RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
Liberté • Égalité • Fraternité

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

Concours de recrutement du second degré

Rapport de jury

Concours : Agrégation externe

Section : Mathématiques

Session 2019

Rapport de jury présenté par : Thierry Goudon
Président du jury

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Le rapport de jury répond à deux objectifs : le premier est d'établir un compte-rendu de la session passé, le second est de préparer la prochaine session. Aussi, le lecteur y trouvera

— un bilan de la session 2019 qui restitue, au travers de quelques statistiques, la physionomie d'ensemble des candidats et des admis, en termes de profils et de performances.
— une description de l'esprit dans lequel le jury entend aborder le concours de l'agrégation externe de mathématiques et la manière dont il conçoit les épreuves. Plusieurs réunions jalonnent l'année pour préparer la session, confronter les différents points de vue, afin de dégager une approche commune des attentes et de leur évaluation. Ce travail préparatoire conduit à affirmer une attitude positive et bienveillante, cherchant à tirer le meilleur parti des connaissances et des qualités des candidats lors des épreuves.
— un commentaire détaillé de chacune des épreuves, discutant les réalisations de l'année et détaillant les attentes du jury.

Ce rapport doit être vu comme un complément indispensable du programme du concours, un guide pratique qui se veut utile aux futurs candidats afin de les aider à se préparer au mieux pour les épreuves qui les attendent. S'il mentionne des lacunes et défauts sur lesquels des efforts spécifiques mériteraient d'être faits, il cherche surtout à faire comprendre la nature des attentes, avec l'intention d'accompagner la préparation au concours. *Le jury considère que ce rapport, délibérement tourné vers l'avenir, précis et détaillé quant à ses attentes, l'engage dans son évaluation.* Le jury recommande donc aux candidats de tous profils, ainsi qu'aux centres de préparation et à leurs intervenants, d'en faire une lecture attentive et de bien tenir compte des prescriptions qui y sont faites. En particulier, réussir l'agrégation externe de mathématiques réclame l'acquisition et la maîtrise d'un socle de connaissances solide. Trop de candidats se mettent en perdition sur les notions les plus avancées plutôt que de se concentrer sur les parties plus fondamentales du programme. Il n'est pourtant pas nécessaire de déborder des frontières du programme pour prétendre aux notes maximales. La première préoccupation doit être d'inspirer toute confiance quant à la solidité des bases, que ce soit par une rédaction efficace et convaincante à l'écrit, par des leçons calibrées et soignées ou une présentation mature à l'épreuve de modélisation.

Le site officiel de l'agrégation externe de mathématiques a été entièrement remanié cette année. Régulièrement mis à jour en fonction de l'actualité du concours, il est toujours accessible à l'adresse agreg.org. Les visiteurs y trouveront des conseils, des liens pertinents, des archives (notamment les sujets d'écrits et leurs corrigés) et des renseignements pratiques concernant les sessions à venir. En particulier, les futurs candidats peuvent trouver sur ce site la `ClefAgreg` qui leur permettra de se familiariser avec l'environnement informatique qu'ils rencontreront pour l'épreuve de modélisation [1]. Cette épreuve, sur texte et où la production d'illustrations informatiques est attendue, est assez spécifique ; s'y préparer suffisamment tôt permet de bien appréhender ses spécificités et aide nécessairement à renforcer les capacités de synthèse sur l'ensemble du programme. De plus, il est aussi possible d'y consulter

1. Précisément, on trouvera à l'URL http://clefagreg.dnsalias.org/8.0/ un guide décrivant de manière détaillée les étapes de construction de cette clef.

une série de vidéos, réalisée par le jury, qui détaille le déroulement des épreuves de leçons et en précise les attentes. Enfin, le jury rappelle qu'une réunion est traditionnellement organisée en début d'année universitaire sous l'égide des sociétés savantes de mathématiques et d'informatique (Société Mathématique de France, Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles, Société Informatique de France) pour évoquer le bilan et les perspectives du concours. Cette réunion est publique, préparateurs et candidats de tous horizons y sont bienvenus.

Chapitre 2

Déroulement du concours et statistiques

2.1 Déroulement du concours

Le concours comprend deux épreuves écrites d'admissibilité — une composition de mathématiques générales et une composition d'analyse-probabilités — et trois épreuves orales d'admission : algèbre et géométrie, analyse et probabilités, modélisation. Les candidats ont le choix parmi quatre options :

— probabilités et statistiques,
— calcul scientifique,
— algèbre et calcul formel,
— informatique

Les trois premières ne diffèrent que par les épreuves de modélisation, alors que les trois épreuves orales de l'option informatique sont spécifiques. En effet, les épreuves d'admission de cette option informatique consistent en une épreuve de leçon de mathématiques (sur des thèmes d'algèbre-géométrie et d'analyse-probabilités), une épreuve de leçon d'informatique et une épreuve de modélisation, sur des sujets propres aux sciences informatiques. Afin de ne pas donner prise à l'élaboration de quelque stratégie fondée sur une analyse biaisée et conjoncturelle, le jury ne souhaite pas communiquer de données sur la répartition des candidats et des lauréats par option. Le choix de l'option n'a aucune d'influence sur la réussite au concours, ni sur le classement et le jury veille scrupuleusement dans l'élaboration du programme, la conception des sujets et la définition de ses attentes à ne privilégier aucune option. Le choix de l'option doit exclusivement être mis en cohérence avec la formation et les goûts des candidats ; chaque option ouvre des champs applicatifs des mathématiques qui trouveront à s'exprimer lors des épreuves et, au-delà, dans le futur métier du professeur agrégé.

Les épreuves écrites de l'agrégation externe de mathématiques 2019 se sont déroulées

- le jeudi 21 mars 2019 pour l'épreuve de mathématiques générales,
- le vendredi 22 mars 2019 pour l'épreuve d'analyse et probabilités.

La liste d'admissibilité a été publiée le jeudi 16 mai 2019. Le concours fait l'objet de conventions internationales qui lient la France, le Maroc et la Tunisie : les sujets d'écrit servent aussi pour l'admissibilité aux agrégations de mathématiques en Tunisie et au Maroc. La délibération du jury d'admissibilité est ainsi menée conjointement avec les présidents des agrégations marocaine et tunisienne. Les barres d'admissibilité pour les étudiants de ces deux pays sont au moins égales à celle de la barre fixée pour le concours français.

Les épreuves d'admission se sont déroulées du mercredi 19 juin au jeudi 4 juillet 2019. La liste d'admission a été publiée le vendredi 5 juillet 2019. Le déroulement et l'organisation d'un concours qui soumet près de 800 candidats admissibles à trois épreuves orales, avec des options variées, une infrastructure informatique complexe, est une mécanique de précision, astreinte de surcroît à des exigences exceptionnelles de rigueur et d'égalité de traitement. Sa réussite repose sur l'engagement des équipes de l'établissement et du rectorat qui en ont la charge. Le personnel du lycée Pasteur, qui a accueilli les épreuves orales, et les équipes du rectorat de l'académie de Lille ont offert au jury et aux candidats des conditions de travail excellentes et ont assuré une organisation performante. Ce rapport adresse à toutes ces équipes les plus chaleureux remerciements du jury et relaie les nombreux messages de reconnaissance exprimés par les candidats pour la qualité et la chaleur de l'accueil qu'ils ont reçus.

Les processus d'acquisition de connaissances, diverses et maîtrisées, qu'implique le programme des épreuves du concours, s'inscrivent dans un temps long, et doivent amener à développer des capacités de synthèse sur cet ensemble. Clarté et rigueur de l'expression sont des qualités indispensables pour des enseignants dont l'échange écrit et oral reste le principal instrument. À ce titre, la capacité à faire preuve de concision constitue incontestablement une qualité qui permet de mieux se mettre en valeur, à l'écrit comme à l'oral. La volonté de comprendre et de faire comprendre doit s'appuyer sur un socle solide de connaissances dont la maîtrise permet aussi de présager la capacité de continuer à apprendre tout au long de la vie professionnelle. À l'écrit, le jury valorise la capacité à synthétiser clairement sa pensée et à se concentrer sur l'essentiel ; les sujets de cette année se sont révélés particulièrement discriminants sur ce point. À l'oral le jury cherche à mettre les candidats dans des conditions d'interrogation leur permettant de donner le meilleur d'eux-mêmes et de tirer le meilleur parti de leurs connaissances. Les épreuves orales ne sont pas conçues comme un exercice de résistance artificielle à un stress organisé. Les questions ou les échanges n'ont pas pour but de piéger ou de surprendre, et ne recherchent pas la mise en difficulté délibérée des candidats. La prestation d'un candidat qui, avec des connaissances modestes mais bien établies, apporte un raisonnement solide, étayé et témoignant d'une implication personnelle sera toujours meilleure que la récitation de concepts mal assimilés et les tentatives hâbleuses aux frontières du programme.

Le concours externe de l'agrégation a pour vocation de recruter des professeurs agrégés destinés à exercer dans l'enseignement secondaire (lycées d'enseignement général et technologique et, exceptionnellement, collèges) ou dans l'enseignement supérieur (universités, instituts universitaires de technologie, grandes écoles, classes préparatoires aux grandes écoles, sections de techniciens supérieurs). Le jury estime donc que le niveau visé devrait permettre au professeur agrégé d'intervenir sereinement et efficacement sur le créneau « bac-3/bac$+3$ » ; cet objectif calibre la conception du programme et les critères d'évaluation.

Le programme et la nature des épreuves, écrites et orales, font l'objet de publications sur le site officiel de ministère de l'Éducation nationale http://www.devenirenseignant.gouv.fr. Le programme, marqué par l'introduction d'un nouveau chapitre « méthodes numériques » pour la session 2018 a peu évolué pour cette session 2019. Le programme 2020, disponible à l'URL http://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agreg_externe/59/7/p2020_agreg_ext_maths_1107597.pdf se borne à préciser des éléments du chapitre « distributions », largement commenté dans les rapports précédents. Le programme, en 2019 et en 2020, fait aussi légèrement évoluer la partie spécifique de l'option informatique.

Le jury veille, bien sûr, à respecter le programme. Des mathématiciens chevronnés estimeront peut être que des résultats « importants » manquent au programme. Il est tout à fait possible que des candidats aient connaissance de ces notions avancées, souhaitent en faire mention et proposer des excursions hors des limites du programme. Le jury saura bien sûr s'adapter et apprécier de telles propositions. Toutefois, elles ne sont absolument pas nécessaires pour prétendre aux notes maximales. Le jury préconise surtout de bien rester à un niveau que l'on maîtrise, une attitude qui sera toujours plus payante que de tenter d'éblouir par des énoncés plus sophistiqués alors que les bases restent friables.

Le jury conseille aux candidats de se préoccuper suffisamment tôt des questions liées à la gestion de leur carrière auxquelles ils seront confrontés en cas de succès au concours. Afin de les guider, l'inspection générale collecte les textes réglementaires relatifs aux différentes situations que les lauréats de l'agrégation externe peuvent rencontrer et édite une note indiquant les recommandations correspondantes http://igmaths.org/spip/spip.php?rubrique17. Le site agreg.org procure des informations complémentaires sur les textes de référence concernant les modalités d'affectation et d'organisation de l'année de stage et sur le statut des doctorants ou des docteurs agrégés qui suscite des questions fréquentes et demande une vigilance particulière.

Tout en étant pleinement conscient des enjeux de couverture des besoins d'enseignement, le jury recommande qu'une attitude positive soit réservée aux demandes de report ou de détachement de jeunes docteurs ou de doctorants en fin de thèse. Des dispositions restrictives, dont la motivation à très court terme peut se comprendre, obèrent les perspectives des doctorants agrégés et sont susceptibles de gravement perturber le fonctionnement et l'attractivité des formations de l'enseignement supérieur en mathématiques, avec des conséquences qui peuvent s'avérer néfastes à plus long terme. Comme la préparation au concours de l'agrégation joue, traditionnellement, un rôle structurant majeur sur l'ensemble de ces formations, on peut craindre un impact négatif sur les parcours conduisant vers la recherche en mathématiques, domaine où le pays excelle au tout meilleur niveau international, tout comme sur l'attractivité du concours.

2.2 Commentaires généraux et statistiques sur la session 2019

2.2.1 Commentaires généraux

La session 2018 avait été marquée par une réduction sensible du nombre de postes susceptibles d'être pourvus par cette voie de concours. Le nombre de postes ouverts en 2019 reste du même ordre de grandeur, avec une très légère augmentation. Le recrutement externe est par ailleurs complété par un concours externe spécial, réservé à des candidats titulaires d'un doctorat. Seize postes étaient ouverts à ce titre. Ce concours indépendant, mais dont les épreuves sont menées concomitamment à celle du concours standard, fait l'objet d'un rapport spécifique.

Année	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Postes ouverts	391	395	457	467	457	381	391
Concours spécial					15	16	16

Cette offre reste confrontée à un marché atone : la faiblesse du nombre de candidats « étudiants », auxquels ce concours devrait prioritairement s'adresser, en affecte la physionomie. Le fait que le nombre d'étudiants soit significativement moindre que le nombre de postes ouverts au concours, sans rien enlever aux mérites et aux qualités des candidats relevant d'autres catégories, ne peut être satisfaisant.

Admissibilité. Le jury a déclaré admissibles 799 candidats à l'issue des deux épreuves d'admissibilité (Mathématiques générales et Analyse-Probabilités). Le premier admissible a une moyenne de 18,25/20 et le dernier une moyenne de 5/20. Ce volume et ce seuil sont semblables à ceux des années passées. Compte tenu de la baisse sensible du nombre d'inscrits et de présents, ils correspondent à un ratio admissibles/postes de l'ordre de 0,5.

Le jury reste fidèle à sa position qui consiste à se donner tous les moyens de pourvoir les postes ouverts au concours, et à offrir l'occasion aux candidats de compenser l'éventuelle faiblesse de leurs résultats à l'écrit par des prestations d'oral convaincantes. En prenant en compte le faible nombre de candidats effectivement présents dans les filières de préparation universitaire et en restant honnête quant au contenu des copies, cette position conduit à adopter une barre d'admissibilité assez basse. La décision de pourvoir les postes s'apprécie ainsi sur l'ensemble du concours et les candidats qui pensent (parfois à tort !) que leurs scores d'écrit sont faibles ne doivent absolument pas se désinvestir, mais doivent au contraire tenter de profiter pleinement de cette possibilité. Plusieurs raisons motivent cette politique ; le jury estime en effet

— qu'elle contribue à la stabilité du concours, notamment elle permet de ne pas démobiliser les volontés dans un contexte qui semble encore très fragile.

— qu'elle permet d'évaluer au mieux le vivier disponible et de répondre efficacement à la mission de pourvoir aux besoins d'enseignants.

— qu'il n'y a pas lieu de refuser aux candidats la chance de faire preuve de leurs qualités techniques et pédagogiques, qui peuvent permettre de remonter un score modeste à l'écrit. Certains candidats parmi les plus mal classés des épreuves écrites tirent profit de cette opportunité : parmi les 200 premiers, une dizaine de candidats avait une moyenne d'écrit inférieure à 8/20 et une bonne quinzaine des reçus avaient une moyenne inférieure à 6,875/20 aux épreuves d'admissibilité.
— qu'elle a caractère formateur, même si ce n'est assurément pas la vocation première du concours. En effet, nombre de candidats (professeurs en exercice, ingénieurs en reconversion professionnelle...) ne bénéficient pas de conditions favorables de préparation au concours. Se confronter aux épreuves orales doit leur permettre de mesurer au mieux les efforts à consentir pour atteindre leurs objectifs, fût-ce en plusieurs fois, et jouer un rôle positif dans leur évolution professionnelle.

Lors des épreuves d'admission, le jury se positionne conformément à ces motivations en cherchant à tout moment à permettre aux candidats de donner le meilleur d'eux-mêmes, de s'exprimer au mieux de ce que permettent leurs connaissances, en évitant par son attitude de renchérir le stress légitime du concours. Si le concours est exigeant et réclame un investissement personnel important, passer les épreuves ne doit pas être pour les candidats une expérience traumatisante. Enfin, l'admissibilité au concours et les examens universitaires relèvent de processus d'évaluation distincts ; il n'est pas surprenant que des Universités, garantes de la qualité de leurs diplômes, n'aient pas jugé opportun de délivrer le M2 à une fraction des candidats admissibles.

La conception des sujets était guidée par la volonté de valoriser les candidats ayant investi dans une préparation sérieuse. On retrouvait donc dans les sujets des questions qu'on pourrait qualifier de « classiques », très certainement proches d'exercices qu'un titulaire de M2 a forcément traités durant sa formation universitaire. Certaines questions du sujet d'Analyse-Probabilités étaient très directement évoquées dans le rapport 2018. La proportion de défection sur certaines questions « élémentaires » est particulièrement étonnante. Les deux sujets, bien que de conceptions très différentes, ont conduit à des prestations qui manifestaient les mêmes traits saillants et qui doivent faire l'objet d'une attention particulière dans les préparations :

— une rédaction et une présentation négligées sur un trop grand nombre de copies. Le jury accorde une attention particulière à la qualité de la rédaction. Un item spécifique du barème valorise cette compétence.
— des raisonnements très fragiles, avec des erreurs de logique grossières (formaliser une contraposée par exemple). Les raisonnements par récurrence sont particulièrement laborieux et trop souvent mal formalisés.
— un grand nombre n'a pas forcément été bloqué par la difficulté technique proprement dite des sujets, mais a plutôt perdu un temps important et beaucoup d'énergie sur des questions préliminaires. Les premières questions qui auraient du jouer le rôle de « mise en jambe » ont ainsi monopolisé les efforts et le temps de candidats qui n'ont plus eu la ressource d'avancer dans les problèmes. Une forte proportion de candidats a manqué tant de méthodes que d'une rédaction efficaces.
— ainsi, cette année, l'analyse des résultats fait ressortir peu de questions discriminantes, marquées par des écarts-types importants ; c'est bien davantage le volume abordé qui a départagé les candidats.

