que le style de programmation des programmes manifeste une *cohérence* : utilisation de structures d'itération (bornées `for` ou non-bornées `while`), initialisation des variables, découpage plus ou moins fin en fonctions auxiliaires, etc. Les critères d'arrêt des boucles et des récursions doivent être parfaitement maîtrisés. Toutes les quantités présentes dans les programmes doivent être définies par des constantes symboliques facilement modifiables à la demande du jury. Certains langages favorisent une programmation récursive ou itérative. Le candidat peut utiliser le mode de programmation qu'il préfère, pourvu que ce soit de manière cohérente avec les autres choix de conception. Il est bien sûr attendu du candidat qu'il sache passer d'une programmation récursive à une programmation itérative et réciproquement dans les cas simples, par exemple en présence de récursivité terminale.

Tests. Les candidats doivent toujours proposer plusieurs jeux de test, dont si possible un qui ne soit pas totalement « jouet ». Les textes n'en proposant souvent au mieux qu'un, il faut donc prévoir un temps de réflexion sur ce point. Peu de candidats proposent un test différent de celui du texte, et argumentent ce choix (cas dégénéré, passage à l'échelle, etc.) encore plus rarement.

Questions du jury. Le jury revient systématiquement sur l'exercice de programmation, de manière plus ou moins approfondie. Il demande au moins aux candidats

- d'argumenter leurs choix s'ils ne l'ont pas fait au préalable,
- d'indiquer les bibliothèques et les fonctions avancées utilisées et d'expliquer leur comportement (voire demande d'expliquer comment les candidats auraient pu faire sans) – et éventuellement, leur complexité en temps et en espace (cette dernière notion étant souvent mal comprise / connue). Cela est particulièrement vrai des nombreuses constructions avancées de `Python`.
- de préciser les hypothèses implicites faites sur les données.

— éventuellement, d'expliquer les messages d'erreurs observés à la compilation / l'interprétation / l'exécution.

Le jury revient aussi sur la partie du texte présentée par les candidats. L'interrogation cherche toujours à s'adapter au niveau des candidats. Les questions du jury portent au moins autant sur la démarche globale de modélisation et la compréhension des différentes approches du texte que sur l'étude technique des diverses propositions.

Les questions sont destinées à bien évaluer la compréhension du texte par les candidats, à tester leur capacité à formaliser une question ou expliciter une preuve s'ils ne l'ont pas montrée d'eux-même, ou encore à sonder leur regard critique sur le texte. Enfin, il est fréquent que des questions d'informatique fondamentale soient posées en rapport avec le texte, pour percevoir la capacité à faire le lien entre connaissances théoriques et informatique souvent plus concrète ; les questions de calculabilité et complexité (tant analyse de complexité d'un algorithme que preuve de NP-complétude d'un problème, avec l'aide éventuelle du jury), sont en particulier naturelles et fréquentes.

6.6.2 Bilan de la session 2018

Exposé

Le cru 2018 a produit des exposés majoritairement de meilleur niveau que par le passé ; la remarque du rapport 2017 sur les arguments approximatifs ou superficiels a été entendue et la très grande majorité des candidats préparés a présenté les textes dans un formalisme clair et accompagné de preuves rigoureuses. C'est une réelle source de satisfaction pour le jury, qui ne peut que souhaiter que cette tendance se maintienne, voire s'amplifie. Cela permet en outre d'éviter le classique écueil de la paraphrase. Tout juste peut-on regretter une forme d'absence d'audace chez les candidats qui tendent à se réfugier dans la sécurité d'un traitement linéaire se limitant à la première partie du texte, là où un certain nombre de candidats auraient amplement les moyens, quitte à sauter des parties médianes, d'avancer davantage dans les textes.

De manière surprenante, le jury a pu observer à plusieurs reprises des difficultés sur des questions reliées à l'ordre, qui sont pourtant centrales en informatique. Il s'agit principalement de deux choses :

— l'induction structurelle n'est pas de la magie noire : toute invocation d'une définition par induction doit s'accompagner d'un argument d'ordre bien fondé, et d'une vérification que les cas de base ont bien été traités. On a vu à plusieurs reprises des équations implicites ne définissant, jusqu'à preuve du contraire, rien de clair, baptisées « définition par induction ».

— il semble au jury que la programmation dynamique via mémoïsation devrait être réservée à des situations complexes où, justement, l'analyse de l'ordre dans laquelle la table doit être construite est difficile. En tout cas, dans les cas élémentaires, le jury a toujours en 2018 souhaité obtenir une description de l'ordre de remplissage de la table de programmation dynamique.

Exercice de programmation

Comme l'an passé, l'exercice de programmation a été bien traité par la quasi-totalité des candidats. Une écrasante majorité des programmes fonctionne et fait, de manière plus ou moins efficace ou élégante, ce qui est demandé. On note néanmoins encore trop de lectures trop rapides de la spécification conduisant à des hors-sujet ou des imprécisions — et souvent le candidat s'est compliqué la vie. En particulier, les arguments des fonctions qui sont demandées sont toujours supposés passés lors de l'appel, les seules entrées-sorties demandées aux candidats sont des affichages de message.

Il convient certainement d'insister fortement sur le point évoqué plus haut : *quand les énoncés disent « tableau » ou « liste », ils sous-entendent toujours « liste ou tableau » à la guise des candidats qui doivent savoir argumenter leur choix.*

Il reste néanmoins une marge de progression significative sur la présentation orale de l'exercice de programmation.

Programme

Le surinvestissement de l'exercice noté dans le rapport 2016 et tempéré en 2017 s'est maintenant globalement estompé, et on observe maintenant un bon équilibre entre traitement du texte proprement dit et de l'exercice de programmation. Ce dernier est souvent un peu étoffé par les très bons candidats, mais dans les limites du raisonnable. Comme signalé plus haut, une progression plus importante dans le texte serait très probablement mieux valorisée qu'un exercice de programmation allant au-delà de ce qui est demandé.

En cas de compléments à l'exercice, les compléments proposés devraient s'efforcer, plus qu'une démonstration de programmation, de constituer une illustration d'un ou de plusieurs points du texte à l'image de ce qui se pratique dans les autres options : illustration d'un algorithme proposé par le texte, étude d'un exemple, expérimentations, étude statistique, mesure de temps ou de complexité en moyenne, *etc.* Dans ce cadre, l'ensemble des outils informatiques présents sur l'ordinateur peuvent être utilisés. On peut même imaginer, pour aller loin dans cette direction, une présentation très expérimentale du texte mettant en lumière les problèmes évoqués par le texte et exposant, sur un ou plusieurs exemples, les solutions proposées, leurs forces et leurs faiblesses. C'est un parti-pris différent de celui de la formalisation mais qui pourrait également donner d'excellents exposés.

Remarque ponctuelle En rupture avec les années précédentes, une grande majorité des candidats utilise `Python`, avec une petite minorité d'utilisateurs de `CAML` et quelques utilisateurs sporadiques de `C`.

Le jury souhaite insister fermement sur le point déjà évoqué plus haut : l'utilisation de constructions complexes ou de bibliothèques n'est jamais indispensable. Elle n'est pas interdite, mais le jury posera systématiquement des questions : comment aurait-on pu faire sans ? quel est le coût de cette opération et comment impacte-t-il le coût de l'ensemble de la fonction écrite ? Et, éventuellement, comment est-ce réalisé ? En particulier, les analyses de complexité présentées *doivent* prendre en compte le coût de ces opérations. Cela est vrai plus largement de constructions moins complexes, mais non atomiques *a priori*, comme par exemple la concaténation de listes.

Ce commentaire concerne dans l'absolu l'ensemble des langages, mais s'applique tout particulièrement à `Python` qui abonde en raccourcis et constructions de ce type, utilisées avec plus ou moins de bonheur et de lucidité par les candidats. Globalement, un style de programmation `Python` plus proche du « noyau impératif standard » serait apprécié.

Connaissances en informatique

Les réponses des candidats aux questions montrent, de manière générale, de très bonnes connaissances en informatique fondamentale et une vraie capacité à les mobiliser. Ces connaissances semblent toutefois plus solides sur le versant calculabilité et complexité que sur le versant algorithmique où la compréhension fine des algorithmes (et plus largement la culture des candidats dans ce domaine) est parfois rudimentaire ; citons par exemple les questions de forte connexité, d'arbres couvrants, voire parfois simplement de plus courts chemins...

Le jury apprécie également, comme l'an passé, de constater que beaucoup de candidats ont des notions sérieuses sur des sujets plus « concrets » que le programme – architecture, compilation, hiérarchie mémoire, aspects système plus généralement, *etc.* et savent motiver les problématiques des textes et éclairer les solutions proposées à la lumière de ces connaissances.