Admission. La procédure de convocation aux épreuves d'admission s'effectue en deux temps. Tout d'abord, les candidats admissibles reçoivent une convocation — dite « convocation administrative »— par courrier. Cette convocation indique les trois jours de passage prévus pour leurs épreuves d'admission, mais n'en précise pas les horaires. Pour connaître les horaires précis d'interrogation, les candidats doivent ensuite se connecter sur le site sécurisé de l'agrégation de mathématiques, en indiquant leur numéro de candidat : cette procédure permet de s'assurer de la volonté de participer aux épreuves et attribue alors les horaires de passage. L'application a été fermée, comme les années passées, la veille du début des oraux. Les candidats qui n'avaient pas ainsi édité leurs horaires devaient, par défaut, se présenter à 6h30 le premier jour de leur convocation sur les lieux du concours, sous peine d'être

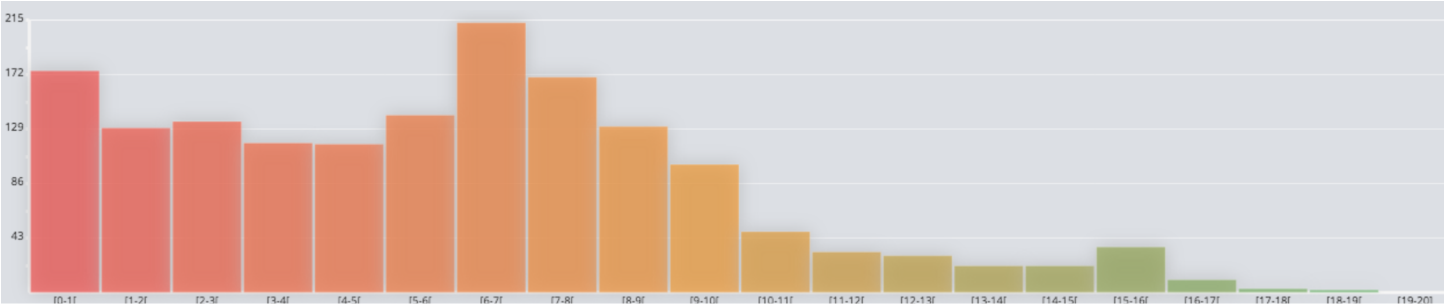


FIGURE 2.1 – Répartition des notes de l'épreuve écrite de mathématiques générales, agrégations France-Maroc-Tunisie

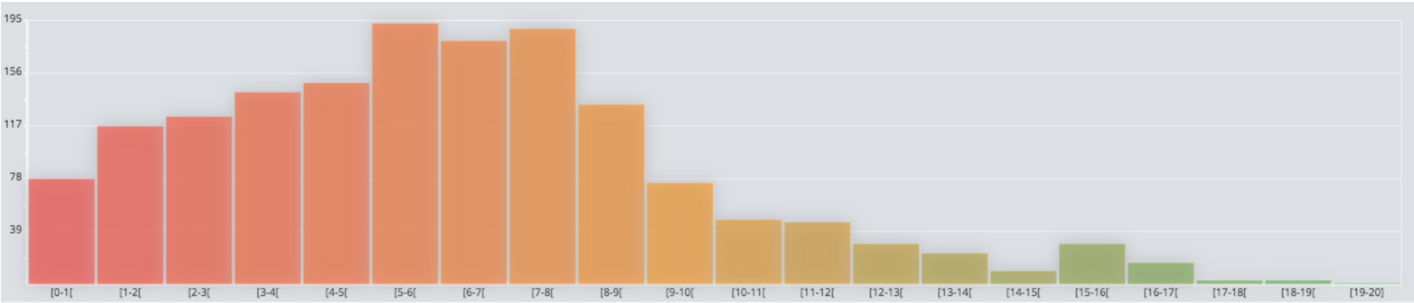


FIGURE 2.2 – Répartition des notes de l'épreuve écrite d'analyse et probabilités, agrégations France-Maroc-Tunisie

déclarés non présents. Cette procédure bien établie sera reconduite pour la session 2020.

Évidemment le jury est vigilant aux risques de fraude. En particulier, tout moyen de communication ou tout support de stockage de données (téléphone, montre connectée, clef USB...) est strictement interdit lors des épreuves, écrites et orales, sous peine d'exclusion du concours. Tous les documents personnels type fiche résumé, plan préparé, notes de cours manuscrites ou dactylographiées, etc. sont aussi prohibés [1].

Lors des passages des candidats, le jury ne dispose d'aucune information particulière : les notes d'écrit, les notes obtenues aux oraux précédents, le statut ou la profession, etc. demeurent inconnus des commissions d'évaluation. Le jury note selon les mêmes critères, avec une grille stricte commune à toutes les commissions, toutes les personnes à partir de leur seule prestation. Des tests statistiques sont faits très régulièrement pour guider l'harmonisation entre les commissions et la présidence du concours veille sur ces indicateurs. En outre, des réunions régulières entre les différentes commissions permettent d'échanger sur la notation et de rester vigilant pour réduire les éventuels écarts dans l'évaluation. Le jury a la volonté d'accueillir les candidats de manière positive et bienveillante et cherche à valoriser toutes les connaissances, le travail de préparation et les aspects positifs des prestations des candidats.

Le jury rappelle que les épreuves d'admission d'un concours ont un caractère public. Ce principe général s'applique évidemment au concours de l'agrégation de mathématiques et les candidats ne peuvent s'opposer à la présence d'auditeurs (ce qui serait quelque peu paradoxal pour des candidats à des fonctions d'enseignant). En moyenne, le concours a accueilli plus de 100 visiteurs par jour. Le jury incite très fortement les futurs candidats et les préparateurs à venir assister aux épreuves et à s'appuyer sur cette expérience pour se préparer au mieux aux épreuves ; c'est un investissement qui ne peut être que payant. Une attitude et une tenue correctes sont exigées des visiteurs. L'accès aux salles

1. Pour les épreuves orales, un dispositif de consigne, aux risques et périls des déposants, est assuré à l'entrée du bâtiment qui héberge les épreuves et permet, pour les candidats comme pour le public, de déposer tout matériel de communication ou de stockage de données. La possession d'un tel matériel peut conduire à l'exclusion du concours ou à l'interdiction d'assister aux épreuves.

d'interrogation peut ne pas être autorisé à un auditeur dont la tenue serait estimée inappropriée ou le comportement susceptible de perturber l'interrogation.

À l'issue des épreuves orales, 308 candidats ont été déclarés admis ; le premier admis a eu une moyenne de 19,2/20, le dernier admis une moyenne de 8,1/20. Ce résultat est la marque de la grande stabilité du concours : la barre d'admission est inchangée depuis 2015 et le nombre de lauréats varie peu depuis la session 2016. Compte tenu du relativement faible nombre de candidats issus des préparations universitaires, le jury se réjouit de cette stabilité, qui ne fait, bien entendu, aucune concession à la qualité des reçus.

Le jury rappelle qu'un concours n'est pas un examen : le but n'est pas de valider des connaissances. Les notes attribuées ne sont pas des jugements de valeur sur les candidats et n'ont aucun caractère « absolu » ; il ne s'agit que de discriminer au mieux une population donnée dans un contexte donné et à un instant donné. Toute la plage de notes de 0 à 20 est utilisée. Il en résulte que des candidats peuvent recevoir des notes très basses ; elles ne sont que le reflet d'une prestation dans ce contexte particulier. Elles n'enlèvent rien à l'estime que le jury porte aux efforts de préparation des candidats, ne préjugent en rien de leurs qualités humaines ou professionnelles. Notamment, pour les nombreux professeurs certifiés qui se présentent courageusement à ce concours difficile, souvent sans bénéficier d'un soutien à la préparation au concours, les notes ne préfigurent rien quant à la qualité de leurs enseignements au quotidien. Le jury est tout à fait conscient des efforts faits pour hausser leur niveau (qu'atteste déjà l'admissibilité) et est persuadé que l'immense majorité d'entre eux mène un excellent travail dans les classes.

Le jury insiste sur le fait qu'il convient de passer toutes les épreuves. Tous les ans, on déplore l'abandon de candidats qui étaient en position d'être reçus. Les sentiments de frustration à l'issue d'une interrogation et la fatigue ne peuvent être négligés. Mais ils ne doivent pas prendre le pas sur l'engagement dans le concours ; le jury encourage les candidats à se présenter aux épreuves suivantes et à s'investir jusqu'au terme du concours. Même en cas d'échec, quelque cuisant qu'il soit, la participation à l'ensemble des épreuves reste une expérience inestimable dans le cadre d'un projet d'insertion, de réorientation ou de progression professionnelle.

Les moyennes et écarts-types des présents à l'oral sur les différentes épreuves sont résumés dans les tableaux ci-dessous :

	Oral Alg-G	Oral Ana-P	Oral Mod	Ecrit MG	Ecrit AP
moyenne	7,05	6,8	6,6	8,5	8,3
écart-type	5,6	5,8	5,4	3	3,1

Moyennes et écarts-types des candidats présents à l'ensemble des épreuves

	Oral Alg-G	Oral Ana-P	Oral Mod	Ecrit MG	Ecrit AP
moyenne	12,4	12,6	11,5	11,1	10,9
écart-type	3,9	4,1	4,1	3	3,1

Moyennes et écarts-types des candidats admis

Ces données offrent l'occasion de rappeler le conseil de ne négliger aucune des épreuves. Les épreuves de leçons et l'épreuve de modélisation mettent en valeur des qualités, techniques et pédagogiques, différentes. L'épreuve de modélisation, avec un temps d'exposé « libre » conséquent, donne beaucoup d'autonomie au candidat. Elle requiert des capacités de synthèse importantes puisque les textes font appel à des notions présentes dans l'ensemble du programme et mettent les énoncés « en situation ». De plus, il est souvent valorisant de savoir illustrer sur ordinateur un propos mathématique et des candidats en tirent parti pour produire des prestations originales et scientifiquement profondes. Mais, cette compétence ne s'improvise pas ; elle réclame un minimum de préparation en amont du concours, qui est rapidement payant. De manière générale, les épreuves orales demandent une certaine pratique et la manifestation d'un certain recul scientifique, qui ne peuvent résulter que d'un travail préparatoire de fond. Il semble au jury que l'assimilation entre les épreuves d'admissibilité et les épreuves orales de cette pratique et de ce recul est illusoire ; il est sûrement profitable de s'exercer au concours dans son ensemble tout au long de l'année, une partie des exercices proposés à l'écrit se rapprochant d'ailleurs de questions posées à l'oral et le recul gagné dans la préparation à l'oral ne pouvant être que bénéfique aux prestations écrites.

On résume dans le tableau ci-dessous l'évolution des barres d'admission depuis 2008 :

Année	Nombre de postes attribués	Barre d'admission (/20)
2019	308	8,1
2018	315	8,1
2017	305	8,1
2016	304	8,1
2015	274	8,1
2014	275	8,48
2013	323	7,95
2012	308	8,1
2011	288	9,33
2010	263	9,8
2009	252	10,15
2008	252	10,1

Le recrutement de professeurs agrégés de mathématiques obéit à des critères de qualités scientifiques et pédagogiques, afin que les personnels recrutés soient en mesure de répondre efficacement aux missions actuellement données aux agrégés qui sont de pouvoir exercer sur l'ensemble du créneau « bac−3/bac+3 ». Pour cette session, le minimum requis correspond à un score total de 162/400. Il correspond à la barre retenue sur les cinq dernières années, avec un nombre de reçus tout à fait comparable. Cette stabilité du concours est encourageante et montre, avec les très bonnes prestations de la tête du concours, le maintien du niveau des formations universitaires. Le tableau suivant donne une indication sur la répartition des notes. On observera aussi que 200 candidats ont une moyenne supérieure ou égale à 10/20, une donnée à mettre en regard des conclusions des sessions 2008 et 2009 où les 252 admis avaient franchi cette note moyenne.

Rang	Moyenne
1	19,2
1-10	19,2–17,05
10-50	17,05–14,75
50-100	14,75–12,7
100-200	12,7–10

Réussir le concours de l'agrégation externe requiert un minimum de préparation et cette stabilité repose d'abord sur l'engagement et la qualité des formations universitaires. L'impossibilité de pourvoir les postes témoigne de l'insuffisance patente et préoccupante d'une population étudiante souhaitant s'orienter vers l'enseignement des mathématiques, puisqu'on compte seulement 250 candidats environ issus des préparations universitaires. Cette faiblesse du vivier résulte de la combinaison d'une réduction des effectifs inscrits en L3 de mathématiques, et de la diversification des débouchés des études universitaires en mathématiques, qui dépassent largement le seul emploi académique puisque trois diplômés d'un Master en mathématiques sur quatre travaillent dans le secteur privé (Source : Étude de l'impact socio-économique des mathématiques en France, étude menée en 2015 par CMI).

Dans cette configuration particulière, le concours externe peut offrir une réelle opportunité de promotion pour des professeurs certifiés. Déplorer la faiblesse du vivier de candidats étudiants n'empêche pas le jury d'être particulièrement respectueux des efforts des enseignants en poste dans le secondaire qui se confrontent à ce concours. Ils forment de très loin la catégorie la plus importante parmi les inscrits et représentent 30% des admissibles environ. On note toutefois une baisse sensible du nombre de certifiés inscrits et présents à l'écrit par rapport à 2017 (environ 160 et 60 candidats de moins, respectivement). Il est possible que cette baisse soit imputable à la suppression du statut de « bi-admissible », statut qui marquait la reconnaissance d'efforts de formation, récompensait une progression manifeste du niveau des connaissances et des compétences et qui pouvait constituer une motivation pour un certain nombre d'entre eux. Le jury n'a nul doute que l'immense majorité de ces certifiés est certainement constituée d'excellents enseignants de mathématiques, même si les résultats obtenus à ce concours leur semblent parfois ne pas être à la hauteur de leur investissement. Il est clair pour le jury que l'on ne peut pas être admissible et se présenter aux épreuves orales de ce concours sans avoir acquis des compétences techniques qui dépassent largement celles de la pratique professionnelle de l'enseignant certifié. Cependant, le niveau d'exigence technique du concours leur laisse le concours difficile d'accès. Le jury souhaite accueillir chaleureusement ces collègues méritants et, même si les résultats sont en-deçà de leurs espoirs, leur renouvelle tous ses encouragements. Le volume de près de 1500 enseignants inscrits à un concours aussi exigeant est significatif d'une réelle volonté de progression, qui mériterait d'être soutenue par un nombre accru de congés formation.

Depuis quelques années, le jury annonce à l'avance les leçons qui seront proposées aux candidats lors de la session à venir. Ainsi on trouvera en annexe de ce présent rapport la liste des leçons pour la session 2020. Cette pratique s'inscrit dans la logique d'aider les candidats à bien se préparer et à ne leur tendre aucun piège. Il convient par ailleurs de couper court à toute stratégie qui se baserait sur un pronostic très hasardeux des méthodes de couplages des sujets que le jury adopte. Tous les couplages sont *a priori* possibles et le jury veille scrupuleusement à ce que l'apparition des intitulés de leçons soit équiprobable dans l'ensemble des sujets proposés. En modélisation, la conception et la sélection des textes proposés rend tout aussi hasardeuse toute stratégie d'impasse sur une partie du programme des options.

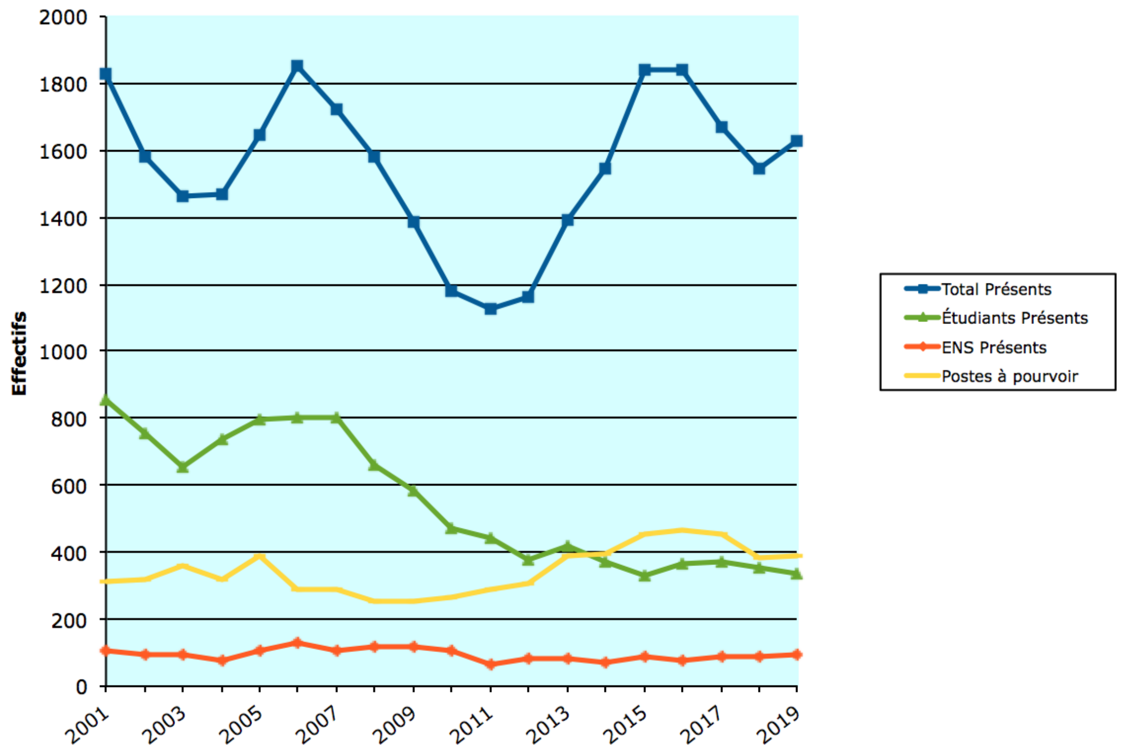
2.2.2 Données statistiques diverses

Les tableaux et graphiques suivants présentent un bilan statistique du concours, selon le statut des candidats, leur diplôme, leur genre, leur origine géographique, leur âge. Ces statistiques portent sur les candidats qui peuvent être admis au concours et n'incluent pas les étudiants marocains et tunisiens.

Effectifs détaillés. On observe un tassement sensible du nombre des inscrits qui passe sous la barre des 3000. De manière plus positive, le nombre de présents à l'écrit reste stable, tout comme le nombre d'étudiants et celui des candidats normaliens. Le jury rappelle son attachement à la justification historique commune aux Écoles Normales Supérieures, et le contrat implicite de leurs élèves qui était, en contrepartie de leur statut privilégié et de leur rémunération, de passer l'agrégation (source : Rapport public de la Cour des comptes 2012). Leur participation contribue au rôle structurant du concours sur les formations universitaires en mathématiques et à l'excellence de la discipline au niveau international. Le jury souhaite donc que les responsables d'études des Écoles Normales Supérieures restent conscients de ces enjeux et encouragent les élèves à se préparer et à passer le concours.

Année	Total Inscrits	Total Présents	Étudiants Présents	ENS Présents	Postes à pourvoir	Présents par poste
2001	**2663**	**1828**	857	105	310	**5,9**
2002	**2343**	**1584**	753	95	320	**5,0**
2003	**2217**	**1463**	657	93	360	**4,1**
2004	**2333**	**1470**	735	76	321	**4,6**
2005	**2560**	**1644**	795	105	388	**4,2**
2006	**2849**	**1853**	800	129	290	**6,4**
2007	**2801**	**1722**	800	106	290	**5,9**
2008	**2491**	**1579**	659	119	252	**6,3**
2009	**2351**	**1384**	585	116	252	**5,5**
2010	**2332**	**1177**	474	106	263	**4,5**
2011	**2500**	**1124**	445	62	288	**3,9**
2012	**2673**	**1163**	379	82	308	**3,8**
2013	**2673**	**1393**	420	81	391	**3,6**
2014	**3001**	**1546**	371	72	395	**3,9**
2015	**3252**	**1841**	328	89	457	**4,0**
2016	**3525**	**1841**	364	78	467	**3,9**
2017	**3582**	**1668**	374	86	457	**3,6**
2018	**3285**	**1545**	352	89	381	**4,1**
2019	**2787**	**1628**	339	92	391	**4,2**

Évolution du nombre de présents aux deux épreuves d'écrit



Courbes de l'évolution des effectifs

Professions et Diplômes.

Profession	Inscrit	Compose	Admissible	Oral	Admis
CERTIFIE	1252	592	228	137	9
ETUD.HORS ESPE (PREPA MO.UNIV)	339	309	275	265	160
SANS EMPLOI	218	75	50	36	16
CADRES SECT PRIVE CONV COLLECT	140	32	16	11	3
ENS.STAGIAIRE 2E DEG. COL/LYC	125	46	22	17	2
CONTRACTUEL 2ND DEGRE	106	29	9	7	1
ELEVE D'UNE ENS	92	84	84	84	82
ETUD.HORS ESPE (SANS PREPA)	80	43	33	25	14
PLP	61	22	4	3	
SALARIES SECTEUR TERTIAIRE	52	10	5	4	1
PERS ENSEIG TIT FONCT PUBLIQUE	35	10	3	1	1
ETUDIANT EN ESPE EN 1ERE ANNEE	29	12	6	4	2
ETUDIANT EN ESPE EN 2EME ANNEE	27	13	6	5	3
PROFESSIONS LIBERALES	26	8	5	2	2
SALARIES SECTEUR INDUSTRIEL	25	6	4	4	3
MAITRE CONTR.ET AGREE REM TIT	24	9	6	4	
FORMATEURS DANS SECTEUR PRIVE	22	7	4	3	
AGREGE	21	7	6	5	2
PROFESSEUR ECOLES	19	4	2	2	
PROFESSEUR ASSOCIE 2ND DEGRE	16	5	1	1	
PERS FONCTION PUBLIQUE	16	6	3	3	1
ENSEIGNANT DU SUPERIEUR	15	5	2	2	
VACATAIRE ENSEIGNANT DU SUP.	15	3	2	2	1
MAITRE AUXILIAIRE	12	3	1	1	1
ETUD.HORS ESPE (PREPA CNED)	12	9	8	7	1
VACATAIRE DU 2ND DEGRE	9	3	1	1	1
AG NON TITULAIRE FONCT PUBLIQ	8	1	1		
CONTRACT ENSEIGNANT SUPERIEUR	8	4	3	1	1
PERS ENSEIG NON TIT FONCT PUB	7	2	1		
FONCT STAGIAIRE FONCT PUBLIQUE	7	2	2	2	1
ENSEIG NON TIT ETAB SCOL.ETR	5	1	1	1	
ARTISANS / COMMERCANTS	5	1	1	1	
ASSISTANT D'EDUCATION	5	3	2	2	
ETUD.HORS ESPE (PREPA PRIVEE)	4				
MILITAIRE	3	2	1		
PERS ADM ET TECH MEN	2				
PERS FONCT HOSPITAL	2	1	1	1	
PROF DES ECOLES STAGIAIRE	2				
INSTITUTEUR	2				
VACATAIRE APPRENTISSAGE (CFA)	1				
MAITRE CONTR.ET AGREE REM MA	1				
AGRICULTEURS	1				
PERSONNEL DE DIRECTION	1				
ADJOINT D'ENSEIGNEMENT	1				
COP STAGIAIRE EN CENTRE DE FOR	1				
PEGC	1				

Résultat du concours par catégories professionnelles[2]

Outre la présence massive d'enseignants certifiés, déjà évoquée, on remarque l'attractivité du concours auprès de titulaires d'un diplôme d'ingénieur. Cette donnée confirme les observations du concours docteurs, et un phénomène qui s'inscrit tant dans le cadre de projets de reconversion professionelle, que d'une orientation en fin de formation.

Diplome	Inscrit	Compose	Admissible	Oral	Admis
MASTER	1364	761	496	444	257
ENSEIGNANT TITUL-ANCIEN TITUL CAT A	457	210	92	47	5
DIPLOME D'INGENIEUR (BAC+5)	436	169	86	61	20
DOCTORAT	209	67	37	29	7
DIP POSTSECONDAIRE 5 ANS OU +	107	45	24	15	
DIPLOME GRANDE ECOLE (BAC+5)	103	47	31	27	14
DISP.TITRE 3 ENFANTS	70	24	9	3	
GRADE MASTER	68	31	19	15	5
ADMIS ECH.REM.CERTIFIE PLP PEPS	27	10	4	2	
DIPLOME CLASSE NIVEAU I	12	4	1	1	
CPE TITULAIRE - ANCIEN TITULAIRE	2	1			

Diplômes des candidats hors étudiants tunisiens et marocains

Répartition selon le genre. Les enjeux de parité font partie des préoccupations du jury, qui comprend 48% de femmes, bien au delà des taux observés dans les différents corps dont sont issus les membres du jury. La correction des épreuves écrites se fait de manière totalement dématérialisée et le jury ne dispose d'absolument aucune information sur les candidats : il n'a accès au moment de l'admissibilité qu'aux copies repérées par un numéro. Il est donc difficile d'imaginer quelle mesure pourrait permettre d'identifier et corriger un éventuel biais, pour autant qu'il y en ait un dans cette étape du concours. À l'oral, des processus de veille sont mis en place et le jury est en permanence vigilant sur ses pratiques afin de ne pas introduire de biais dans l'évaluation.

Néanmoins, la répartition hommes/femmes reste déséquilibrée, suivant des proportions extrêmement stables au cours des années. À chaque étape du concours, la proportion de femmes décroît : 29,5% des inscrits, 29% des présents, les femmes ne représentent plus que 25% des admissibles et 22% des candidats ayant dépassé la barre d'admission. Cette année, on ne trouve qu'une seule femme parmi les 20 premiers,

2. Les catégories professionnelles et les catégories par diplômes listées correspondent aux déclarations des candidats lors de l'inscription : elles ne font l'objet d'aucune vérification et doivent être considérées avec prudence.

et seulement 6 parmi les 50 premiers. Le taux de réussite à l'oral est de 51% pour les hommes, 44% pour les femmes, là aussi des proportions proches de celles des dernières sessions. Une analyse plus fine révèle deux effets notables. D'une part, si on ne tient pas compte des candidats normaliens, parmi lesquels la population masculine est sur-représentée, les taux de réussite des hommes et des femmes deviennent respectivement de 42 % et 41 %, des proportions plus équilibrées donc. D'autre part, on observe une légère sur-représentation (comparativement à leur part dans la population totale des admissibles) des femmes parmi les candidats admissibles qui sont certifiés : elles représentent 32 % de cette population. Parmi les 9 certifiés déclarés admis, on ne trouve cependant aucune femme.

Sexe	Inscrit	Compose	Admissible	Oral	Admis
M.	2015	974	599	488	240
MME	840	395	200	156	68

Répartition selon le genre

Répartition selon l'âge. Le tableau de répartition des candidats suivant l'âge indique que l'essentiel des admis agrégation externe se regroupe dans la tranche 22-25 ans.

Age	Inscrit	Compose	Admissible	Oral	Admis
21	3	3	3	3	3
22	44	44	42	41	29
23	202	185	168	163	124
24	161	120	99	96	56
25	126	85	61	54	26
26	112	58	33	26	14
27	113	59	25	21	8
28	111	47	24	20	7
29	106	43	21	14	7
30	100	43	25	18	9
31	85	21	6	4	2
32	88	26	8	5	1
33	93	35	15	13	5
34	80	26	9	6	2
35	67	20	4	3	
36	78	30	15	9	1
37	86	31	20	15	1
38	69	25	11	8	
39	77	34	14	9	
40	78	33	15	10	
41	82	34	21	11	1
42	81	31	15	8	
43	82	37	19	10	1
44	55	22	6	4	1
45	76	32	16	8	3
46	81	37	14	7	
47	55	29	13	7	
48	43	17	8	6	2
49	52	17	6	4	1
50	59	22	9	7	1
51	43	15	10	5	
52	46	19	7	6	1
53	30	11	4	1	
54	30	12	6	3	
55	35	20	8	6	
56	28	8	4	4	1
57	29	10	6	4	
58	11	5	1	1	
59	12	5	2	1	
60	13	6	3	2	1
61	11	6	2	1	
62	8	2			
63	6	3			
64	2	1	1		
65	4				
66	1				
67	1				

Tableau de répartition des candidats en fonction de l'âge

Répartition selon l'académie. Le tableau de répartition des candidats par académie montre une forte concentration sur les centres Paris-Créteil-Versailles, Rennes et Lyon. Hormis ces sièges d'Écoles Normales Supérieures, on relèvera le très bon taux de réussite (admis/admissibles) de l'académie de Besançon, qui d'ailleurs se distingue ainsi très régulièrement depuis plusieurs années.

Academie	Inscrit	Compose	Admissible	Oral	Admis
CRETEIL-PARIS-VERSAIL.	851	383	226	191	101
LYON	161	86	65	56	40
LILLE	142	78	38	27	8
AIX-MARSEILLE	127	61	32	27	10
TOULOUSE	117	68	45	28	9
RENNES	116	75	56	50	39
NICE	105	41	21	17	5
NANTES	97	40	23	20	10
POITIERS	95	24	12	8	1
MONTPELLIER	92	48	23	13	5
GRENOBLE	87	49	33	27	16
STRASBOURG	82	45	29	23	8
ORLEANS-TOURS	79	40	26	21	6
ROUEN	79	37	14	8	2
AMIENS	75	28	12	9	2
BORDEAUX	74	33	24	20	8
LA REUNION	70	21	9	4	
NANCY-METZ	67	31	23	18	9
DIJON	48	26	16	13	6
CAEN	42	23	15	12	5
REIMS	42	26	18	18	4
CLERMONT-FERRAND	40	28	11	8	2
BESANCON	34	23	16	16	12
GUADELOUPE	31	8			
MARTINIQUE	23	8	4	3	
LIMOGES	19	12	1	1	
GUYANE	16	6			
POLYNESIE FRANCAISE	16	7	4	4	
CORSE	10	3	2	1	
NOUVELLE CALEDONIE	9	7	1	1	
MAYOTTE	9	4			

Répartition par académie

Les sociétés savantes collectent des informations sur les volumes horaires consacrés aux préparations selon les universités ; ces données révèlent de très grandes disparités (en rapport avec le nombre d'étudiants et le nombre d'options préparées), avec un nombre d'heures annuelles consacrées à la préparation au concours qui varie de 300 à plus de 1200 ! À ces différences de volume horaire s'ajoute la faiblesse des effectifs présents dans certaines préparations, alors que l'émulation et le travail en groupe jouent souvent un rôle important dans le succès des formations. À cet égard, l'incorporation dans les préparations de candidats du concours spécial réservé aux docteurs, qui ont en général une plus grande maturité scientifique, peut être un stimulant efficace.

Les préparations doivent étudier l'évolution sur plusieurs années de leur taux de réussite au concours, certains résultats pouvant être purement conjoncturels. La mise au point d'un programme de préparation est un processus dynamique, exigeant, qui se fait en lien étroit avec l'élaboration des maquettes des formations et qui réclame de suivre les évolutions du concours. Le jury rappelle aussi aux candidats comme aux préparateurs que les épreuves orales sont publiques et que venir assister à des interrogations permet certainement de mieux appréhender les attendus et les difficultés des épreuves.

Chapitre 3

Épreuve écrite de mathématiques générales

Le sujet est disponible à l'URL http://www.devenirenseignant.gouv.fr/cid137747/sujets-rapports-des-jurys-agregation-2019.html ou sur le site agreg.org.

3.1 Commentaires sur l'épreuve écrite de mathématiques générales

Rétrospective historique

Le grand théorème de FERMAT s'énonce ainsi en termes modernes : si n est un entier naturel supérieur ou égal à 3, il n'existe pas de solutions entières non triviales à l'équation

$$x^n + y^n = z^n.$$

Cet énoncé apparaît dans une lettre de FERMAT publiée en 1670. On voit facilement que si le théorème est prouvé pour un entier n, il l'est aussi pour tous les multiples de n, donc il suffit d'examiner le cas où n est premier impair, et le cas où $n = 4$. GAUSS, après EULER, s'est intéressé au cas $n = 3$ en travaillant dans l'anneau $\mathbf{Z}[j]$ où $j = e^{2i\pi/3}$. La factorialité de cet anneau est un point crucial de la preuve. D'une manière générale, pour un nombre premier p et des entiers x, y et z, l'écriture

$$x^p + y^p = \prod_{k=0}^{p-1}(x + \zeta_p^k y) = z^p \tag{3.1}$$

où $\zeta_p = e^{2i\pi/p}$ suggère de travailler dans l'anneau $\mathbf{Z}[\zeta_p]$. Cependant, à la différence du cas $p = 3$, cet anneau n'est en général pas factoriel ($p = 23$ étant le plus petit nombre premier pour lequel $\mathbf{Z}[\zeta_p]$ n'est pas factoriel). KUMMER s'en est rendu compte dans les années 1840 et a été conduit à introduire la notion de « nombre idéal », ancêtre de la notion moderne d'idéal. En réécrivant l'égalité (3.1) en termes d'idéaux :

$$\prod_{k=0}^{p-1}\langle x + \zeta_p^k y\rangle = \langle z^p\rangle,$$

et en démontrant que les idéaux $\langle x+\zeta_p^k y\rangle$ sont premiers entre eux, le fait que l'anneau des entiers d'un corps de nombres est un anneau de DEDEKIND assure que les idéaux $\langle x + \zeta_p^k y\rangle$ sont de la forme I_k^p, puissances p-ièmes d'idéaux. Lorsque p est un nombre premier *régulier*, c'est-à-dire tels que p ne divise pas le nombre de classes du corps cyclotomique $\mathbf{Q}(\zeta_p)$, alors les idéaux I_k sont principaux, ce qui, en connaisant la structure des unités de l'anneau $\mathbf{Z}[\zeta_p]$, permet de conclure.