Annexe A

Commentaires sur le chapitre « Distributions »

Le programme de la session 2018 était marqué par une évolution du chapitre consacré aux distributions, évolution qui était commentée en détails dans le rapport 2017. En particulier, le rapport 2017 donnait un certain nombre d'indications très précises sur des thèmes en lien avec ce chapitre qui mériteraient d'être explorés dans les leçons. Le jury renvoie à ce rapport dont les commentaires sur ce point restent d'actualité ; mais ce chapitre, introduit récemment, suscitant parfois débats et inquiétudes, il n'est peut être pas vain de revenir sur son contenu afin de bien en clarifier le positionnement et les attentes du jury.

L'enjeu consiste avant tout à acquérir une certaine familiarité avec le *calcul au sens des distributions* plutôt que de chercher à approfondir la théorie des distributions proprement dite, dont les bases, notamment en analyse fonctionnelle, dépassent exagérement les attentes du concours. Sans chercher à raviver un débat historique, on pourrait dire, si cela peut contribuer à clarifier l'objectif, que les mots clefs de « fonctions généralisées » et « calcul symbolique » décrivent assez bien le positionnement recherché. Si la version courante du programme met plutôt l'accent sur les distributions tempérées, on pourra s'autoriser, si cela est plus commode et de manière très guidée, à considérer des distributions plus générales. Comme dans le rapport 2017, cette annexe offre quelques pistes, données à titre indicatif et sans prétention à l'exhaustivité, qui complètent les indications déjà données dans la description des leçons. Elles mettent en œuvre des techniques variées du programme d'analyse (intégration, calcul différentiel, analyse de FOURIER, analyse complexe,...). Le jury fait confiance aux candidats et aux préparateurs pour trouver d'autres exemples tout autant pertinents et dans le même esprit.

Il semble en effet important que le professeur agrégé connaisse les rudiments et la puissance d'un tel outil, qu'exploitent ingénieurs et techniciens supérieurs et qui sont abordés assez tôt dans les formations de physique. Le but est de connaître les concepts et techniques qui permettent de résoudre des équations, des problèmes, où il est pertinent de manipuler des dérivées de fonctions non continues, des expressions impliquant des masses de DIRAC, *etc.* et où les transformées de FOURIER et de LAPLACE se révèlent des outils puissants et efficaces. Les notions du chapitre « distributions » du programme ont toute vocation à être utilisées dans les sujets d'écrit ; le problème d'analyse-probabilités 2018 évoquait d'ailleurs la notion de solution faible de $u - u'' = f$. Le jury se réjouit de constater que quelques candidats, bien préparés, n'ont pas hésité à évoquer ces notions à l'oral et à proposer des développements exploitant le calcul au sens des distributions. Le jury a pu aussi poser des exercices dans ce cadre et le présent rapport donne des indications supplémentaires dans cette direction.

La vocation du programme est donc résolument pratique, avec deux notions centrales, qui reposent toutes deux sur un principe de calcul « par dualité/transposition » : la dérivation au sens faible et la généralisation de la transformée de FOURIER. Ainsi un candidat à l'agrégation doit comprendre le sens de formules comme $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{sgn}(x) = 2\delta_0$ (qu'on interprétera donc comme le fait que, pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sgn}(x)\phi'(x)\,\mathrm{d}x = -2\phi(0))$ ou $\widehat{1}(\xi) = \delta_{(\xi=0)}$ et leurs motivations.

Les questions subtiles de topologie, ou concernant la continuité des distributions, ne sont pas considérées comme centrales. On attend des candidats qu'ils soient en mesure d'identifier des objets standards comme des fonctions L^p, des fonctions localement intégrables, des mesures comme la masse de Dirac, avec des formes linéaires opérant sur l'espace des fonctions régulières et à support compact, puis de définir les dérivées faibles de tels objets. Pour ces cas particuliers, la continuité est une conséquence directe de propriétés dont l'agrégatif est déjà familier (propriétés générales de l'intégrale de Lebesgue, inégalité de Hölder,...). Pour des situations plus compliquées, l'étude serait guidée. Par exemple, on pourrait formuler une question en demandant de vérifier que, pour tout $0 < R < \infty$, on peut exhiber $C(R) > 0$ et un entier $k(R)$ tels que si ϕ est une fonction test infiniment dérivable supportée dans la boule $B(0, R)$ alors on dispose d'une estimation de la forme $|\langle T|\phi\rangle| \leqslant C(R)\|\phi\|_{C^{k(R)}}$.

À titre d'illustration, en dimension un, on peut discuter une telle estimation pour la forme linéaire définie par $\langle T|\phi\rangle = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\phi(n)$ et demander d'exprimer les dérivées de cette distribution. Des calculs de limites de distributions, notamment impliquant des régularisations, méritent d'être abordés dans ce contexte. On pourra ainsi vérifier une estimation de ce type pour la valeur principale de Cauchy

$$\langle \mathrm{V.P.}(\frac{1}{x})|\phi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}x,$$

puis étudier $\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{x\pm i\varepsilon}$ ou la transformée de Fourier de la fonction de Heaviside, ou encore établir que l'application $\phi \in \mathscr{S} \mapsto \mathrm{V.P.}(\frac{1}{x}) \star \phi$ se prolonge en une application linéaire continue sur L^2 dont on peut calculer la norme. Avec des manipulations simples sur les distributions, on peut penser à relier $T' = 0$ au sens faible avec le fait que T est constant, relier monotonie et signe de la dérivée faible, caractériser les distributions T vérifiant $\langle T|\varphi\rangle = 0$ pour toute fonction test φ telle que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset \mathbb{R}^N\backslash\{0\}$, ou étudier les solutions de $xT = 0$.

En dimensions supérieures, le programme 2019 précise que la formule d'intégration par parties

$$\int_\Omega \partial_{x_j} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} f(x)\nu_j(x)\,\mathrm{d}\sigma(x)$$

sur un domaine $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ est considérée comme *admise*. Elle peut donc être pleinement et librement exploitée pour mener à bien des calculs, notamment dans le cas particulier où Ω est une boule de $\mathbf{R}^d$. Ainsi, pour une fonction f localement intégrable sur $\mathbf{R}^d$, C^∞ hors de l'origine, et ϕ une fonction C^∞ à support compact, on pourra écrire

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^d} f\ \partial_{x_j}\phi\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geqslant\epsilon} f\partial_{x_j}\phi\,\mathrm{d}x \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{|x|\geqslant\varepsilon}\partial_{x_j} f\ \phi\,\mathrm{d}x + \int_{|x|=\varepsilon} f\phi\frac{x_j}{|x|}\,\mathrm{d}\sigma(x)\right).\end{aligned}$$

De telles manipulations peuvent ainsi être exploitées pour discuter des solutions élémentaires du Laplacien en dimension $d > 1$.

Concernant l'espace de Schwartz, il est probablement intéressant, en lien direct avec le chapitre d'analyse complexe, de comprendre que l'espace des fonctions C^∞ à support compact, cadre « naturel » pour la dérivation faible, est mal adapté pour la transformée de Fourier : on pourra ainsi établir que la transformée de Fourier d'une fonction à support compact sur $\mathbf{R}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ et justifier que $C_c^\infty(\mathbf{R})$ n'est pas stable par transformée de Fourier, alors que $\mathscr{S}(\mathbf{R})$ l'est.

La convolution occupe une place importante. Des critères généraux de convolution de distributions ne sont pas attendus ; en revanche on peut tout à fait discuter des exemples pertinents, comme

— la convolution avec les solutions élémentaires du Laplacien en dimension $d \geqslant 1$, qui amène à l'étude des solutions de $-\Delta u = f$ et de leur régularité, par exemple pour $f \in L^2$. Les mêmes questions peuvent être soulevées avec la fonction $e^{-|x|}$ et l'opérateur $(1 - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2})$, et on fera le lien avec la transformée de FOURIER inverse de $\xi \mapsto \frac{1}{1+\xi^2}$.

— les approximations de l'unité et leur interprétation comme limite au sens des distributions vers la masse de DIRAC, par exemple en étudiant la convolution avec $\frac{1}{(2\pi\epsilon)^{d/2}} \exp\big(-\frac{|x-a|^2}{2\epsilon}\big)$, conduisent à évoquer l'approximation de fonctions L^p ; cette discussion peut aussi être liée à la continuité en $t = 0$, au sens L^2, des solutions faibles de l'équation de la chaleur.

En termes d'applications, l'analyse d'équations aux dérivées partielles ouvre un vaste champ d'investigation et il est attendu des candidats qu'ils puissent mettre en œuvre des méthodes de résolution par transformée de FOURIER, ou par séries de FOURIER, pour des problèmes classiques : équation de la chaleur, équation des ondes, équation de SCHRÖDINGER dans l'espace entier, équation de POISSON, équation de la chaleur, équation des ondes en domaine périodique, ou sur le demi-espace, ou pour résoudre le problème de DIRICHLET sur un disque (noyau de POISSON). On pourra notamment mettre en évidence les propriétés qualitatives des solutions. L'équation de transport, considérée avec des données initiales L^p, fournit un cadre simple où l'étude de solutions faibles est pertinente. Enfin, le peigne de DIRAC et la formule sommatoire de POISSON sont des objets classiques qui trouvent une expression naturelle dans le cadre des distributions et dont les applications en théorie du signal sont nombreuses et riches. On peut remarquer ainsi que les outils standard d'analyse de FOURIER comme la transformée de FOURIER d'une fonction de $L^1(\mathbf{R})$ ou le calcul des coefficients de FOURIER d'une fonction L^1 sur un intervalle de longueur T, se retrouvent réunis avec la théorie des distributions derrière un même concept, celui de la transformée de FOURIER des distributions tempérées. À l'aide de cet outil, on peut réfléchir à la définition d'une transformée de FOURIER sur les suites, et étudier ses applications pour l'étude fréquentielle des signaux numériques infinis, ou pour les propriétés de certains schémas de discrétisation d'équations aux dérivees partielles. Dans le même ordre d'idée, on peut donner des exemples d'analyse fréquentielle de signaux pour lesquels l'analyse de FOURIER standard (séries de FOURIER ou transformée de FOURIER sur $L^1(\mathbf{R})$ ou $L^2(\mathbf{R})$) ne s'applique pas et où il est necessaire d'utiliser la transformee de FOURIER au sens des distributions.

Annexe B

Liste des leçons d'oral qui seront proposées en 2019

B.1 Leçons d'algèbre et géométrie

101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

102 Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

103 Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

104 Groupes finis. Exemples et applications.

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

107 Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel. Exemples.

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

110 Structure et dualité des groupes abéliens finis. Applications.

120 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

121 Nombres premiers. Applications.

122 Anneaux principaux. Applications.

123 Corps finis. Applications.

125 Extensions de corps. Exemples et applications.

126 Exemples d'équations en arithmétique.

141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

142 PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

144 Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.

150 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

152 Déterminant. Exemples et applications.

153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

154 Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

155 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

156 Exponentielle de matrices. Applications.

157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

158 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

160 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

161 Distances et isométries d'un espace affine euclidien.

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

171 Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

181 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

182 Applications des nombres complexes à la géométrie.

183 Utilisation des groupes en géométrie.

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

B.2 Leçons d'analyse et probabilités

201 Espaces de fonctions. Exemples et applications.

202 Exemples de parties denses et applications.

203 Utilisation de la notion de compacité.

204 Connexité. Exemples et applications.

205 Espaces complets. Exemples et applications.

207 Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

209 Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.

213 Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

222 Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.

223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

224 Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

233 Analyse numérique matricielle : résolution approchée de systèmes linéaires, recherche de vecteurs propres, exemples.

234 Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

235 Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

245 Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$. Exemples et applications.

246 Séries de Fourier. Exemples et applications.

250 Transformation de Fourier. Applications.

253 Utilisation de la notion de convexité en analyse.

260 Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

261 Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.

262 Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

265 Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

B.3 Leçons de mathématiques pour l'informatique (option D)

101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

104 Groupes finis. Exemples et applications.

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

120 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

121 Nombres premiers. Applications.

123 Corps finis. Applications.

126 Exemples d'équations en arithmétique.

141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

152 Déterminant. Exemples et applications.

153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

156 Exponentielle de matrices. Applications.

157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

182 Applications des nombres complexes à la géométrie.

183 Utilisation des groupes en géométrie.

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

203 Utilisation de la notion de compacité.

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

224 Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

233 Analyse numérique matricielle : résolution approchée de systèmes linéaires, recherche de vecteurs propres, exemples.

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

246 Séries de FOURIER. Exemples et applications.

250 Transformation de FOURIER. Applications.

260 Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

265 Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

B.4 Leçons d'informatique fondamentale (option D)

901 Structures de données. Exemples et applications.

903 Exemples d'algorithmes de tri. Correction et complexité.

907 Algorithmique du texte. Exemples et applications.

909 Langages rationnels et automates finis. Exemples et applications.

912 Fonctions récursives primitives et non primitives. Exemples.

913 Machines de Turing. Applications.

914 Décidabilité et indécidabilité. Exemples.

915 Classes de complexité. Exemples.

916 Formules du calcul propositionnel : représentation, formes normales, satisfiabilité. Applications.

918 Systèmes formels de preuve en logique du premier ordre. Exemples.

921 Algorithmes de recherche et structures de données associées.

923 Analyses lexicale et syntaxique. Applications.

924 Théories et modèles en logique du premier ordre. Exemples.

925 Graphes : représentations et algorithmes.

926 Analyse des algorithmes : complexité. Exemples.

927 Exemples de preuve d'algorithme : correction, terminaison.

928 Problèmes NP-complets : exemples et réduction.

929 Lambda-calcul pur comme modèle de calcul. Exemples.

930 Sémantique des langages de programmation. Exemples.

931 Schémas algorithmiques. Exemples et applications.

932 Fondements des bases de données relationnelles.

B.5 Sélection de leçons de mathématiques pour le concours spécial docteurs

104 Groupes finis. Exemples et applications.

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

107 Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel. Exemples.

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

110 Structure et dualité des groupes abéliens finis. Applications.

120 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

121 Nombres premiers. Applications.

123 Corps finis. Applications.

141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

152 Déterminant. Exemples et applications.

153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

156 Exponentielle de matrices. Applications.

157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

171 Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

182 Applications des nombres complexes à la géométrie.

183 Utilisation des groupes en géométrie.

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

203 Utilisation de la notion de compacité.

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

213 Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

222 Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

233 Analyse numérique matricielle : résolution approchée de systèmes linéaires, recherche de vecteurs propres, exemples.

234 Fonctions et espaces de fonctions LEBESGUE-intégrables.

235 Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

245 Fonctions holomorphes sur un ouvert de **C**. Exemples et applications.

246 Séries de FOURIER. Exemples et applications.

250 Transformation de FOURIER. Applications.

262 Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Annexe C

La bibliothèque de l'agrégation

Le jury attire l'attention des candidats sur le fait que l'organisation du concours met à leur disposition une bibliothèque complète, bien ordonnée, avec des livres faciles à trouver.

ABELSON H. **SUSSMAN G. J.** **SUSSMAN J.**	Structure and interpretation of computer programs	MIT Press
AEBISCHER B.	L2 Analyse fonctions de plusieurs variables et géométrie analytique	Vuibert
AEBISCHER B.	L3 Géometrie	Vuibert
AHUÉS M. **CHATELIN F.**	Exercices de valeurs propres de matrices	Masson
ALBERT L. **Collectif**	Cours et exercices d'informatique	Vuibert
ALDON G.	Mathématiques dynamiques	Hachette
ALESSANDRI M.	Thèmes de géométrie	Dunod
ALLAIRE G.	Analyse numérique et optimisation	Editions de l'École polytechnique
ALLANO-CHEVALIER M. **OUDOT X.**	Analyse et géométrie différentielle	Hachette

ALLOUCHE J. P. **SHALLIT J.**	Automatic sequences theory, applications, generalizations	CAMBRIDGE
AMAR E. **MATHERON É.**	Analyse complexe	CASSINI
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques — Tome 1A - Topologie — Tome 1B - Fonctions numériques — Tome 2 - Suites et séries numériques — Tome 3 - Analyse fonctionnelle — Tome 5 - Algèbre générale, polynômes — Tome 6 - Algèbre linéaire, première partie — Tome 7 - Algèbre linéaire, deuxième partie	ELLIPSES
ANDREWS G.	Number Theory	DOVER
APPLE A.W.	Modern compiler implementation — in C — in Java — in ML	CAMBRIGDE
ARIBAUD F. **VAUTHIER J.**	Mathématiques. Première année de DEUG	ESKA
ARNAUDIÈS J-M. **BERTIN J.**	Groupes, Algèbres et Géométrie — Tome I — Tome II	ELLIPSES
ARNAUDIÈS J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'analyse	DUNOD
ARNAUDIÈS J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie du cours de Mathématiques tome 4	DUNOD
ARNAUDIÈS J-M. **FRAYSSE H.**	Cours de Mathématiques — 1. Algèbre — 2. Analyse — 3. Compléments d'analyse — 4. Algèbre bilinéaire et géométrie	DUNOD