KUMMER démontre ainsi le théorème de FERMAT pour les nombres premiers réguliers en 1847. On ne sait toujours pas s'il y a une infinité de tels nombres premiers. Pour (beaucoup) plus de détails sur les aspects historiques, voir [F1].

Description du sujet

— La première partie du sujet établit quelques points techniques utiles pour la suite du problème : la division euclidienne dans $\mathbf{Z}[X]$ par un polynôme unitaire ; le fait que l'anneau $\mathbf{Z}[j]$ est euclidien donc factoriel ; l'irréductibilité du p-ième polynôme cyclotomique et le résultat suivant sur le polynômes : si $Q \in A[X]$ où A un sous-anneau de $\mathbf{C}$ et si $P \in A[X]$ dont on note $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les racines complexes, le polynôme $\prod_{k=1}^{n}(X - Q(\alpha_k))$ est dans $A[X]$.

— Dans la deuxième partie, on démontre des résultats classiques sur les nombres algébriques et on établit que l'ensemble des entiers algébriques de $\mathbf{C}$ est un sous-anneau.

— Dans la troisième partie, on démontre que l'anneau des entiers du corps cyclotomique $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ est $\mathbf{Z}[\zeta_p]$ et on détermine la structure des unités de $\mathbf{Z}[\zeta_p]$.

— Dans la quatrième partie, on démontre le théorème de FERMAT pour $p = 3$ par un argument de descente et en utilisant la factorialité de $\mathbf{Z}[j]$.

— Dans la cinquième et dernière partie, on démontre le résultat de FERMAT pour les premiers p réguliers (dans le cas $p \nmid xyz$) en admettant le fait que l'anneau des entiers d'un corps de nombres est un anneau de DEDEKIND.

Pour plus de détails, on consultera avec profit [F2] dont le sujet est largement inspiré.

Bibliographie

[F1] P. RIBENBOIM, *13 Lectures on* FERMAT*'s Last Theorem*, Springer, 1979.

[F2] I.N. STEWART, D.O. TALL, *Algebraic Number Theory*, Chapman and Hall, 1979.

Commentaires généraux sur les copies

Dans l'immense majorité des copies, seules les deux premières parties ont été abordées. Les meilleures copies ont avancé dans la partie 3, sans toutefois traiter significativement les parties 4 ou 5.

La présentation et l'orthographe laissent trop souvent à désirer. On rappelle également qu'il est inutile et contre-productif de recopier les énoncés des questions avant de les traiter. Les candidats devraient tout particulièrement soigner la rédaction de la première partie. Certains rares candidats ont sauté les premières parties pour tenter de traiter des questions isolées de la quatrième partie, une stratégie qui n'est pas recommandée. Au contraire, il était important dans ce sujet de traiter aussi intégralement que possible la première partie. Sur les premières questions du sujet, le jury attend une rédaction exemplaire. On rappelle notamment qu'expliquer et justifier, en particulier par des références claires et explicites à des théorèmes ou/et des questions correctement identifiées, est une qualité utile aux futurs enseignants.

Il était nécessaire, tout au long du sujet, de préciser les ensembles dans lesquels on prenait les objets : « soit P un polynôme » ne dit pas si $P \in \mathbf{C}[X]$, $\mathbf{Q}[X]$ ou $\mathbf{Z}[X]$ par exemple. Les variables introduites doivent être quantifiées ; les correcteurs ont noté certaines confusions inquiétantes dans les objets manipulés : polynôme et évaluation d'un polynôme, polynôme et polynôme de matrice, polynôme de matrice et vecteur, etc.

Commentaires détaillés sur certaines questions

I.1 : cette question a posé beaucoup de difficulté, donnant lieu à des rédactions souvent longues et maladroites. Pour l'hérédité, il était peu pertinent d'écrire $A = a_0 + XC$, la logique de l'algorithme de division euclidienne veut qu'on compense directement le terme de plus haut degré.

I.2(a) : le caractère minimal du polynôme $X^2 + X + 1$ est fréquemment oublié.

I.2(b) : quelques copies invoquent un passage au quotient, qui ne peut prouver l'égalité demandée.

I.2(c) : de nombreux candidats se lancent dans une étude laborieuse du signe de a^2+b^2-ab, alors même que le module suffisait pour la positivité. Trop de candidats ignorent la mise sous forme canonique d'un trinôme, et de ce fait échouent dans la résolution de $a^2+b^2-ab=1$. Il ne fallait pas omettre en fin de question la vérification que les 6 éléments trouvés étaient effectivement des inversibles de $\mathbf{Z}[j]$.

I.2(d) : très peu de copies ont produit un dessin permettant de visualiser l'élément q du réseau $\mathbf{Z}[j]$ recherché, et on peut penser que c'est ce qui a empêché beaucoup de trouver le bon candidat pour l'élément q.

I.3 : des candidats confondent $\mathbf{U}_n$ et μ_n^* et pensent donc pouvoir identifier Φ_n et X^n-1.

I.3(a) : très peu de copies donnent des arguments précis pour cette question : la structure du groupe des racines n-ièmes de l'unité semble très mal maîtrisée. La multiplicité des racines n'est presque jamais évoquée par les candidats qui prouvent l'égalité des polynômes en montrant qu'ils ont les mêmes racines.

I.3(b) : certains candidats prennent pour acquis que $\Phi_n \in \mathbf{Q}[X]$ alors que la définition ne donne que $\Phi_n \in \mathbf{C}[X]$.

I.3(c)ii) dans de nombreuses copies, on se contente de montrer que $P(1)$ *ou* $Q(1)$ sont des entiers multiples de p.

I.4(a) et (b) : les arguments de liberté/base sont essentiels et ne sauraient être masqués par une écriture matricielle abusive (c'est-à-dire sans avoir mentionné la base) des vecteurs.

I.4(e) : bien qu'immédiate avec la question précédente, cette question a été peu réussie. Des candidats ont produit des raisonnements utilisant les polynômes symétriques élémentaires, ce qui pouvait aboutir à condition de bien rédiger.

II.1(a) le complémentaire d'une partie infinie de $\mathbf{N}$ peut être infini. Il ne suffit donc pas de montrer qu'il y a une infinité d'entiers n tels que $\varphi(n) > d$. Par ailleurs, la distinction entre racine n-ième de l'unité et racine *primitive* n-ième de l'unité n'est pas toujours faite par les candidats.

II.1.(b) : des passages en force en citant la question précédente mais sans donner d'arguments.

II.2(a) : cette question était une question de cours, et aurait dû être mieux réussie. Des candidats utilisent directement que $\mathbf{Q}[\alpha]$ (souvent confondu avec $\mathbf{Q}(\alpha)$) est un corps, ce qu'il fallait montrer ici.

II.2(b) : peu de candidats ont justifié que π_α n'admettait que des racines simples dans $\mathbf{C}$. À l'exception des toutes meilleures copies, la *construction* des morphismes σ_k n'est jamais faite.

II.3(a) : bien qu'élémentaire, cette question a rarement été réussie.

II.3(b) : des confusions entre θ et α. Certains candidats veulent appliquer ce qu'ils savent pour α à θ ; ils pensent notamment que les $\sigma_k(\theta)$ sont encore les d racines distinctes de π_θ (ce qui simplifie le 3.c).

II.5(a) : beaucoup de candidats parlent de « combinaison linéaire » en oubliant de préciser que les coefficients sont dans $\mathbf{Z}$.

II.6 : la stabilité par somme et différence est souvent oubliée.

III.1 et III.2 : ces questions étaient faciles mais n'ont pas été souvent traitées.

3.2 Corrigé de l'épreuve écrite de mathématiques générales

Exercices préliminaires

1. On écrit $B = X^m + \sum_{k=0}^{m-1} b_k X^k$ où les b_k sont entiers. Soit H_n l'énoncé : pour tout polynôme $A \in \mathbf{Z}[X]$ de degré inférieur strictement à n, il existe $Q, R \in \mathbf{Z}[X]$ tels que $A = BQ + R$ et $\deg R < m$.

   On montre le résultat par récurrence sur n. L'énoncé H_m est vrai, il suffit de poser $Q = 0$ et $R = A$. Soit $n \geqslant m$ et on suppose H_n. On montre H_{n+1}. Soit $A \in \mathbf{Z}[X]$ de degré strictement inférieur à $n+1$. On note $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et on pose $A_1 = A - a_n X^{n-m} B$. Alors on a $A_1 \in \mathbf{Z}[X]$ et $\deg A_1 \leqslant n-1$ donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à A_1. Il existe $Q_1, R_1 \in \mathbf{Z}[X]$ tels que $A_1 = BQ_1 + R_1$ avec $\deg R_1 < m$. En posant $Q = Q_1 + a_n X^{n-m}$, on a alors $A = BQ + R_1$, avec $Q \in \mathbf{Z}[X]$ et $\deg R_1 < m$ ce qui prouve H_{n+1}. D'après le principe de récurrence, pour tout $n \geqslant m$, H_n est vraie, ce qui conclut.

2. (a) On a $j^2 + j + 1 = 0$, donc j est algébrique et son polynôme minimal divise $X^2 + X + 1$ dans $\mathbf{Q}[X]$. Le polynôme $X^2 + X + 1$ étant unitaire et irréductible dans $\mathbf{Q}$ (il est de degré 2 et n'a pas de racines rationnelles), c'est le polynôme minimal de j.

   (b) L'inclusion $\{a + bj,\ (a,b) \in \mathbf{Z}^2\} \subseteq \mathbf{Z}[j]$ est immédiate. Réciproquement, soit $P(j)$ avec $P \in \mathbf{Z}[X]$ un élément de $\mathbf{Z}[j]$. Le polynôme $X^2 + X + 1$ étant unitaire, d'après la question 1, on peut effectuer la division euclidienne de P par $X^2 + X + 1$ dans $\mathbf{Z}[X]$: il existe $Q, R \in \mathbf{Z}[X]$ avec $\deg R \leqslant 1$ tels que $P = (X^2 + X + 1)Q + R$. En évaluant en j, il vient $P(j) = R(j)$ donc $P(j)$ est de la forme $a + bj$ avec $a, b \in \mathbf{Z}$.

   (c) Tout d'abord, on remarque que la fonction $z \mapsto \mathrm{N}(z) = |z|^2$ est à valeurs positives et multiplicative : pour tout $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, $\mathrm{N}(z_1 z_2) = |z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2 = \mathrm{N}(z_1)\,\mathrm{N}(z_2)$.
   Soit $z = a + bj \in \mathbf{Z}[j]$; $\mathrm{N}(z) = (a + bj)(a + b\bar{j}) = a^2 + b^2|j|^2 + ab(j + \bar{j}) = a^2 + b^2 - ab \in \mathbf{Z}$. Par ailleurs, $\mathrm{N}(z)$ est un réel positif, donc $\mathrm{N}(z) \in \mathbf{N}$.
   Soit $z = a + bj \in \mathbf{Z}[j]$ un élément inversible ; il existe $z' \in \mathbf{Z}[j]$ tel que $zz' = 1$. En appliquant N qui est multiplicatif, il vient $\mathrm{N}(z)\,\mathrm{N}(z') = 1$. Ainsi, $\mathrm{N}(z)$ est un entier positif inversible, c'est-à-dire $\mathrm{N}(z) = 1$. On a donc $\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 = 1$. Ceci force $|b| \leqslant 1$. Si $b = 0$, alors $|a| = 1$, donc $z = \pm 1$. Si $b = 1$, alors $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, donc $a = 0$ ou $a = 1$, c'est-à-dire $z = j$ ou $z = 1 + j$. Si $b = -1$, alors $\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, donc $a = 0$ ou $a = -1$, c'est-à-dire $z = -j$ ou $z = -1 - j$. Réciproquement, on vérifie que chacun des éléments $\pm 1, \pm j$ et $\pm(1 + j)$ est bien inversible (l'inverse étant donné par le conjugué qui est un élément de $\mathbf{Z}[j]$).

   (d) En multipliant par $\bar{y}$ le numérateur et le dénominateur de $\frac{x}{y}$, on montre que $\frac{x}{y} \in \mathbf{Q}(j)$. On note $\frac{x}{y} = s + tj$ avec $s, t \in \mathbf{Q}$. Soit a l'entier relatif le plus proche de s, de sorte que $|s - a| \leqslant \frac{1}{2}$ et b l'entier relatif le plus proche de t. On pose $q = a + bj \in \mathbf{Z}[j]$. On a

$$\mathrm{N}\left(\frac{x}{y} - q\right) = \left(s - a - \frac{t-b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(t-b)^2 \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} < 1.$$

   Comme N est multiplicatif et que $\mathrm{N}(y) > 0$, on a $\mathrm{N}(x - qy) < \mathrm{N}(y)$. Ainsi, en posant $r = x - qy \in \mathbf{Z}[j]$, on peut écrire $x = qy + r$ avec $\mathrm{N}(r) < \mathrm{N}(y)$; on dispose donc d'une division euclidienne dans $\mathbf{Z}[j]$, et cet anneau étant intègre car inclus dans $\mathbf{C}$, c'est un anneau euclidien.

3. (a) Le groupe $\mathbf{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité est l'union disjointe des groupes μ_d^* pour d divisant n (en effet, si $z \in \mathbf{U}_n$, en notant d l'ordre de z, on a $z \in \mu_d^*$; réciproquement, si $z \in \mu_d^*$ pour un d divisant n, alors z est une racine n-ième de l'unité. Enfin, l'union est disjointe par unicité de l'ordre d'un élément dans un groupe).
   On a donc $\prod_{\mu \in \mathbf{U}_n} (X - \mu) = \prod_{d|n} \prod_{\mu \in \mu_d^*} (X - \mu)$, soit $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$.

   (b) On prouve le résultat par récurrence forte sur n. Pour $n = 1$, on a $\Phi_1 = X - 1 \in \mathbf{Z}[X]$. On suppose le résultat vrai pour tout entier $d < n$ et on montre que $\Phi_n(X) \in \mathbf{Z}[X]$. Par hypothèse, le polynôme $P = \prod_{d|n, d \neq n} \Phi_d(X)$ est élément de $\mathbf{Z}[X]$. On a la relation $X^n - 1 = \Phi_n(X)P(X)$ et par ailleurs, la division euclidienne de $X^n - 1$ par P dans $\mathbf{Z}[X]$ (possible parce que P est unitaire, voir q1 de cette partie) s'écrit $X^n - 1 = PQ + R$ avec $Q, R \in \mathbf{Z}[X]$ et $\deg R < \deg P$. On en déduit la relation $R(X) = P(X)(\Phi_n(X) - Q(X))$, qui implique $\Phi_n = Q$, sinon $\deg R \geqslant \deg P$. Finalement, $\Phi_n \in \mathbf{Z}[X]$.

(c) i. Le binôme de NEWTON donne

$$(X-1)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} X^k = X^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} X^k + (-1)^p.$$

Or, pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, on a $p \mid \binom{p}{k}$; en effet, $k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}$ donc p divise $k\binom{p}{k}$ et comme p est premier avec k, p divise $\binom{p}{k}$. On en déduit que $\widehat{\pi}(X^p - 1) = (X-1)^p$ puisque $(-1)^p = -1 \pmod p$ (y compris pour $p = 2$).

ii. En appliquant le morphisme d'anneaux $\widehat{\pi}$, on obtient l'égalité $(X - 1_{\mathbf{F}_p})^p = \widehat{\pi}(P)\widehat{\pi}(Q)$ dans l'anneau factoriel $\mathbf{F}_p[X]$. Comme $p \geqslant 2$, et que $\widehat{\pi}(P)$ et $\widehat{\pi}(Q)$ sont non constants (P et Q sont unitaires, donc $\widehat{\pi}(P)$ et $\widehat{\pi}(Q)$ ont même degré que P et Q respectivement), $X - 1_{\mathbf{F}_p}$ divise $\widehat{\pi}(P)$ et $\widehat{\pi}(Q)$, ce qui entraîne que $P(1) = 0 \pmod p$ et $Q(1) = 0 \pmod p$.

iii. On suppose par l'absurde que Φ_p n'est pas irréductible dans $\mathbf{Z}[X]$. Il existe donc deux polynômes unitaires non constants P et Q de $\mathbf{Z}[X]$ tels que $\Phi_p = PQ$. En multipliant par $X - 1$, on obtient que $X^p - 1 = (X-1)PQ$ et d'après la question précédente appliquée à $(X-1)P$ et Q, on a que $Q(1) = 0 \pmod p$. De même, on a aussi $P(1) = 0 \pmod p$. Or $\Phi_p(1) = p$ et $P(1)Q(1)$ est un multiple de p^2, ce qui est absurde.