ARNAUDIÈS J.-M. **LELONG-FERRAND J.**	Cours de Mathématiques — Tome 1 pour M-M' : Algèbre — Tome 1 pour A-A' : Algèbre — Tome 2 : Analyse — Tome 3 : Géométrie et cinématique — Tome 4 : Equations différentielles, intégrales multiples	Dunod
ARNOLD V.	Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires	MIR
ARNOLD V.	Équations différentielles ordinaires	MIR
ARNOLD V.	Lectures on partial differential equations	Springer
ARNOLD A. **GUESSARIAN I.**	Mathématiques pour l'informatique	EdiSciences
ARTIN E.	Algèbre géométrique	Gauthier-Villars
ARTIN E.	Algèbre géométrique	Gabay
ARTIN M.	Algebra	Prentice Hall
AUBIN J.P.	Analyse fonctionnelle appliquée — Tome 1 — Tome 2	PUF
AUDIN M.	Géométrie de la licence à l'agrégation	Belin
AUTEBERT J. M.	Calculabilité et décidabilité	Masson
AUTEBERT J. M.	Théorie des langages et des automates	Masson
AVANISSIAN V.	Initiation à l'analyse fonctionnelle	PUF
AVEZ A.	Calcul différentiel	Masson

AVEZ A.	La leçon d'analyse à l'oral de l'agrégation	MASSON
BAASE S. **VAN GELDER A.**	Computer algorithms Introduction to design & analysis	ADDISON WESLEY
BACAER N.	Histoires de mathématiques et de populations	CASSINI
BADOUEL E. **BOUCHERON S.** **DICKY A., PETIT A.** **SANTHA M., WEIL P., ZEITOUN M.**	Problèmes d'informatique fondamentale	SPRINGER
BAJARD J.C.	Exercices d'Algorithmique	ITP
BAKHVALOV N.	Méthodes numériques	MIR
BARANGER J.	Analyse numérique	HERMANN
BARBE Ph. **LEDOUX M.**	Probabilité (De la licence à l'agrégation)	BELIN
BARRET M. **BENIDIR M.**	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires	DUNOD
BASILI B. **PESKINE C.**	Algèbre	DIDEROT, ÉDITEUR ARTS ET SCIENCES
BASS J.	Cours de Mathématiques — Tome 1 — Tome 2	MASSON
BAUER F. L.	Decrypted secrets. Methods and maxims of cryptology	SPRINGER
BECK V. **MALICK J.** **PEYRÉ G.**	Objectif Agregation	HK
BENAÏM M. **EL KAROUI N.**	Promenade aléatoire	LES ÉDITIONS DE L'X

BENDER C. **ORSZAG S.**	Advanced mathematical methods for scientists and engineers	Mc Graw Hill
BENIDIR M. **BARRET M.**	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires	Dunod
BENOIST J. *et al*	Math L2, Cours complet avec 700 tests et exercices corrigés	Pearson Education
BENOIST J. **SALINIER A.**	Exercices de calcul intégral	Dunod
BENZONI-GAVAGE S.	Calcul différentiel et équations différentielles	Dunod
BERCU B. **CHAFAÏ D.**	Modélisation stochastique et simulation	Dunod
BERGER M.	Géométrie — Index — 1. Action de groupes, espaces affines et projectifs — 2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères — 3. Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes — 4. Formes quadratiques, quadriques et coniques — 5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères	Cédic/Nathan
BERGER M.	Géométrie tome 2	Nathan
BERGER M.	Géométrie vivante	Cassini
BERGER M. **BERRY J-P.** **PANSU P.** **SAINT RAYMOND X.**	Problèmes de géométrie commentés et rédigés	Cédic/Nathan
BERGER M. **GOSTIAUX B.**	Géométrie différentielle	Armand Colin
BERLINE N. **SABBAH C.**	Groupes finis, journées X-UPS 2000	Editions de l'X

BERTHELIN F.	Equations différentielles	Cassini
BHATIA R.	Matrix Analysis	Springer
BICKEL P.J. **DOKSUM K.A.**	Mathematical statistics	Prentice Hall
BIDÉGARAY B. **MOISAN L.**	Petits problèmes de mathématiques appliquées et de modélisation	Springer
BIGGS N. L.	Discrete mathematics	Oxford Science Publications
BINET G.	Traitement du signal	Ellipse
BILLINGSLEY P.	Probability and measure	Wiley
BLANCHARD A.	Les corps non commutatifs	PUF
BOAS R.	A primer of real functions	Mathematical association of America
BOCCARA N.	Distributions	Ellipses
BOISSONAT J.-D. **YVINEC M.**	Géométrie algébrique	Ediscience
BON J.-L.	Fiabilité des systèmes	Masson
BONNANS J.-F. **GILBERT J.C.** **LEMARÉCHAL C.** **SAGASTIZABAL C.** **PENNEQUIN D.**	Optimisation numérique	Springer
BONY J.-M.	Cours d'analyse	Editions de l'école polytechnique

BONY J.-M.	Méthodes mathématiques pour les sciences physiques	Editions de l'École Polytechnique
BORIES-LONGUET F.	Graphes et combinatoire	Ellipse
BOSTAN A. **CHYZAK F.** **GIUSTI M.** **LEBTRETON R.** **LECERF G.** **SALVY B.** **SCHOST E.**	Algorithmes efficaces en calcul formel	Chyzak F. ed.
BOUALEM H. **BROUZET J.C.** **ELSNER B.** **KACZMAREK L.**	Mathématique L1	Pearson Education
BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique — Topologie générale, chapitres V à X — Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à VII — Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à III — Fascicule XIII Intégration, chapitres I à IV	Hermann
BOURGADE P.	Annales des Olympiades internationales de mathématiques 1976-2005	Cassini
BOUVIER A. **RICHARD D.**	Groupes	Hermann
BRAEMER J-M. **KERBRAT Y.**	Géométrie des courbes et des surfaces	Hermann
BRÉMAUD P.	Introduction aux probabilités	Springer
BRÉZIS H.	Analyse fonctionnelle, théorie et applications	Masson
BRIANE M. **PAGÈS G.**	Théorie de l'intégration Cours et exercices, 3ème édition	Vuibert
BROUSSE P.	Mécanique MP - PC.- Spéciales A. A'. B. B'.	Armand Colin

BRUCE J.W. **GIBLIN P.J.** **RIPPON P.J.**	Microcomputers and Mathematics	Cambridge
CABANE R. **LEBOEUF C.**	Algèbre linéaire — 1. Espaces vectoriels , Polynômes — 2. Matrices et réduction	Ellipses
CABANNES H.	Cours de Mécanique générale	Dunod
CALAIS J.	Éléments de théorie des anneaux	PUF
CALAIS J.	Éléments de théorie des groupes	PUF
CALDERO P. **GERMONI J.**	Histoires hédonistes de groupes et de géométries	Calvage et Mounet
CALVO B.	Cours d'analyse II	Armand Colin
CANDELPERGHER B.	Calcul intégral	Cassini
CANDELPERGHER B.	Théorie des probabilités	Calvage et Mounet
CARREGA J.C.	Théorie des corps	Hermann
CARTAN H.	Calcul différentiel (1971)	Hermann
CARTAN H.	Cours de calcul différentiel (1977)	Hermann
CARTAN H.	Formes différentielles	Hermann
CARTAN H.	Théorie élémentaire des fonctions analytiques	Hermann
CARTON O.	Langages formels, calculabilité et complexité	Vuibert

CASTI J.L.	Realty Rules : Picturing the world in mathematics I	Wiley Interscience
CASTI J.L.	Realty Rules : Picturing the world in mathematics II	Wiley Interscience
CASTLEMAN K.R.	Digital image processing	Prentice Hall
CHABANOL M.-L. **RUCH J.-J.**	Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques	Ellipse
CHABAT B.	Introduction à l'analyse complexe	Mir
CHAFAÏ D.	Probabilités. Préparation à l'agrégation interne	
CHAMBERT-LOIR A.	Algèbre corporelle	Editions de l'X
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation — Analyse 2 — Analyse 3	Masson
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.** **MAILLOT V.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Analyse 1 (seconde édition revue et corrigée)	Masson
CHARLES J. **MBEKHTA M.** **QUEFFÉLEC H.**	Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs	Dunod
CHARPENTIER E. **NIKOLSKI N.**	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui — Vol 1 — Vol 2 — Vol 3 — Vol 4	Ellipses
CHATELIN F.	Valeurs propres de matrices	Masson
CHILDS L.	A concrete introduction to Higher Algebra	Springer Verlag
CHOIMET D. **QUEFFÉLEC H.**	Analyse mathématique	Cassini

CHOQUET G.	Cours d'analyse Tome II : Topologie	Masson
CHOQUET G.	L'enseignement de la géométrie	Hermann
CHOQUET-BRUHAT Y.	Distributions. Théories et problèmes.	Masson
CHRISTOL G. **PILIBOSSIAN P.** **YAMMINE S.**	— Algèbre 1 — Algèbre 2	Ellipses
CIARLET P.G.	Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation	Masson
CIARLET P.G.	Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation	Dunod
COGIS O. **ROBERT C.**	Au-delà des ponts de Könisberg. Théorie des graphes. Problèmes, théorie, algorithmes	Vuibert
COHN P.M.	Algebra Volume 1	John Wiley
COLLET H. **GIRARD B.** **PERRIER C.**	Mathématique BTS industriel	Nathan
COLLET P.	Modeling binary data	Chapman and Hall
COLLET J.-F.	Discrete stochastic processes and applications	Springer
COLMEZ P.	Éléments d'algèbre et d'analyse	Editions de l'X
COMBROUZE A.	Probabilités et statistiques	PUF
CORI R. **LASCAR D.**	Logique mathématique — 1. Calcul propositionnel, algèbre de Boole, calcul des prédicats — 2. Fonctions récursives, théorème de Gödel, théorie des ensembles, théorie des modèles	Dunod

CORMEN T. H. **LEISERSON C. E.** **RIVEST R. L.** **STEIN C.**	Introduction à l'algorithmique	DUNOD
CORTELLA A.	Théorie des groupes	VUIBERT
COTRELL M. **GENON-CATALOT V.** **DUHAMEL C.** **MEYRE T.**	Exercices de probabilités	CASSINI
COURANT R. **HILBERT D.**	Methods of Mathematical Physics — Volume 1 — Volume 2	JOHN WILEY
COUSINEAU G. **MAUNY M.**	Approche fonctionnelle de la programmation	EDISCIENCE
COX D.A.	Galois Theory	WILEY INTERSCIENCE
COXETER H.S.M.	Introduction to Geometry	JOHN WILEY
CVITANOVIĆ P.	Universality in Chaos	INSTITUTE OF PHYSICS PUBLISHING
DACUNHA-CASTELLE D. **DUFLO M.**	— Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe — Exercices de Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe	MASSON
DACUNHA-CASTELLE D. **REVUZ D.** **SCHREIBER M.**	Recueil de problèmes de calcul des probabilités	MASSON
DAMPHOUSSE P.	Petite introduction à l'algorithmique	ELLIPSES
DANTZER J.F.	Mathématiques pour l'agrégation interne	VUIBERT
DARTE A. **VAUDENAY S.**	Algorithmique et optimisation	DUNOD

DAVID R. **NOUR K.** **RAFFALI C.**	Introduction à la logique Théorie de la démonstration	Dunod
DEHEUVELS P.	L'intégrale	PUF
DEHEUVELS R.	Formes quadratiques et groupes classiques	PUF
DEHORNOY P.	Mathématiques de l'informatique	Dunod
DEHORNOY P.	Complexité et décidabilité	Springer
DELCOURT J.	Théorie des groupes	Dunod
DELTHEIL R. **CAIRE D.**	Géométrie et compléments	Jacques Gabay
DEMAILLY J.P.	Analyse numérique et équations différentielles	PU Grenoble
DEMAZURE M.	Catastrophes et bifurcations	Ellipses
DEMAZURE M.	Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes	Cassini
DEMAZURE M.	Cours d'algèbre	Cassini
DEMBO A. **ZEITOUNI O.**	Large deviations techniques and applications	Springer
DESCHAMPS C. **WARUSFEL A.** *et al.*	Mathématiques, cours et exercices corrigés — 1ère année MPSI, PCSI, PTSI — 2ème année MP, PC, PSI	Dunod
DESCOMBES R.	Éléments de théorie des nombres	PUF
DESPRÉS B.	Lois de conservations euleriennes, lagrangiennes et méthodes numériques	Springer

DEVANZ C. **ELHODAIBI M.**	Exercices corrigés de Mathématiques posés à l'oral des Ensi, Tome 2	ELLIPSES
DI MENZA L.	Analyse numérique des équations aux dérivées partielles	CASSINI
DIEUDONNÉ J.	Algèbre linéaire et géométrie élémentaire	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Calcul infinitésimal	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Sur les groupes classiques	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Éléments d'Analyse. — Fondements de l'analyse moderne — Éléments d'Analyse Tome 2.	GAUTHIER-VILLARS
DIXMIER J.	Cours de Mathématiques du premier cycle — Première année — Deuxième année	GAUTHIER-VILLARS
DOUCHET J.	Analyse complexe	PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIV. ROMANDES
DOUCHET J.	Analyse : recueil d'exercices et aide-mémoire, volume 1	PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIV. ROMANDES
DOUCHET J.	Analyse : recueil d'exercices et aide-mémoire, volume 2	PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIV. ROMANDES
DOUCHET J. **ZWALHEN B.**	Calcul différentiel et intégral	PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIV. ROMANDES
DOWEK G. **LÉVY J.-J**	Introduction à la théorie des langages de programmation	EDITIONS DE L'X
DRAPPER N. **SCHMITH H.**	Applied regression analysis	WILEY

DUBUC S.	Géométrie plane	PUF
DUCROCQ A. **WARUSFEL A.**	Les Mathématiques, plaisir et nécessité Un parcours guidé dans l'univers des mathématiques	VUIBERT
DUGAC P.	Histoire de l'analyse. Autour de la notion de limite et de ses voisinages	VUIBERT
DUTERTRET G.	Initiation à la cryptographie	PUF
DYM H. **McKEAN H.P.**	Fouriers series and integrals	ACADEMICS PRESS
EBBINGHAUS H. *et al.*	Les Nombres	VUIBERT
EIDEN J.D.	Géométrie analytique classique	CALVAGE ET MOUNET
EL KACIMI ALAOUI A. **QUEFFÉLEC H.** **SACRÉ C.** **VASSALLO V.**	Quelques aspects des mathématiques actuelles	ELLIPSES
ENGEL A.	Solutions d'expert — Vol 1 — Vol 2	CASSINI
ÉPISTEMON L. **(OVAERT J.L.** **VERLEY J.L.)**	Exercices et problèmes — Analyse. Volume 1 — Algèbre.	CÉDIC/NATHAN
EXBRAYAT J.M. **MAZET P.**	Notions modernes de mathématiques — Algèbre 1 : Notions fondamentales de la théorie des ensembles — Analyse 1 : Construction des espaces fondamentaux de l'analyse — Analyse 2 : Éléments de topologie générale	HATIER
FADDEEV D. **SOMINSKI I.**	Recueil d'exercices d'Algèbre Supérieure	MIR
FAIRBANK X. **BEEF C.**	POX - Exercices posés au petit oral de l'X	ELLIPSES

FARAUT J.	Analyse sur les groupes de Lie	Calvage et Mounet
FARAUT J. **KHALILI E.**	Arithmétique Cours, Exercices et Travaux Pratiques sur Micro-Ordinateur	Ellipses
FELLER W.	An introduction to probability theory and its applications — Volume 1 — Volume 2	John Wiley
FERRIER J.P.	Mathématiques pour la licence	Masson
FILBET F.	Analyse numérique	Dunod
FLORY G.	Exercices de topologie et analyse avec solutions — Tome 1 - Topologie — Tome 2 - Fonctions d'une variable réelle — Tome 3 - Fonctions différentiables, intégrales multiples — Tome 4 - Séries, équations différentielles	Vuibert
FONTANEZ F. **RANDÉ B.**	Les clefs pour les Mines	Calvage et Mounet
FRANCHINI J. **JACQUENS J-C.**	Mathématiques Spéciales — Algèbre — Analyse 1 — Analyse 2	Ellipses
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 1	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 2	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 3	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 1	Cassini

FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 2	CASSINI
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 3	CASSINI
FRANCINOU S. **GIANELLA H.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 1	MASSON
FRENKEL J.	Géométrie pour l'élève-professeur	HERMANN
FRESNEL J.	Géométrie algébrique	UFR MATHS BORDEAUX
FRESNEL J.	Géométrie	IREM DE BORDEAUX
FRESNEL J.	Groupes	HERMANN
FRESNEL J.	Méthodes modernes en géométrie	HERMANN
FRESNEL J. **MATIGNON M.**	Algèbre et géométrie	HERMANN
FUHRMANN P.	A polynomial approach to linear algebra	SPRINGER
FULTON W.	Algebraic Topology A first course	SPRINGER
GABRIEL P.	Matrices, géométrie, algèbre linéaire	CASSINI
GANTMACHER F.R.	Théorie des matrices — Tome 1 — Tome 2	DUNOD
GARET O.	Probabilités et processus stochastiques	COPYRIGHTED MATERIAL
GARET O. **KURTZMANN A.**	De l'intégration aux probabilités	ELLIPSES