On a montré que Φ_p est irréductible sur $\mathbf{Z}$; il est donc aussi irréductible sur $\mathbf{Q}$ d'après le lemme de GAUSS rappelé dans l'introduction du sujet. En effet, si $\Phi_p = PQ$ avec $P, Q \in \mathbf{Q}[X]$ non constants, il existe $r \in \mathbf{Q}^*$ tel que $rP \in \mathbf{Z}[X]$ et $\frac{1}{r}Q \in \mathbf{Z}[X]$, si bien que l'on peut écrire $\Phi_p = (rP)\left(\frac{1}{r}Q\right)$ comme produit de polynômes non constants de $\mathbf{Z}[X]$, ce qui est absurde.

iv. Le polynôme Φ_p est unitaire, irréductible sur $\mathbf{Q}$, et annulateur de ζ. C'est donc le polynôme minimal de ζ et le degré de l'extension $\mathbf{Q}(\zeta)/\mathbf{Q}$ est le degré de Φ_p, c'est-à-dire $p - 1$.

4. (a) Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\mathrm{C}_P^k e_1 = \mathrm{C}_P e_k = e_{k+1}$. Soit $Q = \sum_{k=0}^{n-1} q_k X^k \in \mathbf{C}[X]$ non nul et de degré inférieur ou égal à $n-1$; on a $Q(\mathrm{C}_p)e_1 = \sum_{k=0}^{n-1} q_k e_{k+1}$. Ce vecteur est non nul, sinon, par liberté de la famille $\mathcal{E}$, on aurait pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $q_k = 0$ si bien que Q serait le polynôme nul.

Aucun polynôme non nul de $\mathbf{C}_{n-1}[X]$ n'est annulateur de C_p, donc le degré du polynôme minimal de C_P est supérieur ou égal à n. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, ce degré est inférieur ou égal à n, il est donc exactement égal à n.

(b) On a $\mathrm{C}_P^n e_1 = \mathrm{C}_P e_n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k e_{k+1}$. On obtient donc que

$$P(\mathrm{C}_P)e_1 = \mathrm{C}_P^n e_1 + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{C}_P^k e_1 = \mathrm{C}_P e_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k e_{k+1} = 0.$$

Ensuite, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, on a, en faisant commuter C_P et $P(\mathrm{C}_P)$ (qui est un polynôme en C_P) :

$$P(\mathrm{C}_P)e_i = P(\mathrm{C}_P)\mathrm{C}_P^{i-1}e_1 = \mathrm{C}_P^{i-1}P(\mathrm{C}_P)e_1 = 0.$$

On conclut que $P(\mathrm{C}_P) = 0$. Le polynôme P est annulateur de C_P, unitaire et de degré n, c'est donc son polynôme minimal d'après la question précédente.

(c) Le polynôme caractéristique de C_P est unitaire, de degré n et annulateur de C_P. Il est donc ici égal au polynôme minimal de C_P, c'est-à-dire égal à P.

(d) On suppose dans un premier temps que M est triangulaire ; ses valeurs propres α_i comptées avec multiplicité sont donc ses éléments diagonaux. La matrice $Q(M)$ est encore triangulaire, avec les $Q(\alpha_i)$ comme éléments diagonaux. On en déduit que $\chi_{Q(M)} = \prod_{i=1}^{n}(X - Q(\alpha_i))$. Dans le cas général, on trigonalise M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$: il existe T, matrice triangulaire avec les α_i comme éléments diagonaux, semblable à M. Les matrices $Q(M)$ et $Q(T)$ sont encore semblables, donc ont le même polynôme caractéristique, ce qui donne $\chi_{Q(M)} = \chi_{Q(T)} = \prod_{i=1}^{n}(X - Q(\alpha_i))$.

(e) D'après la question précédente, $\prod_{i=1}^{n}(X - Q(\alpha_i))$ est le polynôme caractéristique de $Q(M)$, où M est la matrice compagnon du polynôme P. Or $Q(M) \in \mathcal{M}_n(A)$, donc $\chi_{Q(M)} \in A[X]$.

Nombres algébriques

1. (a) Soit $d \in \mathbf{N}^*$. Soit n un entier tel que $\varphi(n) \leqslant d$, dont on note $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{m_i}$ sa décomposition en facteurs premiers. On a $\varphi(n) = \prod_{i=1}^{r}(p_i - 1)p_i^{m_i - 1}$. Nécessairement, les p_i vérifient $p_i \leqslant d + 1$, sinon $p_i - 1 > d$ et $\varphi(n) > d$. Il n'existe donc qu'un nombre fini de diviseurs premiers possibles pour un tel entier n. On continue de les noter $p_1 < \ldots < p_r$. Par ailleurs, pour tout i, $p_i^{m_i - 1} \leqslant \varphi(n) \leqslant d$, donc $m_i \leqslant 1 + \frac{\ln d}{\ln p_i} \leqslant 1 + \frac{\ln d}{\ln 2}$, donc les m_i sont aussi en nombre fini. On conclut qu'il n'y a qu'un nombre fini d'entiers n tels que $\varphi(n) \leqslant d$.

   (b) Par l'absurde, on suppose que $\mathbf{K}$ contient une infinité de racines de l'unité. Alors il y a une infinité d'entiers n tels que $\mathbf{K}$ contienne une racine de l'unité d'ordre n, ce qui fait que l'ensemble S des racines *primitives* de l'unité contenues dans $\mathbf{K}$ est également infini. On note d le degré de l'extension de corps $\mathbf{K}/\mathbf{Q}$. Une racine primitive n-ième de l'unité μ_n est de degré $\varphi(n)$ sur $\mathbf{Q}$ parce que son polynôme minimal est le n-ième polynôme cyclotomique. Pour tout $n \in S$, L' inclusion de corps $\mathbf{Q}(\mu_n) \subseteq \mathbf{K}$ entraîne que $\varphi(n) \leqslant d$, et comme S est infini, cela contredit le résultat de la question précédente.

2. (a) Si π_α n'est pas irréductible dans $\mathbf{Q}$, on peut écrire $\pi_\alpha = PQ$ où P et Q sont de degré au moins 1. Donc l'un de ces polynômes est annulateur de α et de degré strictement inférieur à $\deg \pi_\alpha$, ce qui est absurde.

   Le corps $\mathbf{Q}(\alpha)$ est l'ensemble des $P(\alpha)$ avec $P \in \mathbf{Q}[X]$. On note $n = \deg \pi_\alpha$; par division euclidienne de tout polynôme P par π_α, on obtient que la famille $(1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1})$ est génératrice du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{Q}(\alpha)$. De plus, cette famille est libre, sinon il existerait un polynôme non nul annulateur de α et de degré strictement inférieur à n, ce qui contredirait la minimalité de π_α. Finalement, $(1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1})$ est une base de $\mathbf{Q}(\alpha)$, donc $n = d = [\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}]$.

   (b) Soit $\sigma : \mathbf{K} \to \mathbf{C}$ un morphisme de $\mathbf{Q}$-algèbres ; on a $\pi_\alpha(\sigma(\alpha)) = \sigma(\pi_\alpha(\alpha)) = \sigma(0) = 0$, donc $\sigma(\alpha)$ est une racine de π_α. Un tel morphisme de $\mathbf{Q}$-algèbres est entièrement déterminé par l'image de α, qui est l'une des racines complexes de π_α. Or le polynôme π_α admet d racines distinctes dans $\mathbf{C}$ (en effet, il est irréductible sur $\mathbf{Q}$, donc π_α et π'_α sont premiers entre eux dans $\mathbf{Q}[X]$, donc aussi dans $\mathbf{C}[X]$, ce qui entraîne que toutes les racines dans $\mathbf{C}$ de π_α sont simples). Il y a donc au plus d tels morphismes, qu'il reste à construire.

   La construction du morphisme d'algèbres σ_k tel que $\sigma_k(\alpha) = \alpha_k$ peut se faire *via* les isomorphismes de corps $\mathbf{Q}(\alpha) \cong \mathbf{Q}[X]/(\pi_\alpha) \cong \mathbf{Q}(\alpha_k)$, ou alors plus élémentairement : on définit, pour tout élément $\theta = \sum_{i=0}^{d-1} a_i \alpha^i \in \mathbf{Q}(\alpha)$ (l'écriture étant unique) $\sigma_k(\theta) = \sum_{i=0}^{d-1} a_i \alpha_k^i$. Le fait que σ_k laisse $\mathbf{Q}$ invariant et est un morphisme additif est immédiat. On vérifie le caractère multiplicatif : soit $\theta_1 = P_1(\alpha)$ et $\theta_2 = P_2(\alpha)$ deux éléments de $\mathbf{Q}(\alpha)$, où P_1 et P_2 sont deux polynômes de $\mathbf{Q}_{d-1}[X]$. Soit $P_1 P_2 = Q\pi_\alpha + R$ la division euclidienne de $P_1 P_2$ par π_α. On a $\sigma_k(\theta_1\theta_2) = \sigma_k(P_1 P_2(\alpha)) = \sigma_k(R(\alpha)) = R(\alpha_k)$. Par ailleurs, $\sigma_k(\theta_1)\sigma_k(\theta_2) = P_1(\alpha_k)P_2(\alpha_k)$, aussi égal à $R(\alpha_k)$. L'application σ_k est bien un morphisme de $\mathbf{Q}$-algèbres.

3. (a) L'extension $\mathbf{Q}(\theta)/\mathbf{Q}$ est de degré fini puisque $\mathbf{Q}(\theta) \subseteq \mathbf{K}$. Donc l'élément θ est algébrique sur $\mathbf{Q}$.

   (b) On note, pour $1 \leqslant k \leqslant d$, $\alpha_k = \sigma_k(\alpha)$. Comme $\theta \in \mathbf{Q}(\alpha)$, il existe $P \in \mathbf{Q}[X]$ tel que $\theta = P(\alpha)$. On a alors pour tout $1 \leqslant k \leqslant d$, $\sigma_k(\theta) = \sigma_k(P(\alpha)) = P(\sigma_k(\alpha)) = P(\alpha_k)$, et en appliquant la question 4(e) de la partie 1, on conclut que $P_\theta \in \mathbf{Q}[X]$.

(c) On note d'abord que θ est une racine de P_θ puisque l'un des σ_k (celui qui envoie α sur α) est l'identité. Il s'ensuit que π_θ divise P_θ, et comme π_θ est irréductible, on peut écrire $P_\theta = \pi_\theta^m Q$ avec $m \in \mathbf{N}^*$ et $Q(\theta) \neq 0$ dans l'anneau factoriel $\mathbf{Q}[X]$.

Il s'agit à présent de montrer que le polynôme Q est constant, comme P_θ et π_θ sont unitaires, on aura $Q = 1$. Si Q n'est pas constant, il admet une racine qui ne peut être que l'un des $\sigma_k(\theta)$. Or $\sigma_k(\theta) = \sigma_k(P(\alpha)) = P(\sigma_k(\alpha)) = P(\alpha_k)$. Il s'en suit que α_k est racine du polynôme $Q \circ P \in \mathbf{Q}[X]$. Donc α est également racine de $Q \circ P$ puisque les α_k sont conjugués. Ainsi, $\theta = P(\alpha)$ est racine de Q, ce qui entraîne que π_θ divise Q, contradictoire avec l'hypothèse.

4. Soit α un nombre algébrique. Si le polynôme minimal de α est à coefficients entiers, α est bien un entier algébrique.

Réciproquement, on suppose que α soit un entier algébrique. Il existe un polynôme $P \in \mathbf{Z}[X]$ unitaire qui annule α. On a donc $\pi_\alpha \mid P$ dans $\mathbf{Q}[X]$. On écrit $P = \pi_\alpha Q$. D'après le lemme de Gauss, il existe $r \in \mathbf{Q}^*$ tel que $r\pi_\alpha \in \mathbf{Z}[X]$ et $\frac{1}{r}Q \in \mathbf{Z}[X]$. En considérant les coefficients dominants, du fait que P et π_α sont unitaires, on obtient que $r \in \mathbf{Z}$, puis que $r = \pm 1$. On conclut que $\pi_\alpha \in \mathbf{Z}[X]$.

5. (a) Si α est un entier algébrique, et si d est le degré de son polynôme minimal, alors en effectuant la division euclidienne de X^n par π_α dans $\mathbf{Z}[X]$ (cf. I.1), on obtient que pour tout $n \in \mathbf{N}$, α^n est une combinaison linéaire à coefficients entiers des $1, \alpha, \dots, \alpha^{d-1}$, qui est donc une partie génératrice finie du groupe G engendré par les puissances de α.

(b) Réciproquement, on suppose que le groupe G engendré par les puissances de α est de type fini. On note $(g_1, \dots, g_n)$ une partie génératrice de ce groupe. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha g_i \in G$, donc il existe des entiers $a_{ij} \in \mathbf{Z}$ tels que

$$\alpha g_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_j,$$

ce qui se réécrit en un système

$$\begin{cases} (a_{1,1} - \alpha) g_1 + a_{1,2} g_2 + \cdots + a_{1,n} g_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n,1} g_1 + \cdots + a_{n,n-1} g_{n-1} + (a_{n,n} - \alpha) g_n = 0 \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est nul puisqu'il existe une solution non triviale $(g_1, \dots, g_n)$. Ce déterminant est de la forme $\det(A - \alpha I_n)$ avec $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$, et χ_A est un polynôme unitaire de $\mathbf{Z}[X]$ qui annule α.

6. On a évidemment $1 \in \mathfrak{O}_{\mathbf{C}}$; soit $\alpha, \beta \in \mathfrak{O}_{\mathbf{C}}$. Il s'agit de vérifier que $\alpha - \beta$ et $\alpha\beta$ sont encore dans $\mathfrak{O}_{\mathbf{C}}$. Pour cela, on utilise la caractérisation des entiers algébriques de la question précédente. Soit (g_i) une famille génératrice finie du groupe engendré par les puissances de α, et (g'_j) une famille génératrice finie du groupe engendré par les puissances de β. Les puissances de $\alpha - \beta$ et de $\alpha\beta$ sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers des $\alpha^i \beta^j$, donc des combinaisons linéaires à coefficients entiers des $g_i g'_j$. Le groupe engendré par les puissances de $\alpha - \beta$ et celui engendré par les puissances de $\alpha\beta$ sont donc contenus dans celui engendré par les $g_i g'_j$, ce qui prouve qu'ils sont de type fini.

7. L'inclusion $\mathbf{Z} \subseteq \mathfrak{O}_{\mathbf{C}} \cap \mathbf{Q}$ est claire. Réciproquement, soit $\alpha \in \mathfrak{O}_{\mathbf{C}} \cap \mathbf{Q}$. Le polynôme minimal de α (sur $\mathbf{Q}$) est donc $X - \alpha$. On conclut avec II.4 que $\alpha \in \mathbf{Z}$.

$\mathbf{Q}(\zeta)$ et $\mathbf{Z}[\zeta]$

1. (a) Un tel $\mathbf{Q}$-morphisme σ_k est entièrement déterminé par l'image de ζ (cf. II 2(b)). Or ζ s'envoie sur l'un de ses conjugués, c'est-à-dire l'un des ζ^k, $1 \leqslant k \leqslant p-1$, puisque le polynôme minimal de ζ est $\Phi_p = \prod_{k=1}^{p-1} (X - \zeta^k)$.

(b) i. $\mathrm{N}(\zeta)$ est le coefficient constant de Φ_p, donc $\mathrm{N}(\zeta) = 1$ et $\mathrm{Tr}(\zeta)$ est l'opposé du coefficient en X^{p-2}, à savoir -1.

ii. $\mathrm{N}(1-\zeta) = \prod_{k=1}^{p-1}(1-\zeta^k) = \Phi_p(1) = p$. De même,

$$\mathrm{N}(1+\zeta) = \prod_{k=1}^{p-1}(1+\zeta^k) = \prod_{k=1}^{p-1}(-1-\zeta^k) = \Phi_p(-1) = 1.$$

2. Soit $\theta \in \mathbf{Z}[\zeta]$. Il existe donc $P \in \mathbf{Z}[X]$ tel que $\theta = P(\zeta)$ et on conclut avec II.6 que $\theta \in \mathfrak{O}_{\mathbf{C}} \cap \mathbf{K} = \mathfrak{O}_{\mathbf{K}}$.

3. On établit deux résultats préalables, qui seront utiles dans la suite de cette partie : pour tout $z \in \mathbf{Z}[\zeta]$, on a $\mathrm{N}(z) \in \mathbf{Z}$. En effet, si $z \in \mathbf{Z}[\zeta]$, d'après la question précédente, z est un entier algébrique ; d'après II.4, son polynôme minimal est à coefficients entiers et en utilisant II.3(c), on obtient que le polynôme $\prod_{k=1}^{p-1}(X - \sigma_k(z))$ est à coefficients entiers, donc $\mathrm{N}(z)$, qui est le coefficient constant de ce polynôme, est un entier. De même pour $\mathrm{Tr}(z)$.

Le deuxième résultat est la multiplicativité de la norme N : elle découle immédiatement du fait que les σ_k sont des morphismes multiplicatifs.

(a) On a $\mathrm{N}(z) \in \mathbf{Z}$. Si z est inversible, il existe $z' \in \mathbf{Z}[\zeta]$ tel que $zz' = 1$ et en passant à la norme, on trouve que $\mathrm{N}(z)$ est inversible dans $\mathbf{Z}$, donc $\mathrm{N}(z) = \pm 1$. Réciproquement, si $\mathrm{N}(z) = \pm 1$, on a $\prod_{k=1}^{p-1}\sigma_k(z) = \pm 1$, où chaque $\sigma_k(z)$ est dans $\mathbf{Z}[\zeta]$, et l'un des morphismes σ_k est l'identité, donc z est inversible dans $\mathbf{Z}[\zeta]$.