GAREY M. **JOHNSON D.**	Computers and intractability	FREEMAN
GARLING D.J.H.	Inequalities : a journey into linear analysis	CAMBRIDGE
GATHEN (von zur) J. **GERHARD .J**	Modern computer algebra	CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS
GENET J.	Mesure et intégration. Théorie élémentaire. Cours et exercices résolus	VUIBERT
GHIDAGLIA J.M.	Petits problèmes d'analyse	SPRINGER
GINDIKIN S.	Histoires de mathématiciens et de physiciens	CASSINI
GOBLOT R.	Algèbre commutative	MASSON
GOBLOT R.	Thèmes de géométrie	MASSON
GODEMENT R.	Analyse — Tome 1 — Tome 2 — Tome 3	SPRINGER
GODEMENT R.	Cours d'Algèbre	HERMANN
GOLUB G.H. **VAN LOAN C.F.**	Matrix computations	WILEY
GONNORD S. **TOSEL N.**	Thèmes d'Analyse pour l'agrégation — Topologie et Analyse fonctionnelle — Calcul différentiel	ELLIPSES
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales — Tome 1 - Algèbre — Tome 2 - Topologie et analyse réelle — Tome 3 - Analyse fonctionnelle et calcul différentiel — Tome 4 - Géométrie affine et métrique — Tome 5 - Géométrie : arcs et nappes	PUF

GOUDON T.	Mathématiques pour la modélisation et le calcul scientifique	ISTE
GOUDON T.	Intégration	ELLIPSES
GOURDON X.	Les maths en tête, mathématiques pour M' — Algèbre — Analyse	ELLIPSES
GRAHAM R. **KNUTH D.** **PATASHNIK O.**	Concrete mathematics	ADISON-WESLEY
GRAMAIN A.	Géométrie élémentaire	HERMANN
GRAMAIN A.	Intégration	HERMANN
GRANJON Y.	Informatique, algorithmes en pascal et en C	DUNOD
GRENIER J.P.	Débuter en algorithmique avec Matlab et Scilab	ELLIPSES
GREUB W.	Linear Algebra	SPRINGER VERLAG
GRIFONE J.	Algèbre linéaire	CEPADUES
GRIMMET G. **WELSH D.**	Probability (an introduction)	OXFORD
GUJARATI D. N.	Basic Econometrics	WILEY
GUSFIELD D.	Algorithms on strings, trees and sequences	CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS
HABSIEGER L. **MARTEL V.**	Exercices corrigés posés à l'oral des ENSI Tome 1 Analyse	ELLIPSES
HALMOS P.	Problèmes de mathématiciens petits et grands	CASSINI

HAMMAD P.	Cours de probabilités	CUJAS
HAMMAD P. **TARANCO A.**	Exercices de probabilités	CUJAS
HAMMER R. **HOCKS M.** **KULISH U.** **RATZ D.**	C++ toolbox for verified computing	SPRINGER
HARDY G.H. **WRIGHT E.M.**	An introduction to the theory of numbers	OXFORD
HAREL D.	Computer LTD. What they really can't do	OXFORD
HAREL D. **FELDMAN Y.**	Algorithmics. The spirit of computing	ADDISON WESLEY
HENNEQUIN P.L. **TORTRAT A.**	Théorie des probabilités et quelques applications	MASSON
HENRICI P.	Applied and Computational Complex Analysis — Volume 1 — Volume 2 — Volume 3	WILEY-INTERSCIENCE
HERBIN R. **GALLOUËT T.**	Mesures, intégration, probabilités	ELLIPSES
HERVÉ M.	Les fonctions analytiques	PUF
HINDRY M.	Arithmétique	CALVAGE ET MOUNET
HIRSCH F. **LACOMBE G.**	Eléments d'analyse fonctionnelle	MASSON
HOCHART M. **SCIUTO G.**	Algèbre Analyse Géométrie (MPSI/PCSI)	VUIBERT
HOPCROFT J.E. **MOTWANI R.** **ULLMAN J. D.**	Introduction to automata theory, Languages and Computation	ADDISON WESLEY
HOUZEL C.	Analyse mathématique : cours et exercices	BELIN

HUBBARD J. **HUBERT F.**	Calcul scientifique T1	Vuibert
HUBBARD J. **HUBERT F.**	Calcul scientifique T2	Vuibert
INGRAO B.	Coniques projectives, affines et métriques	Calvage et Mounet
IRELAND K. **ROSEN M.**	A Classical Introduction to Modern Numbers Theory	Springer Verlag
ISAAC R.	Une initiation aux probabilités (Trad. R. Mansuy)	Vuibert-Springer
ITARD J.	Les nombres premiers	Que sais-je ? PUF
JACOBSON N.	Basic Algebra — Tome I — Tome II	Freeman and Co
JACOD J. **PROTTER P.**	L'essentiel en théorie des probabilités	Cassini
KAHANE J.P. **GILLES P.**	Séries de Fourier et ondelettes	Cassini
KATZNELSON Y.	An Introduction to Harmonic Analysis	Dover
KERNIGHAN B. **RITCHIE D.**	Le langage C	Dunod
KLOECKNER B.	Un bref aperçu de la géométrie projective	Calvage et Mounet
KNUTH D.E.	The art of computer programming — Volume 1 : Fundamental algorithms — Volume 2 : Seminumerical algorithms — Volume 3 : Sorting and Searching	Addison-Wesley
KOBLITZ N.	A course in number theory and cryptography	Springer
KOLMOGOROV A. **FOMINE S.**	Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle	Ellipses

de KONNINCK J.M. **MERCIER A.**	Introduction à la théorie des nombres	Modulo
KÖRNER T.W.	Fourier analysis	Cambridge
KÖRNER T.W.	Exercises for Fourier analysis	Cambridge
KOURIS E.	Une année de colle en maths en MPSI	Calvage et Mounet
KREE P.	Introduction aux Mathématiques et à leurs applications fondamentales M.P.2	Dunod
KRIVINE H.	Exercices de Mathématiques pour physiciens	Casssini
KRIVINE J.L.	Théorie axiomatique des ensembles	PUF
KRIVINE J.L.	Théorie des ensembles	Cassini
KUNG J.P.S. **ROTA G-C.** **YAN C.H.**	Combinatorics : the Rota way	Cambridge
LAAMRI E. H.	Mesures, intégration et transformée de Fourier des fonctions	Dunod
LACOMME P. **PRINS C.** **SEVAUX M.**	Algorithmes de graphes	Eyrolles
LACROIX Y. **MAZLIAK L.**	Probabilités, variables aléatoires...Niveau M1	Ellipses
LADEGAILLERIE Y.	Géométrie affine, projective, euclidienne et analagmatique	PUF
LAFONTAINE J.	Introduction aux variétés différentielles	PUF
LALEMENT R.	Logique, réduction, résolution	Masson

LANG S.	Algèbre linéaire — Tome 1 — Tome 2	InterEditions
LANG S.	Algebra	Addison-Wesley
LANG S.	Linear Algebra	Addison-Wesley
LAROCHE F.	Escapades arithmétiques	Ellipses
LASCAR D.	La théorie des modèles en peu de maux	Cassini
LASCAUX T. **THÉODOR R.**	Analyse matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, tomes 1 & 2	Dunod
LAVILLE G.	Courbes et surfaces	Ellipses
LAVILLE G.	Géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	Ellipses
LAX P. D.	Functional analysis	Wiley
LAX P. D.	Linear Algebra	Wiley
LE BRIS G.	Maple Sugar : une initiation progressive à Maple	Cassini
LEBOEUF C. **GUÉGAND J.** **ROQUE J.L.** **LANDRY P.**	Exercices corrigés de probabilités	Ellipses
LEBORGNE D.	Calcul différentiel et géométrie	PUF
LEBOSSÉ C. **HÉMERY C.**	Géométrie. Classe de Mathématiques	Jacques Gabay
LEHMANN D. **SACRÉ C.**	Géométrie et topologie des surfaces	PUF

LEHNING H. **JAKUBOWICZ D.**	Mathématiques supérieures et spéciales 2 : Dérivation	MASSON
LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales — Tome 1 : Topologie — Tome 3 : Intégration et sommation — Tome 4 : Analyse en dimension finie — Tome 5 : Analyse fonctionnelle	MASSON
LEICHTNAM E. **SCHAUER X.**	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS — Tome I - Algèbre 1 — Tome 2 - Algèbre et géométrie — Tome 3 - Analyse 1 — Tome 4 - Analyse 2	ELLIPSES
LELONG-FERRAND J.	Géométrie différentielle	MASSON
LELONG-FERRAND J.	Les fondements de la géométrie	PUF
LESIEUR L. **MEYER Y.** **JOULAIN C.** **LEFEBVRE J.**	Algèbre linéaire, géométrie	ARMAND COLIN
LINET F.	Maths en pratiques	DUNOT
LION G.	Algèbre pour la licence Cours et exercices (2ème édition)	VUIBERT
LION G.	Géométrie du plan Cours complet avec 600 exercices résolus	VUIBERT
LOTHAIRE M.	Algebraic combinatorics on words	CAMBRIDGE
MAC LANE S. **BIRKHOFF G.**	Algèbre — 1 : Structures fondamentales — 2 : Les grands théorèmes	GAUTHIER-VILLARS
MACKI J. **STRAUSS A.**	Introduction to optimal control theory	SPRINGER
MADÈRE K.	Leçons d'analyse	ELLIPSE