(b) Soit $x, y \in \mathbf{Z}[\zeta]$ tels que $z = xy$. En passant à la norme, il vient $\mathrm{N}(z) = \mathrm{N}(x)\,\mathrm{N}(y)$; or $\mathrm{N}(z)$ est un nombre premier, donc $\mathrm{N}(x) = \pm 1$ ou $\mathrm{N}(y) = \pm 1$, c'est-à-dire x ou y est inversible.

4. (a) Comme l'extension $\mathbf{K}/\mathbf{Q}$ est de degré $p-1$ sur $\mathbf{Q}$, on déduit de II.1(b) que G est un ensemble fini.

L'ensemble G est clairement un sous-groupe de $\mathbf{U}_n$, le groupe des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbf{C}$; il est donc cyclique.

(b) L'ensemble $\{\pm\zeta^k,\ 0 \leqslant k \leqslant p-1\}$ est un sous-groupe de G de cardinal $2p$ (ses éléments sont bien 2 à 2 distincts, car si $\zeta^k = -\zeta^\ell$, alors -1 est dans le groupe engendré par ζ, ce qui est absurde puisque -1 est d'ordre 2 et le groupe engendré par ζ est d'ordre p impair), donc d'après le théorème de Lagrange, $2p \mid n$. On a $\mathbf{Q}(\omega) \subseteq K = \mathbf{Q}(\zeta)$ et comme ζ est une racine de l'unité de $\mathbf{K}$, il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $\zeta = \omega^k$ donc $\mathbf{Q}(\zeta) \subseteq \mathbf{Q}(\omega)$. Finalement $\mathbf{Q}(\omega) = \mathbf{Q}(\zeta)$.

(c) L' élément ω étant une racine primitive n-ième de l'unité, l'extension de corps $\mathbf{Q}(\omega)/\mathbf{Q}$ est de degré $\varphi(n)$. On en déduit avec la question précédente que $\varphi(n) = p-1$. En écrivant $n = 2p \times m$, on montre que nécessairement $m = 1$ pour avoir $\varphi(n) = p-1$. En effet, si $m > 1$ est premier avec $2p$, alors $\varphi(n) = (p-1)\varphi(m) > p-1$, et si $2 \mid m$ ou $p \mid m$, on aboutit également à $\varphi(n) > p-1$.

En définitive, $n = 2p$ donc il y a exactement $2p$ racines de l'unité dans $\mathbf{K}$ qui sont les $\pm\zeta^k$ avec $k \in \{0, \dots, p-1\}$.

5. (a) Soit $x \in \langle\lambda\rangle \cap \mathbf{Z}$. Alors d'une part $\mathrm{N}(x) = x^{p-1}$ puisque $x \in \mathbf{Z}$, et d'autre part, d'après III.1(b), $p = \mathrm{N}(\lambda) \mid \mathrm{N}(x)$ puisque N est multiplicatif. On en déduit que $p \mid x$, c'est-à-dire $x \in p\mathbf{Z}$. Réciproquement, on a $p\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Z}$ et $p\mathbf{Z} \subseteq \langle\lambda\rangle$ (car $p = \lambda\prod_{k=2}^{p-1}(1-\zeta^k)$) donc $p\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Z} \cap \langle\lambda\rangle$.

(b) Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$; alors k est inversible dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, donc il existe $k' \in \mathbf{Z}$ tel que $kk' = 1 \pmod p$. On écrit alors

$$\frac{1-\zeta}{1-\zeta^k} = \frac{1-(\zeta^k)^{k'}}{1-\zeta^k} = 1 + \zeta^k + \cdots + (\zeta^k)^{k'-1} \in \mathbf{Z}[\zeta].$$

On a aussi $\frac{1-\zeta^k}{1-\zeta} = 1 + \zeta + \cdots + \zeta^{k-1} \in \mathbf{Z}[\zeta]$. Ainsi, $\frac{1-\zeta}{1-\zeta^k} \in \mathbf{Z}[\zeta]^\times$.
On rappelle que $p = (1-\zeta)(1-\zeta^2)\cdots(1-\zeta^{p-1})$. Pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, on peut écrire $1-\zeta = \frac{1-\zeta}{1-\zeta^k}(1-\zeta^k)$, donc $1-\zeta \sim 1-\zeta^k$. Il s'ensuit que $\langle p\rangle = \langle (1-\zeta)^{p-1}\rangle = \langle \lambda^{p-1}\rangle$.

(c) Le morphisme ψ est surjectif comme composée de $\mathbf{Z}[X] \to \mathbf{Z}[\zeta]$ et $\mathbf{Z}[\zeta] \to \mathbf{Z}[\zeta]/\langle\lambda\rangle$ qui sont surjectifs. Son image est donc $\mathbf{Z}[\zeta]/\langle\lambda\rangle$.
Soit $P \in \mathbf{Z}[X]$. On a $P \in \ker\psi$ si et seulement si $P(\zeta) = 0 \pmod{\langle\lambda\rangle}$. On montre que ceci équivaut à $P(1) = 0 \pmod{p\mathbf{Z}}$.
Si $P(\zeta) = 0 \pmod{\langle\lambda\rangle}$, alors $P(1) = 0 \pmod{\langle\lambda\rangle}$ puisque $\zeta = 1 \pmod{\langle\lambda\rangle}$. En passant à la norme, on obtient $P(1)^{p-1} = 0 \pmod{p\mathbf{Z}}$ (en se rappelant que $\mathrm{N}(\lambda) = p$), donc $P(1) = 0 \pmod{p\mathbf{Z}}$.
Réciproquement, si $P(1) = 0 \pmod{p\mathbf{Z}}$, on a *a fortiori* $P(1) = 0 \pmod{\langle\lambda\rangle}$ car $p \in \langle\lambda\rangle$, et donc $P(\zeta) = 0 \pmod{\langle\lambda\rangle}$ puisque $\zeta = 1 \pmod{\langle\lambda\rangle}$.

(d) D'après le premier théorème d'isomorphisme, l'anneau $\mathbf{Z}[\zeta]/\langle\lambda\rangle$ est isomorphe à $\mathbf{Z}[X]/\ker\psi$. Ce dernier anneau est isomorphe à $\mathbf{F}_p$ en appliquant le même théorème d'isomorphisme à $\mathbf{Z}[X] \to \mathbf{F}_p$, $P \mapsto P(1) \pmod{p\mathbf{Z}}$.

(e) Comme l'anneau quotient $\mathbf{Z}[\zeta]/\langle\lambda\rangle$ est un corps, l'idéal $\langle\lambda\rangle$ est maximal, en particulier premier.

6. (a) i. On a pour tout $1 \leqslant k \leqslant d$, $|a_k| = \left|\sum_{I \in \mathcal{P}_{d-k}(\{1,\ldots,d\})} \prod_{i\in I} \alpha_i\right|$, où $\mathcal{P}_{d-k}(\{1,\ldots,d\})$ est l'ensemble des parties à $d-k$ éléments de $\{1,\ldots,d\}$. Le cardinal de cet ensemble étant égal à $\binom{d}{d-k} = \binom{d}{k}$, on conclut par inégalité triangulaire que $|a_k| \leqslant \binom{d}{k}$.
Un entier algébrique α de degré d dont tous les conjugués sont de module 1 a un polynôme minimal $P \in \mathbf{Z}[X]$ unitaire dont les coefficients sont bornés par $M = \max_{0\leqslant k\leqslant d}\binom{d}{k}$. Il n'y a qu'un nombre fini d'entiers qui vérifient cette propriété, donc il n'y a qu'un nombre fini de tels polynômes et par suite, un nombre fini de tels entiers algébriques.

ii. On fixe $k \in [\![1, d]\!]$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, le polynôme $P_n = \prod_{i=1}^d (X - \alpha_i^n)$ est dans $\mathbf{Z}[X]$ d'après I.4(e). De plus, P_n est unitaire, de degré d et ses racines sont de module 1. On en déduit que α_k^n est algébrique de degré inférieur ou égal à d et que ses conjugués (qui sont parmi les α_i^n) sont de module 1. D'après la question précédente, il y a un nombre fini d'entiers algébriques de degré d, donc aussi un nombre fini d'entiers algébriques de degré inférieur ou égal à d. La famille $(\alpha_k^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc finie, ce qui entraîne l'existence de deux entiers n et m avec $n \neq m$ tels que $\alpha_k^n = \alpha_k^m$. On conclut que α_k est une racine de l'unité.

(b) Soit $P \in \mathbf{Z}[X]$ tel que $u = P(\zeta)$. Les conjugués de u sont les $\sigma_k(u)$, où σ_k est le $\mathbf{Q}$-morphisme de $\mathbf{Q}(\zeta)$ dans $\mathbf{C}$ défini par $\sigma_k(\zeta) = \zeta^k$. On a donc $\sigma_k(u) = P(\zeta^k) = u_k$. De plus, u étant une unité, on a $\mathrm{N}(u) = \pm 1 = \prod_{k=1}^{p-1} u_k$, ce qui montre que les u_k sont des unités.

(c) Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$; $u_{p-k} = P(\zeta^{p-k}) = P(\zeta^{-k})$. Sachant que $\overline{\zeta} = \zeta^{-1}$, on a $u_{p-k} = P(\overline{\zeta}^k) = \overline{P(\zeta^k)} = \overline{u_k}$. Donc $\frac{u_k}{u_{p-k}}$ est de module 1. L'élément $\frac{u_1}{u_{p-1}}$ fait partie du groupe $\mathbf{Z}[\zeta]^\times$, c'est en particulier un entier algébrique. Ses conjugués sont les

$$\sigma_k\left(\frac{u_1}{u_{p-1}}\right) = \frac{\sigma_k(u)}{\sigma_k(u_{p-1})} = \frac{u_k}{P(\sigma_k(\zeta^{-1}))} = \frac{u_k}{P(\zeta^{p-k})} = \frac{u_k}{u_{p-k}}.$$

(d) D'après la question 6(a)ii, $\frac{u}{u_{p-1}}$ est une racine de l'unité de $\mathbf{K}$. On en déduit avec III.4 qu'il existe $m \in \mathbf{Z}$ tel que $\frac{u}{u_{p-1}} = \pm\zeta^m$.

(e) i. Il existe des entiers $a_0, \ldots, a_{p-2}$ tels que $\theta = \sum_{k=0}^{p-2} a_k \zeta^k$. Or pour tout k, $\zeta^k = 1 \pmod{\langle\lambda\rangle}$ puisque $\zeta = 1 \pmod{\langle\lambda\rangle}$. On en déduit que $\theta = \sum_{k=0}^{p-2} a_k \pmod{\langle\lambda\rangle}$ et en posant $a = \sum_{k=0}^{p-2} a_k \in \mathbf{Z}$, on a bien $\theta = a \pmod{\langle\lambda\rangle}$.

Soit $\theta \in \mathbf{Z}[\zeta]$ et $\sigma_k(\theta)$ l'un de ses conjugués ; en notant $\theta = \sum_{i=0}^{p-2} a_i\zeta^i$, on a $\sigma_k(\theta) = \sum_{i=0}^{p-2} a_i\zeta^{ik}$, donc θ et $\sigma_k(\theta)$ sont congrus tous les deux à $a = \sum_{i=0}^{p-2} a_i$ modulo $\langle\lambda\rangle$.

ii. On suppose que $u = -u_{p-1}\zeta^m$. On aurait alors $u = -u_{p-1} \pmod{\langle\lambda\rangle}$ et aussi $u = u_{p-1} \pmod{\langle\lambda\rangle}$ d'après la question précédente, d'où $2u = 0 \pmod{\langle\lambda\rangle}$. On a démontré que l'idéal $\langle\lambda\rangle$ est premier, donc on a soit $2 \in \langle\lambda\rangle$, soit $u \in \langle\lambda\rangle$. Si l'on avait $2 \in \langle\lambda\rangle$, en prenant la norme on obtiendrait $p \mid 2$, ce qui est absurde. On a donc nécessairement $u \in \langle\lambda\rangle$. Or u est une unité donc $\mathrm{N}(u) = \pm 1$ et en prenant une nouvelle fois la norme, on aurait $p \mid 1$, ce qui est absurde. En définitive, on a $u = +u_{p-1}\zeta^m$.

(f) Si m est pair, l'existence de r est immédiate, et si m est impair, $m+p$ est pair, d'où l'existence de r dans ce cas. Le fait que ϵ est une unité découle immédiatement de la structure de groupe multiplicatif de $\mathbf{Z}[\zeta]^\times$.

De plus,

$$\overline{\epsilon} = \zeta^r\overline{u} = \zeta^r u_{p-1} = \zeta^r\zeta^{-m}u = \zeta^r\zeta^{-2r}u = \zeta^{-r}u = \epsilon,$$

donc $\epsilon \in \mathbf{R}$.

Réciproquement, tout élément de la forme $\zeta^r\epsilon$ est bien inversible donc on a bien la structure voulue pour $\mathbf{Z}[\zeta]^\times$.

7. (a) Le raisonnement est le même qu'en III.3 : θ est un entier algébrique, donc son polynôme minimal est à coefficients entiers, et comme $P_\theta = \prod_{k=1}^{p-1}(X - \sigma_k(\theta))$ est une puissance de π_θ, la norme et la trace de θ sont des entiers.

(b) i. Soit $0 \leqslant k \leqslant p-2$; par linéarité de la trace, et en utilisant que pour tout $i \in \{1, \dots, p-2\}$, $\mathrm{Tr}(\zeta^i) = \mathrm{Tr}(\zeta) = -1$ (ces nombres étant conjugués) et $\mathrm{Tr}(1) = p-1$, il vient

$$b_k = \mathrm{Tr}(\theta\zeta^{-k} - \theta\zeta) = pa_k - (a_0 + \cdots + a_{p-2}) - (-a_0 - \cdots - a_{p-2}) = pa_k.$$

Par ailleurs, on a $\theta\zeta^{-k} - \theta\zeta \in \mathfrak{O}_{\mathbf{K}}$ (puisque $\mathfrak{O}_{\mathbf{K}}$ est un anneau) donc d'après III.7(a), on a $b_k \in \mathbf{Z}$.

ii. D'après la question précédente, $p\theta = \sum_{k=0}^{p-2} b_k\zeta^k = \sum_{k=0}^{p-2} b_k(1-\lambda)^k$. En développant par le binôme de Newton et par permutation d'indice, il vient

$$c_k = \sum_{j=k}^{p-2}(-1)^k\binom{j}{k}b_j \in \mathbf{Z}.$$

Comme $\lambda = 1 - \zeta$, on a aussi par symétrie des rôles

$$b_k = \sum_{j=k}^{p-2}(-1)^k\binom{j}{k}c_j \quad (1).$$

NB : l'énoncé comportait ici une erreur sur les noms d'indices, il fallait lire « $b_k = \sum_{\ell=k}^{p-2}(-1)^k\binom{\ell}{k}c_\ell$ ».

iii. On remarque d'abord que l'égalité $\mathrm{N}(1-\zeta) = p$ peut s'écrire

$$p = (1-\zeta)^{p-1}\prod_{i=1}^{p-1}\left(1 + \zeta + \cdots + \zeta^{i-1}\right),$$

qui est de la forme $p = \lambda^{p-1}\beta$ avec $\beta \in \mathbf{Z}[\zeta] \subseteq \mathfrak{O}_{\mathbf{K}}$. En regardant l'égalité

$$p\theta = \sum_{i=0}^{p-2} c_i\lambda^i \quad (2)$$

modulo l'idéal $\lambda\mathfrak{O}_{\mathbf{K}}$, on obtient donc $0 = c_0 \pmod{\lambda\mathfrak{O}_{\mathbf{K}}}$. En passant à la norme, on obtient que $p \mid c_0$.

On montre à présent par récurrence que pour tout $k \in [\![0, p-2]\!]$, $p \mid c_k$. Soit $k \in [\![0, p-2]\!]$ et on suppose que pour tout $i \leqslant k-1$, $p \mid c_i$. En considérant l'égalité (2) modulo $\lambda^{k+1}\mathfrak{O}_{\mathbf{K}}$, il vient $0 = c_k\lambda^k \pmod{\lambda^{k+1}\mathfrak{O}_{\mathbf{K}}}$. En effet, les entiers $c_i, i \leqslant k-1$ sont divisibles par p donc congrus à 0 modulo $\lambda^{k+1}\mathfrak{O}_{\mathbf{K}}$ et les $c_i\lambda^i$ pour $i \geqslant k+1$ sont aussi congrus à 0 modulo $\lambda^{k+1}\mathfrak{O}_{\mathbf{K}}$. On en déduit que $c_k = 0 \pmod{\lambda\mathfrak{O}_K}$, donc $p \mid c_k$. La récurrence est prouvée.

On déduit alors de l'égalité (1) que tous les b_k sont divisibles par p et en se rappelant que $b_k = pa_k$, on conclut finalement que $a_k \in \mathbf{Z}$.

Ainsi, $\theta \in \mathbf{Z}[\zeta]$, ce qui prouve l'inclusion $\mathfrak{O}_{\mathbf{K}} \subseteq \mathbf{Z}[\zeta]$. L'autre inclusion a été prouvée en III.2, donc on peut conclure que $\mathbf{Z}[\zeta] = \mathfrak{O}_{\mathbf{K}}$.