MADÈRE K.	Leçons d'algèbre	Ellipse
MAKAROV B.M. **GOLUZINA M.G.** **LODKIN A.A.** **PODKORYTOV A.N.**	Problèmes d'analyse réelle	Cassini
MALLIAVIN M. P.	Les groupes finis et leurs représentations complexes	Masson
MALLIAVIN P.	Géométrie différentielle intrinsèque	Hermann
MALLIAVIN M. P. **WARUSFEL A.**	Algèbre linéaire et géométrie classique. Exercices	Masson
MANIVEL L.	Cours spécialisé	SMF
MANSUY R. **MNEIMNÉ R.**	Algèbre linéaire réduction des endomorphismes	Vuibert
MANSUY R. **RANDÉ B.**	Les clefs pour l' X	Calvage et Mounet
Manuels Matlab	— Using Matlab version 5 — Using Matlab version 6 — Statistics Toolbox — Using Matlab Graphics	
MARCE S. **DEVAL-GUILLY E.**	Problèmes corrigés des ENSI	Ellipses
MARCO J.P. *et al.*	Analyse L3	Pearson
MASCART H. **STOKA M.**	Fonctions d'une variable réelle — Tome 2 : Exercices et corrigés — Tome 3 : Exercices et corrigés — Tome 4 : Exercices et corrigés	PUF
MAURY B.	Analyse fonctionnelle, Exercices et problèmes corrigés	Ellipses
MAWHIN J.	Analyse : fondements, technique, évolutions	De Boeck Université

MAZET P.	Algèbre et géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	Ellipses
MENEZES A.J. **van OORSCHOT P.C.** **VANSTONE S.A.**	Handbook of applied cryptography	CRC Press
MERKIN D.	Introduction to the theory of stability	Springer
MÉTIVIER M.	Notions fondamentales de la théorie des probabilités	Dunod
MÉTIVIER M.	Probabilités : dix leçons d'introduction. École Polytechnique	Ellipses
MEUNIER P.	Agrégation interne de Mathématiques Exercices d'oral corrigés et commentés — Tome 2	PUF
MEUNIER P.	Algèbre avec applications à l'algorithmique et à la cryptographie	Ellipses
MEYRE T.	Préparation à l'agrégation interne	IREM
MIGNOTTE M.	Algèbre concrète, cours et exercices	Ellipses
MIGNOTTE M.	Mathématiques pour le calcul formel	PUF
MILHAU X.	Statistique	Belin
MITCHELL J. C.	Concepts in programming languages	Cambridge
MNEIMNÉ R.	Eléments de géométrie : action de groupes	Cassini
MNEIMNÉ R.	Réduction des endomorphismes	Calvage et Mounet
MNEIMNÉ R. **TESTARD F.**	Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques	Hermann

MOISAN J. **VERNOTTE A.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : topologie et séries	ELLIPSES
MOISAN J. **VERNOTTE A.** **TOSEL N.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : suites et séries de fonctions	ELLIPSES
MONIER J.M.	Cours de mathématiques — Analyse 1 MPSI, PCSI, PTSI — Analyse 2 MPSI, PCSI, PTSI — Analyse 3 MP, PSI, PC, PT — Analyse 4 MP, PSI, PC, PT — Algèbre 1 MPSI, PCSI, PTSI — Algèbre 2 MP, PSI, PC, PT — Exercices d'analyse MPSI — Exercices d'analyse MP — Exercice d'algèbre et géométrie MP	DUNOD
MUTAFIAN C.	Le défi algébrique — Tome 1 — Tome 2	VUIBERT
NAGEL E. **NEWMAN J. R.** **GÖDEL K.** **GIRARD J. Y.**	Le théorème de Gödel	SEUIL
NAUDIN P. **QUITTE C.**	Algorithmique algébrique avec exercices corrigés	MASSON
NEVEU J.	Base mathématique du calcul des probabilités	MASSON
NEVEU J.	Martingales à temps discret	MASSON
NIVEN I.	Irrational numbers	MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA
NORRIS J.R.	Markov chains	CAMBRIDGE
NOURDIN Y.	Leçons d'analyse, probabilités, algèbre et géométrie	DUNOD
O'ROURKE J.	Computational geometry in C (second edition)	CAMBRIDGE

OPREA J.	Differential geometry	Prentice hall
OUVRARD J.Y.	— Probabilités 1 (capes, agrégation) — Probabilités 2 (maîtrise, agrégation)	Cassini
PABION J.F.	Elemenents d'analyse complexe	Ellipse
PAPADIMITRIOU C.H.	Computational complexity	Pearson Education
PAGÈS G. **BOUZITAT C.**	En passant par hasard ... Les probabilités de tous les jours	Vuibert
PAPINI O. **WOLFMANN J.**	Algèbre discrète et codes correcteurs	Springer
PARDOUX E.	Processus de Markov et applications	Dunod
PEDOE D.	Geometry- A comprehensive course	Dover
PERKO L.	Differential equation and dynamical systems	Springer
PERRIN D.	Cours d'Algèbre	Ellipses
PERRIN D.	Cours d'Algèbre	ENSJF
PERRIN D.	Mathématiques d'école	Cassini
PERRIN D.	Nombres, mesures et géométrie	Ellipse
PERRIN-RIOU B.	Algèbre, arithmétique et MAPLE	Cassini
PETAZZONI B.	Seize problèmes d'informatique	Springer
PETROVŠEK M. **WILF H.S.** **ZEILBERGER D.**	A=B	A.K. Peters

PEVZNER P.	Computational molecular biology- an algorithmic approach	MIT PRESS
PEYRÉ G.	L'algèbre discrète de la transformée de Fourier	ELLIPSE
PÓLYA G. **SZEGŐ G.**	Problems and Theorems in Analysis — Volume I — Volume II	SPRINGER VERLAG
POMMELLET A.	Agrégation de Mathématiques. Cours d'Analyse	ELLIPSES
POUNDSTONE W.	Le dilemme du prisonnier	CASSINI
PRASOLOV V.	Polynomials	SPRINGER
PRASOLOV V.	Problèmes et théorèmes d'algèbre linéaires	CASSINI
PREPARATA F.P. **SHAMOS M.I.**	Computational geometry - an introduction	SPRINGER
PRESS W. **FLANNERY B.** **TEUKOLSKI S.** **VETTERLING W.**	Numerical recipes in Pascal	CAMBRIDGE
PUTZ J.F.	Maple animation	CHAPMAN AND HALL
QUATERONI A. **SACCO R.** **SALERI F.**	Méthodes numériques	SPRINGER
QUATERONI A. **SALERI F.** **GERVASIO P.**	Calcul scientifique	SPRINGER
QUEFFÉLEC H.	Topologie	DUNOD
QUEFFÉLEC H. **ZUILY C.**	Éléments d'analyse	DUNOD

QUEFFÉLEC H. **ZUILY C.**	Analyse pour l'agregation	Dunod
RALSTON A. **RABINOWITCH P**	A first course in numerical analysis	International Student Edition
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales — 1- Algèbre — 2- Algèbre et applications à la géométrie — 3- Topologie et éléments d'analyse — 4- Séries et équations différentielles — 5- Applications de l'analyse à la géométrie	Masson
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Exercices avec solutions — Algèbre — Analyse 1 — Analyse 2	Masson
RAMIS J.P. **WARUSFEL A.**	Mathématiques - Tout en un pour la licence	Dunod
RAMIS J.P. **WARUSFEL A.**	Mathématiques - Tout en un pour la licence Niveau 1	Dunod
RAMIS J.P. **WARUSFEL A.**	Mathématiques - Tout en un pour la licence Niveau 2	Dunod
RAMIS J.P. **WARUSFEL A.**	Mathématiques - Tout en un pour la licence Niveau 3	Dunod
RAO C.R.	Linear statistical inference and its application	Wiley
RANDÉ B.	Les carnets indiens de Srinivasa Ramanujan	Cassini
RANDÉ B. **MANSUY R.**	Les clefs pour l'X (2)	Calvage Mounet
RANDÉ B. **TAIEB F.**	Les clefs pour l'X	Calvage Mounet
REINHARDT F. **SOEDER H.**	Atlas des mathématiques	Livre de Poche
REMMERT R.	Classical topics in complex function theory	Springer