Le cas $p = 3$

1. Comme 3 ne divise pas x, on a $x = 1$ ou $x = -1 \pmod 3$. En élevant au cube une égalité de la forme $x = \pm 1 + 3k$, on trouve que $x^3 = \pm 1 \pmod 9$. De même pour y^3 et z^3. L'égalité $x^3 + y^3 + z^3 = 0 \pmod 9$ ne peut alors être vérifiée donc l'équation (1) n'a pas de solutions.
2. On a $3 = \mathrm{N}(\lambda) = (1-j)(1-j^2) = (1-j)^2(1+j)$. Comme $1+j$ est inversible, on conclut que $3 \sim \lambda^2$.
3. Soit $s = a + bj \in \mathbf{Z}[j]$. On a $s = (a+b) - b\lambda$, donc $s = a + b \pmod{\langle\lambda\rangle}$. Or $a+b$ est un entier relatif, donc congru à 0 ou $\pm 1 \pmod 3$, et comme $\lambda \mid 3$ (cf. question précédente), on a aussi $a + b = 0$ ou $\pm 1 \pmod{\langle\lambda\rangle}$. Ainsi, tout élément de $\mathbf{Z}[j]$ est congru à $0, 1$ ou $-1 \pmod{\langle\lambda\rangle}$.

   On suppose que $s = 1 \pmod{\langle\lambda\rangle}$. Il existe donc $\mu \in \mathbf{Z}[j]$ tel que $s - 1 = \mu\lambda$.

   $$s^3 - 1 = (s-1)(s-j)(s-j^2) = (s-1)(s-1+(1-j))(s-1+(1-j^2)) = \lambda^3\mu(\mu+1)(\mu+1+j).$$

   On remarque que $1 + j = -j^2 = (1-j^2) - 1 = (1+j)\lambda - 1$; comme μ est congru à l'un des entiers $0, 1$ ou $-1 \pmod{\langle\lambda\rangle}$, on a que $\mu(\mu+1)(\mu+1+j) = 0 \pmod{\langle\lambda\rangle}$, et on conclut.

   Le cas $s = -1 \pmod{\langle\lambda\rangle}$ se traite de manière analogue en partant de la factorisation $s^3 + 1 = (s+1)(s+j)(s+j^2)$.
4. On suppose (P_n) vérifiée pour un quadruplet $(\alpha, \beta, \delta, \omega)$. D'après la question précédente, comme α et β ne sont pas divisibles par λ, on a $\alpha^3 = \pm 1 \pmod{\langle\lambda^4\rangle}$ et $\beta^3 = \pm 1 \pmod{\langle\lambda^4\rangle}$. On en déduit que $\omega\lambda^{3n}\delta^3 = 0$ ou $\pm 2 \pmod{\langle\lambda^4\rangle}$. Comme λ ne divise pas ± 2 (la norme de λ vaut 3), on a nécessairement $\omega\lambda^{3n}\delta^3 = 0 \pmod{\langle\lambda^4\rangle}$. Comme $\lambda \nmid \delta$, on en déduit que $3n \geqslant 4$, donc $n \geqslant 2$.
5. On suppose (P_n) vérifiée pour un triplet (α, β, δ).
   (a) Immédiat par la factorisation $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha+j\beta)(\alpha+j^2\beta)$.
   (b) On rappelle que l'on a montré en partie 1 que l'anneau $\mathbf{Z}[j]$ est euclidien. Il est donc principal. De l'égalité $-\omega\lambda^{3n}\delta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha+j\beta)(\alpha+j^2\beta)$, on déduit, puisque λ est irréductible, qu'il divise l'un des facteurs $\alpha+\beta$, $\alpha+j\beta$ ou $\alpha+j^2\beta$. Or, comme $1 = j = j^2 \pmod{\langle\lambda\rangle}$, on a $\alpha+\beta = \alpha+j\beta = \alpha+j^2\beta \pmod{\langle\lambda\rangle}$ donc λ divise chacun de ses facteurs.
   (c) On note γ un pgcd de $\alpha+\beta$ et $\alpha+j\beta$. D'après la question précédente, λ divise γ. La relation $(\alpha+\beta) - (\alpha+j\beta) = \lambda\beta$ montre que λ^2 ne divise pas γ puisque λ ne divise pas β. Enfin, λ est le seul facteur premier de γ : si $\mu \neq \lambda$ est premier et divise $\alpha+\beta$ et $\alpha+j\beta$, alors il divise $\alpha+\beta-(\alpha+j\beta) = \lambda\beta$ donc divise β et il divise aussi $j(\alpha+\beta)-(\alpha+j\beta) = -\lambda\alpha$ donc divise α, ce qui est absurde puisque l'on a supposé α et β premiers entre eux. On conclut qu'un pgcd de $\alpha+\beta$ et $\alpha+j\beta$ est λ.

   D'après la question précédente, on peut écrire l'égalité suivante dans $\mathbf{Z}[j]$:

   $$-\omega\lambda^{3(n-1)} = \frac{\alpha+\beta}{\lambda} \cdot \frac{\alpha+j\beta}{\lambda} \cdot \frac{\alpha+j^2\beta}{\lambda}. \quad (*)$$

D'après IV.4, on a nécessairement $n \geqslant 2$, donc λ divise le membre de droite de l'égalité (*). On a vu qu'un pgcd de $\alpha+\beta$ et $\alpha+j\beta$ est λ, et il en va de même pour $\alpha+\beta$ et $\alpha+j^2\beta$, ainsi que de $\alpha+j\beta$ et $\alpha+j^2\beta$. Donc seul l'un d'entre eux est divisible par λ^2.

(d) En multipliant les trois égalités qui définissent les κ_i, on obtient immédiatement $-\omega\delta^3 = \kappa_1\kappa_2\kappa_3$. Ainsi, $\kappa_1\kappa_2\kappa_3 \sim \delta^3$. Comme l'anneau $\mathbf{Z}[j]$ est factoriel (puisqu'euclidien), chacun des κ_i est associé à un cube.

(e) On écrit $\kappa_i = u_i\gamma_i^3$ avec u_i inversible. De $1+j+j^2=0$, on déduit que $(\alpha+\beta)+j(\alpha+j\beta)+j^2(\alpha+j^2\beta)=0$, soit $\lambda^{3n-2}u_1\gamma_1^3 + j\lambda u_2\gamma_2^3 + j^2\lambda u_3\gamma_3^3 = 0$. En simplifiant par λ et en multipliant par $(ju_2)^{-1}$, on obtient une égalité de la forme

$$\gamma_2^3 + \tau\gamma_3^3 + \tau'\lambda^{3(n-1)}\gamma_1^3 = 0,$$

avec $\tau, \tau' \in \mathbf{Z}[j]^\times$.

(f) Comme λ ne divise pas $\kappa_1\kappa_2\kappa_3$, λ ne divise pas $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$. De plus, γ_2 et γ_3 sont premiers entre eux parce que κ_2 et κ_3 le sont. On suppose que $\tau = 1$: alors $\gamma_2^3+\gamma_3^3+\tau'\lambda^{3(n-1)}\gamma_1^3 = 0$, donc (P_{n-1}) est vérifiée.

On suppose que $\tau=-1$: alors $\gamma_2^3 + (-\gamma_3)^3 + \tau'\lambda^{3(n-1)}\gamma_1^3 = 0$, donc (P_{n-1}) est vérifiée.

(g) Sachant que les inversibles de $\mathbf{Z}[j]$ sont ± 1, $\pm j$ et $\pm j^2$, il reste à examiner les cas $\tau = \pm j$ et $\tau = \pm j^2$. D'après IV.3, on a $\gamma_2^3 = \pm 1 \pmod{\langle\lambda^4\rangle}$ et $\gamma_3^3 = \pm 1 \pmod{\langle\lambda^4\rangle}$ puisque λ ne divise pas $\gamma_2\gamma_3$. Par ailleurs, comme (P_n) est supposée vraie, on a $n \geqslant 2$ donc $\gamma_2^3+\tau\gamma_3^3 = 0 \pmod{\langle\lambda^3\rangle}$. On en déduit que $\pm 1 \pm \tau = 0 \pmod{\langle\lambda^3\rangle}$. Or $\pm 1 \pm j$ et $\pm 1 \pm j^2$ ne sont pas multiples de λ^3 (passer à la norme), donc on ne peut avoir $\tau = \pm j$ ni $\tau = \pm j^2$.

6. La question IV.5 a montré que si (P_n) est vérifiée, alors (P_{n-1}) est vérifiée. Ceci conduit à une contradiction puisque si l'on suppose que (P_n) est vérifiée pour un $n \geqslant 2$, on obtient par récurrence descendante que (P_1) est vérifiée, ce qui est faux d'après IV.4. Finalement, l'équation (1) n'a pas de solutions non triviales dans le cas $3 \mid xyz$.

Le théorème de Fermat pour p régulier et $p \nmid xyz$

1. L'égalité $x^p + y^p = (-z)^p$ se factorise dans $\mathbf{Z}[\zeta]$ en

$$\prod_{k=0}^{p-1}(x+\zeta^k y) = (-z)^p.$$

Si $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}[\zeta]$, on vérifie facilement que $\langle\alpha\beta\rangle = \langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle$. En passant aux idéaux, on obtient

$$\prod_{k=0}^{p-1}\langle x+\zeta^k y\rangle = \langle z^p\rangle.$$

2. (a) Comme $\mathfrak{P}$ divise $\langle x+\zeta^k y\rangle$ et $\langle x+\zeta^l y\rangle$, il divise l'idéal engendré par $(x+\zeta^l y)-(x+\zeta^k y)$. Or on a $(x+\zeta^l y)-(x+\zeta^k y) = y\zeta^k(\zeta^{l-k}-1)$; de plus ζ^k est une unité, et $\zeta^{l-k}-1 \sim \zeta - 1 = -\lambda$ (cf. III.5) donc $\mathfrak{P}$ divise l'idéal engendré par λy.

(b) Comme l'idéal $\mathfrak{P}$ est premier, on a $\lambda \in \mathfrak{P}$ ou $y \in \mathfrak{P}$. On suppose que $y \in \mathfrak{P}$; d'après la question 1, $\mathfrak{P}$ divise $\langle z^p\rangle$, donc on aurait $z \in \mathfrak{P}$. Or y et z sont premiers entre eux donc d'après l'identité de Bézout, il existe $u, v \in \mathbf{Z}$ tels que $uy+vz = 1$, ce qui implique que $1 \in \mathfrak{P}$, absurde.

On a donc $\lambda \in \mathfrak{P}$, donc $\langle\lambda\rangle = \mathfrak{P}$ puisque $\langle\lambda\rangle$ est premier (cf. III.5). Or $x+y = x+\zeta^k y \pmod{\langle\lambda\rangle}$ (on se rappelle que $\zeta^k = 1 \pmod{\langle\lambda\rangle}$) et par définition de $\mathfrak{P}$, $x+\zeta^k y = 0 \pmod{\langle\lambda\rangle}$. Donc $x+y = 0 \pmod{\langle\lambda\rangle}$. On a donc $x+y \in \mathbf{Z} \cap \langle\lambda\rangle = p\mathbf{Z}$ (cf. III.5(a)). Or $x^p+y^p+z^p = 0$, d'où l'on déduit avec le petit théorème de Fermat que $z^p = -(x+y) \pmod{p\mathbf{Z}} = 0 \pmod{p\mathbf{Z}}$. Ainsi, $p \mid z$, ce qui est contraire à nos hypothèses.

3. D'après l'égalité de la question 1, comme les idéaux $\langle x+\zeta^k y\rangle$ sont 2 à 2 premiers entre eux et qu'il y a unicité de la décomposition des idéaux en idéaux premiers dans $\mathbf{Z}[\zeta]$, chaque idéal $\langle x+\zeta^k y\rangle$ est une puissance p-ième d'un idéal, c'est en particulier vrai pour $\langle x+\zeta y\rangle$.
4. D'après l'hypothèse de régularité sur le nombre premier p, comme l'idéal I^p est principal, l'idéal I est aussi principal. Ainsi, il existe $\alpha \in \mathbf{Z}[\zeta]$ tel que $\langle x+\zeta y\rangle = \langle \alpha^p\rangle$, c'est-à-dire il existe $u \in \mathbf{Z}[\zeta]^\times$ tel que $x+\zeta y = u\alpha^p$. D'après la structure de $\mathbf{Z}[\zeta]^\times$ (cf. Partie III), on peut écrire u sous la forme $u = \zeta^r \epsilon$ avec $r \in \mathbf{Z}$ et ϵ une unité réelle.
5. On écrit $\alpha = a_0 + a_1\zeta + \cdots + a_{p-2}\zeta^{p-2} \in \mathbf{Z}[\zeta]$. Pour tout k, $\zeta^k = 1 \pmod{\langle\lambda\rangle}$, donc $\alpha = a_0+a_1+\cdots+a_{p-2} \pmod{\langle\lambda\rangle}$. On note $b = a_0+a_1+\cdots+a_{p-2} \in \mathbf{Z}$. On a $\alpha^p - b^p = \prod_{k=0}^{p-1}(\alpha-\zeta^k b)$. Chacun des facteurs $\alpha-\zeta^k b$ est congru à $\alpha - b \pmod{\langle\lambda\rangle}$, donc à $0 \pmod{\langle\lambda\rangle}$. En multipliant ces congruences, on obtient $\alpha^p - b^p = 0 \pmod{\langle\lambda^p\rangle}$. D'après III.5(b), on a $\langle\lambda^{p-1}\rangle = \langle p\rangle$, donc $\alpha^p = b^p \pmod{\langle p\rangle}$ et $a = b^p$ convient.

   On peut donc écrire $x+\zeta y = \zeta^r \epsilon a \pmod{\langle p\rangle}$, puis, en multipliant par ζ^{-r}, $\zeta^{-r}(x+\zeta y) = \epsilon a \pmod{\langle p\rangle}$. En conjugant cette égalité, on obtient $\zeta^r(x+\zeta^{-1}y) = \epsilon a \pmod{\langle p\rangle}$, ce qui conduit en éliminant ϵa à l'égalité

$$x\zeta^{-r} + y\zeta^{1-r} - x\zeta^r - y\zeta^{r-1} = 0 \pmod{\langle p\rangle}.$$

6. On suppose que $r = 0 \pmod p$. Alors $\zeta^r = 1$ et l'égalité de la question précédente devient $y(\zeta-\zeta^{-1}) = 0 \pmod{\langle p\rangle}$, soit $y(1+\zeta)(1-\zeta) = 0 \pmod{\langle p\rangle}$. Or $1+\zeta$ est une unité (d'après III.1.b(ii) et III.3(a)), donc $\lambda y = 0 \pmod{\langle p\rangle}$. On en déduit que λ divise y dans $\mathbf{Z}[\zeta]$, puis, en passant à la norme, que p divise y, ce qui est contraire aux hypothèses.
7. D'après les deux questions précédentes, p ne divise aucun des entiers $\pm r, \pm(1-r)$. On écrit

$$\beta = \frac{x}{p}\zeta^{-r} + \frac{y}{p}\zeta^{1-r} - \frac{x}{p}\zeta^r - \frac{y}{p}\zeta^{r-1}.$$

   Si aucun des exposants $\pm r, \pm(1-r)$ n'était égal modulo p, comme $(1,\zeta,\ldots,\zeta^{p-2})$ est une $\mathbf{Q}$-base de $\mathbf{Q}(\zeta)$ et que $\beta \in \mathbf{Z}[\zeta]$, on aurait en particulier $\frac{x}{p} \in \mathbf{Z}$, ce qui est contraire aux hypothèses. Donc deux de ces quatre exposants sont égaux modulo p, et comme $r \neq 0, 1 \pmod{p\mathbf{Z}}$, ce ne peut être que r et $1-r$, autrement dit on a $2r = 1 \pmod{p\mathbf{Z}}$.
8. On peut maintenant réécrire l'égalité de la question 7 :

$$\beta p\zeta^r = x + y\zeta - x\zeta - y = (x-y)\lambda.$$

   En prenant la norme, comme $p-1 > 2$, on obtient que $p \mid (x-y)$, c'est-à-dire $x = y \pmod{p\mathbf{Z}}$.
9. Par symétrie des rôles de x, y et z, on a aussi $y = z \pmod{p\mathbf{Z}}$. En considérant l'égalité $x^p + y^p + z^p = 0$ modulo p, on obtient $3x^p = 0 \pmod{p\mathbf{Z}}$, et comme $p > 3$, $x = 0 \pmod{p\mathbf{Z}}$, ce qui est contraire aux hypothèses.

Chapitre 4

Épreuve écrite d'analyse et probabilités

Le sujet est disponible à l'URL http://www.devenirenseignant.gouv.fr/cid137747/sujets-rapports-des-jurys-agregation-2019.html ou sur le site agreg.org.