RIDEAU F.	Exercices de calcul différentiel	HERMANN
RIESZ F. **NAGY SZ. B.**	Leçons d'analyse fonctionnelle	GAUTHIER-VILLARS
RIO E.	Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants	SPRINGER
RITTAUD, B.	Newton implique Kepler	ELLIPSES
RIVOIRARD V. **STOLTZ G.**	Statistique mathématique en action	DUNOD
ROBERT C.	Contes et décomptes de la statistique - Une initiation par l'exemple	VUIBERT
ROLLAND R.	Théorie des séries 2- Séries entières	CÉDIC/NATHAN
ROMBALDI J.-E.	Thèmes pour l'agrégation de mathématiques	EDP SCIENCES
ROMBALDI J.-E.	Analyse matricielle	EDP SCIENCES
ROMBALDI J.-E.	Mathématiques pour l'agrégation	DEBOECK SUP.
ROUDIER H.	Alèbre linéaire. Cours et exercices	VUIBERT
ROMBALDI J.E.	Analyse matricielle	EDP SCIENCES
ROUSSEAU Y. **SAINT-AUBIN Y.**	Mathématiques et technologie	SPRINGER (SUMAT)
ROUVIÈRE F.	Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation	CASSINI
ROUX C.	Initiation à la théorie des graphes	ELLIPSES
RUAUD J.F. **WARUSFEL A.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 3	MASSON

RUDIN W.	Analyse réelle et complexe	Masson
RUDIN W.	Functional analysis	Mc Graw Hill
RUDIN W.	Real and complex analysis	Mc Graw Hill
SA EARP R. **TOUBIANA E.**	Introduction à la Géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann	Cassini
SAINSAULIEU L.	Calcul scientifique	Dunod
SAINT RAYMOND J.	Topologie, calcul différentiel et variable complexe	Calvage et Mounet
SAKAROVITCH J.	Eléments de théorie des automates	Vuibert
SAKS S. **ZYGMUND A.**	Fonctions analytiques	Masson
SAMUEL P.	Géométrie projective	PUF
SAMUEL P.	Théorie algébrique des nombres	Hermann
SARMANT M.C. **MERLIER T.** **PILIBOSSIAN Ph.** **YAMMINE S.**	Analyse 1	Ellipses
SAUVAGEOT F.	Petits problèmes de géométrie et d'algèbre	Springer
SAUX PICARD P.	Cours de calcul formel - Algorithmes fondamentaux	Ellipses
SAVIOZ J.C.	Algèbre linéaire, cours et exercices	Vuibert
SCHATZMAN M.	Analyse numérique, une approche mathématique	Dunod
SCHNEIER B.	Applied cryptography	Wiley

SCHWARTZ L.	Analyse — I Topologie générale et analyse fonctionnelle — II Calcul différentiel et équations différentielles	Hermann
SCHWARTZ L.	Cours d'Analyse — Tome 1 — Tome 2	Hermann
SCHWARTZ L.	Méthodes Mathématiques pour les sciences physiques	Hermann
SEDGEWICK R.	Algorithms	Addison Wesley
SEDGEWICK R.	Algorithmes en Java	Pearson Education
SEDGEWICK R.	Algorithmes en langage C	Dunod
SEGUINS PAZZIS (de) C.	Invitation aux formes quadratiques	Calvage et Mounet
SELBERHERR S. STIPPEL H. STRASSER E.	Simulation of semi-conductor devices and processes	Springer
SERRE D.	Les matrices, théorie et pratique	Dunod
SERRE J.P.	Cours d'arithmétique	PUF
SERVIEN Cl.	— Analyse 3 — Analyse 4	Ellipses
SHAPIRO H.N.	Introduction to the theory of numbers	Dover
SIDLER J.C.	Géométrie Projective	Dunod
SIPSER M.	Introduction to the theory of computation	Thomson C. T.
SKANDALIS G.	Topologie et analyse	Dunod

SKANDALIS G.	Analyse. Résumé et exercices	IREM
SKANDALIS G.	Algèbre générale et algèbre linéaire.	IREM
STANLEY R.P.	Enumerative combinatorics Volume I	Waddworth and Brooks
STEIN E.	Functional Analysis	Princeton
STEIN E.	Complex Analysis	Princeton
STEIN E.	Fourier Analysis	Princeton
STEIN E.	Real Analysis	Princeton
STEWART I.	Galois theory	Chapman and Hall
STROUSTRUP B	Le langage C++	Pearson Education
SZPIRGLAS A.	Exercices d'algèbre	Cassini
SZPIRGLAS A. *et al.*	Algèbre L3	Pearson
TAUVEL P.	Cours de Géométrie	Dunod
TAUVEL P.	Cours d'algèbre	Dunod
TAUVEL P.	Corps commutatifs et théorie de Galois	Calvage et Mounet
TAUVEL P.	Mathématiques générales pour l'agrégation	Masson
TAUVEL P.	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Algèbre 2	Masson

TAUVEL P.	Analyse complexe pour la licence	Dunod
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres T 1	S. M. F.
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres	Institut Elie Cartan
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres	Belin
TENENBAUM G. **MENDÈS-FRANCE M.**	Les nombres premiers	Que sais-je ? PUF
TENENBAUM G. **WU J.**	Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres T 2	S. M. F.
TESTARD F.	Analyse mathématique	Calvage et Mounet
TEYTAUD O. **ANTONINI C.** **BORGNAT P.** **CHATEAU A.** **LEBEAU E.**	Les maths pour l'agreg	Dunod
TISSERON C.	Géométries affine, projective et euclidienne	Hermann
TISSIER A.	Mathématiques générales : exercices avec solutions	Bréal
TITCHMARSH E.C.	The theory of functions	Oxford
TORTRAT A.	Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires	Masson
TRIGNAN J.	Constructions géométriques et courbes remarquables	Vuibert
TRUFFAULT B.	Exercices de géométrie élémentaires	IREM des Pays de Loire
TURING A. **GIRARD J. Y.**	La Machine de Turing	Seuil

VALIRON G.	Cours d'analyse mathématique — I Théorie des fonctions — II Équations fonctionnelles - Applications	Masson
VAUQUOIS B.	Outils Mathématiques. Probabilités	Hermann
VAUTHIER J. **PRAT J-J.**	Cours d'Analyse Mathématique de l'Agrégation	Masson
VAZIRANI V.V.	Algorithmes d'approximation	Springer
VERGNAUD D.	Exercices et problèmes de cryptographie	Dunod
VINBERG E. B.	A course in algebra	AMS
WAGSCHAL C.	Fonctions holomorphes - Équations différentielles	Hermann
WAGSCHAL C.	Topologie et analyse fonctionnelle	Hermann
WAGSCHAL C.	Distributions, analyse microlocale, équations aux dérivées partielles	Hermann
WARIN B.	L'algorithmique, votre passeport informatique pour la programmation	Ellipses
WARUSFEL A.	Structures algébriques finies	Classiques Hachette
WARUSFEL A. **ATTALI P.** **COLLET M.** **GAUTIER C.** **NICOLAS S.**	Mathématiques — Analyse — Arithmétique — Géométrie — Probabilités	Vuibert
WATERMAN M.S.	Introduction to computational biology	Chapman and hall / CRC
WEST D. B.	Introduction to graph theory	Prentice Hell
WHITTAKER E.T. **WATSON G.N.**	A course of modern analysis	Cambridge

WILF H.	Generatingfunctionology	ACADEMIC PRESS
WILF H.	Algorithms and complexity	A.K. PETERS
WILLEM M.	Analyse fonctionnelle élémentaire	CASSINI
WILLEM M.	Principes d'analyse fonctionnelle	CASSINI
WINSKEL G.	The formal semantics of programming languages	MIT PRESS
YALE P.B.	Geometry and Symmetry	DOVER
YGER A.	Analyse complexe	ELLIPSE
YGER A. **WEIL J.-A.** *et al.*	Matématiques appliquées L3	PEARSON
YOUNG D.M. **GREGORY R.T.**	A survey of numerical mathematics	DOVER
ZAVIDOVIQUE M.	Un max de math	CALVAGE ET MOUNET
ZÉMOR G.	Cours de cryptographie	CASSINI
ZUILY C.	Éléments de distributions et d' équations aux dérivées partielles	DUNOD
ZUILY C. **QUEFFÉLEC H.**	Éléments d'analyse pour l'agrégation	MASSON
ZUILY C. **QUEFFÉLEC H.**	Analyse pour l'agrégation	DUNOD
ZUILY C. **QUEFFÉLEC H.**	Problèmes de distributions	CASSINI