4.1 Commentaires sur l'épreuve écrite d'analyse et probabilités

La motivation du sujet d'Analyse et Probabilités 2019 provient de l'article [3] de Zakhar KABLUCHKO. La démarche suivie permet d'aborder un large éventail de thèmes au programme : probabilités, distributions, analyse réelle à une et plusieurs variables, analyse complexe... Les parties précédant la **Partie V** ont pour but d'établir les différents résultats, souvent fort classiques, nécessaires à la démonstration de l'énoncé principal. Après avoir abordé sous un angle relativement élémentaire les distributions en dimension 1 puis 2, on revisite en parties **III** et **IV** le problème de DIRICHLET sur le disque et la formule de POISSON-JENSEN (voir par exemple [1] où ces questions sont détaillées à destination d'un public de master). La **Partie V** traite le problème de la répartition des points critiques de polynômes aléatoires dans un cas particulier et s'appuie en particulier sur l'article [4]. Ici encore on revisite des résultats classiques tels que le critère de WEYL ou encore le théorème de ROUCHÉ (voir par exemple [2, p. 12]). La **Partie VI** constitue l'aboutissement du sujet, avec la démonstration du résultat de [3] : la mesure empirique des points critiques de polynômes aux racines aléatoires indépendantes et identiquement distribuées converge en probabilité vers la mesure commune aux racines.

Bibliographie

[1] Isabelle CHALENDAR, *Analyse fonctionnelle. Fonctions harmoniques, classe de* NEVANLINNA*, espaces de* HARDY *et une introduction aux opérateurs de* TOEPLITZ *et de* HANKEL, Cours de Master, Univ. Lyon I, 2008. http://math.univ-lyon1.fr/~chalenda/complet-M2R-hardy.pdf.

[2] John B. CONWAY, *Functions of one complex variable*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 11, Springer Verlag, 1978.

[3] Zakhar KABLUCHKO, *Critical points of random polynomials with independent identically distributed roots*, Proc. Amer. Math. Soc., 143, 695-702, 2015.

[4] Sneha Dey SUBRAMANIAN, *On the distribution of critical points of a polynomial*, Electron. Commun. Probab., 17, paper no. 37, 9 pp., 2012.

1) Remarques générales

- Les derniers rapports du jury avaient cherché à préciser et clarifier les attentes sur le chapitre « distributions » du programme. Compte tenu de cet effort, on pouvait pronostiquer une incursion des sujets dans cette partie du programme. Il était tout à fait possible de traiter une grande partie des questions correspondantes en n'en ayant que des notions très élémentaires.

• Certains candidats ont perdu beaucoup de temps dans les deux premières parties, davantage englués dans les aspects calculatoires que bloqués par les concepts, et n'ont pas cherché à aller plus loin, alors que les parties **III**, **IV** et **V** comportaient des questions tout à fait abordables.

• Les théorèmes centraux du chapitre « intégration » (convergence dominée, dérivation sous le signe intégral) sont mal maîtrisés. Le rôle et l'importance d'une hypothèse de domination uniforme semble mal comprise. On trouve aussi beaucoup d'imprécisions sur la définition même de l'intégrabilité pour des fonctions dont le signe peut varier.

• Les récurrences étaient souvent très mal rédigées, avec une grande confusion quant à la formalisation des hypothèses d'hérédité.

• Il est très appréciable que les candidats se montrent intellectuellement honnêtes et ne cherchent pas à abuser les correcteurs. Un recul critique sur les résultats obtenus, y compris lorsque la démarche n'est pas aboutie, est souvent valorisé.

• Les copies bien présentées et ayant une bonne qualité de rédaction, sans bluff, ont été valorisées. De façon générale, peu de candidats ont fait ne serait-ce qu'un minimum d'effort de rédaction. Mêmes les premières questions étaient mal rédigées, avec des abréviations, des « il est trivial que » péremptoires. L'identification fonction f / image $f(x)$ est systématique sur la plupart des copies. Un nombre non négligeable de candidats écrivent des formules sans mettre les parenthèses nécessaires pour en préciser le sens. Le jury recommande fortement de numéroter correctement et très visiblement ces questions, à plus forte raison quand les questions sont abordées dans le désordre, ce que les les candidats sont tout à fait libres de décider. Les candidats doivent bien être conscients que les correcteurs ne sont pas disposés à parcourir les copies comme un jeu de piste. Enfin, on est en droit d'attendre qu'un mathématicien professionnel orthographie correctement les noms « célèbres » comme Cauchy-Schwarz.

2) Partie I

• La **Partie I** a été beaucoup abordée, mais de manière surprenante la question sur l'inégalité de Markov — un « classique » des chapitres « intégration » ou « probabilités »— a fait fuir une part très substantielle des candidats.

• Certains candidats ont passé un temps vraiment déraisonnable sur la question **I-1)** où il suffisait d'appliquer l'ínégalité de Cauchy-Schwarz.

• Peu de candidats ont traité la question sur l'inégalité de Markov. Une partie des points a été accordée aux personnes démontrant l'inégalité uniquement dans le cas discret ou dans le cas à densité. Certains candidats ne font pas la différence entre « positive » et « positive presque sûrement ». On a vu de très grosses confusions, notamment beaucoup de candidats qui confondaient les réels et les éléments de Ω.

• Beaucoup de confusion entre la convexité et la concavité. Certaines (parties de) courbes de la fonction logarithme étaient fort étranges. Les courbes soignées et comportant quelques éléments utiles (comme le tracé des demi-tangentes aux courbes en les points de non dérivabilité) ont été valorisées.

• Des erreurs de logique inquiétantes ont été relevées (la négation de « tous les x_k sont > 1 » devenant « tous les x_k sont $\leqslant 1$ »...).

3) Partie II

• La **Partie II** a été abordée par plus de 1500 candidats, avec de bons résultats sur le **1)d)**. En revanche la partie sur les fonctions harmoniques semble étonnamment faible.

• Les intégrations par parties sont souvent peu ou pas justifiées. L'intégrabilité de $x \mapsto |x|\varphi''(x)$ n'est également quasiment jamais justifiée.

- Montrer que f est dans E ne consiste pas à montrer qu'elle admet un point de non-dérivabilité.
- Concernant les deux calculs de décomposition dans les questions **II-1-c)** (i) et (iv), on pouvait attendre des candidats qu'ils vérifient que les solutions qu'ils proposent conviennent (et signalent un problème dans le cas contraire).
- Certains candidats ont passé un temps vraiment déraisonnable sur la question **II-1)c)**(ii).
- Le comportement singulier en 0 de la fonction logarithme réclamait davantage qu'évoquer la continuité (ou même le caractère C^∞) sur $\mathbf{R}_+^*$ pour déduire l'intégrabilité locale sur $\mathbf{R}_+$.
- Questions **II-2)b)**(i) et **II-2)c)**(iii) (convergence des intégrales) : un certain nombre de candidats écrivent que Ω_ε tend vers $\mathbf{R}^2$ lorsque ε tend vers 0 (et donc l'intégrale sur Ω_ε tend vers celle sur $\mathbf{R}^2$), ce qui montre la méconnaissance profonde de ce qu'est une limite.
- La question **II-2)c)**(i) a souvent été mal traitée (la difficulté en $(0,0)$ étant escamotée) ; la (ii) a en revanche été plutôt correctement traitée. les questions (iv) et (v) n'ont eu que peu de succès.
- Question **II-2)d)**(i) : le théorème des zéros isolés et les hypothèses associées n'étaient pas toujours bien maîtrisés.
- Les copies indiquant clairement que les calculs devaient être compris au sens des distributions, et faisant en sorte d'expliciter un minimum ce que cela signifiait, ont été valorisées.

4) Partie III

- Bien que les candidats aient souvent tenté quelque chose, les résultats sont assez faibles en **Partie III**. La **III.2)a)** est moins traitée et il y a une forte chute des effectifs après **III.2)c)**
- Question **III-1)a)** : un nombre non négligeable de candidats ne maîtrisent pas du tout les théorèmes de dérivation sous le signe somme.
- La question **III-1)b)**(i) a généralement été bien traitée, et a été fortement appréciée par les candidats qui l'ont abordée.
- Question **III-1)b)**(ii) : la démonstration de l'uniforme continuité sur $\mathbf{R}$ a rarement été traitée de manière satisfaisante, avec des propriétés étranges sur l'uniforme continuité. Cependant, certains candidats ont passé du temps sur cette partie de la question en essayant de la montrer précisément (à l'aide d'inégalités des accroissements finis par exemple).
- Question **III-2)a)** : certains candidats oublient que g est à valeurs complexes... et manipulent ainsi des inégalités entre complexes.
- Question **III-2)b)** : les questions (i), (iii) et (iv) ne posaient pas de grande difficulté et ont été généralement bien traitées (sauf confusions entre réels et complexes). La question (ii) a été en revanche très peu réussie, les candidats se contentant généralement de démontrer la positivité stricte du Laplacien de ψ_ε sans parvenir à en faire quelque chose.
- Question **III-2)c)** : le cas $g(z_0)$ a souvent été oublié...
- Question **III-2)d)** : peu réussie, elle était pourtant classique !
- La question **III-3)a)** ne posait pas de difficulté particulière et a été souvent réussie.
- Question **III-3)b)** : le théorème d'holomorphie sous l'intégrale était rarement maîtrisé.
- Les questions **III-4)** et **5)** ont été relativement réussies lorsqu'elles ont été abordées. Très peu de candidats sont allés au-delà dans cette partie.

5) Partie IV

- Moins de 200 candidats ont abordé la **Partie IV**. La question **1)a)** a été relativement bien réussie, les autres questions ont été très peu abordées et rarement réussies.

6) Partie V

• On retrouve plus de 300 candidats en **Partie V**, où les meilleurs ont fait des choses, au moins avant la question **V1.d)**. Très peu sont allés au-delà. Les questions **3)a)** et **3)b)** ont été parfois abordées, avec un succès relatif.

7) Partie VI

• Moins de 50 candidats ont abordé la Partie **VI**.

• Peu de questions abordées (**A.1)a)** et **b)** principalement), en « grapillage ».

4.2 Corrigé de l'épreuve écrite d'analyse et probabilités

I - Des inégalités utiles pour la suite

1) Il s'agit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\mathbf{R}^m$ (variantes : $M_{m,1}(\mathbf{R})$; $M_{1,m}(\mathbf{R})$...) muni de son produit scalaire canonique. Pour tout $(w_1, ..., w_m) \in \mathbf{R}^m$,

$$\left(\sum_{j=1}^{m} w_j\right)^2 = \langle (1, ..., 1) | (w_1, ..., w_m) \rangle^2 \leqslant ||(1, ..., 1)||^2 \times ||(w_1, ..., w_m)||^2 = m \sum_{j=1}^{m} w_j^2.$$

On pouvait également se servir de la convexité de la fonction $x \mapsto x^2$ qui implique que

$$\left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} w_j\right)^2 \leqslant \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} w_j^2$$

ce qui donne bien $\left(\sum_{j=1}^{m} w_j\right)^2 \leqslant m \sum_{j=1}^{m} w_j^2$

Certains candidats, enfin, on utilisé (souvent en la rejustifant) l'inégalité classique $2|ab| \leqslant a^2 + b^2$ en procédant soit par récurrence, soit directement, par exemple en écrivant

$$\left(\sum_{j=1}^{m} w_j\right)^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} w_i w_j \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} (w_i^2 + w_j^2) = \frac{1}{2} \left(m \sum_{i=1}^{m} w_i^2 + m \sum_{j=1}^{m} w_j^2\right) = m \sum_{i=1}^{m} w_i^2.$$

2) Inégalité de Markov.

Soit Z une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Si Z est presque sûrement positive ou nulle, alors Z admet une espérance et pour tout réel strictement positif a,

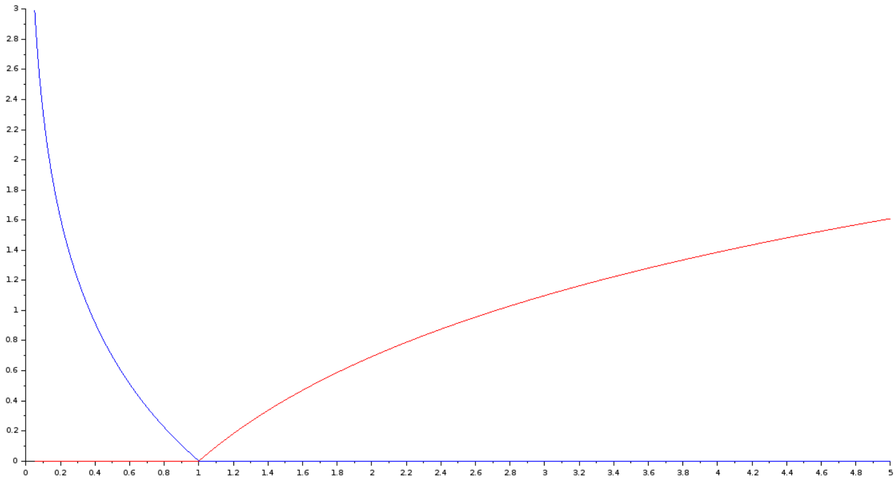
$$Z = Z\left(\mathbf{1}_{\{Z<a\}} + \mathbf{1}_{\{Z \geqslant a\}}\right) \underset{\text{p.s.}}{\geqslant} Z \mathbf{1}_{\{Z \geqslant a\}} \geqslant a\, \mathbf{1}_{\{Z \geqslant a\}}$$

On en déduit par croissance de l'espérance que $\mathbf{E}(Z) \geqslant a \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{Z \geqslant a\}}) = a \mathbf{P}(Z \geqslant a)$ et donc que

$$\mathbf{P}(Z \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbf{E}(Z)}{a}$$

(ceci étant valable également dans le cas où $\mathbf{E}(Z) = +\infty$).

3)a) En rouge, la courbe représentative de $\ln_+$ et en bleu celle de $\ln_-$.



b) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $(x_1, ..., x_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$,

- Si $\sum_{k=1}^n x_k \leqslant 1$ alors

$$\ln_+\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) = 0 \leqslant \sum_{k=1}^n \ln_+(x_k) + \ln n$$

puisque $\ln_+$ est positive sur $\mathbf{R}_+^*$ et $\ln n \geqslant 0$.

- Sinon, $\ln_+\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) - \ln n = \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right)$ et il suffit alors de remarquer que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k \leqslant \max_{k \in [\![1,n]\!]} x_k$$

pour obtenir, par croissance de la fonction ln, que

$$\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right) \leqslant \ln\left(\max_{k \in [\![1,n]\!]} x_k\right) \leqslant \ln_+\left(\max_{k \in [\![1,n]\!]} x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^n \ln_+(x_k)$$

(on rajoute des quantités positives ou nulles).

L'égalité de droite se vérifie sans problème vu que $x \geqslant 1$ implique $\frac{1}{x} \leqslant 1$ et $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$. Finalement, on obtient $\ln_+\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^n \ln_+(x_k) + \ln n = \sum_{k=1}^n \ln_-\left(\frac{1}{x_k}\right) + \ln n$.

II - Solutions élémentaires du Laplacien en dimensions 1 et 2

1) Solutions élémentaires du Laplacien en dimension 1

a) Soit φ une fonction de classe C^∞ à support compact dans $\mathbf{R}$ et à valeurs réelles. Par intégration par parties et puisque, φ étant à support compact, l'intégrale est bien définie et les termes de bord (crochet) s'annulent,

$$\int_{\mathbf{R}} |x|\varphi''(x)\mathrm{d}x = -\int_{\mathbf{R}_-} x\varphi''(x)\mathrm{d}x + \int_{\mathbf{R}_+} x\varphi''(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}_-} \varphi'(x)\mathrm{d}x - \int_{\mathbf{R}_+} \varphi'(x)\mathrm{d}x = 2\varphi(0).$$

b) On a alors, pour tout réel a et toute fonction φ de classe C^∞ à support compact dans $\mathbf{R}$ et à valeurs réelles, $\int_{\mathbf{R}} |x-a|\varphi''(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} |x|\varphi''(x+a)\mathrm{d}x = 2\psi(0) = 2\varphi(a)$ par changement de variable affine et en utilisant la fonction $\psi\ : x \mapsto \varphi(x+a)$, qui est bien de classe C^∞ à support compact dans $\mathbf{R}$ et à valeurs réelles, ainsi que le résultat précédent. Ainsi, on peut écrire $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{|x-a|}{2} = \delta_a$. (Les candidats plus à l'aise pouvaient aussi traiter cette question directement en termes de distributions, en appliquant une translation.)

c) (i) La fonction f est bien continue sur $\mathbf{R}$, admet 0 comme unique point de non-dérivabilité et est bien affine sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ donc f est dans E (avec $n=1$ et $a_1=0$).

On cherche $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$ tels que $f = af_0 + b\mathrm{id} + c\mathbf{1}_{\mathbf{R}}$. On doit avoir pour tout $x \leqslant 0$, $-2x+1 = -ax+bx+c$ et pour tout $x \geqslant 0$, $1+3x = ax+bx+c$ d'où (identification polynomiale, un polynôme ayant une infinité de racines étant nécessairement nul) :

$$\begin{cases} a-b &= 2 \\ a+b &= 3 \\ c &= 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a &= 5/2 \\ b &= 1/2 \\ c &= 1. \end{cases}$$

Comme, réciproquement, pour ces valeurs trouvées de a,b,c, on a bien $f = af_0 + b\mathrm{id} + c\mathbf{1}_{\mathbf{R}}$, ceci prouve que f est dans $\mathrm{Vect}(f_0, \mathrm{id}, \mathbf{1}_{\mathbf{R}})$, avec $f = \frac{5}{2}f_0 + \frac{1}{2}\mathrm{id} + c\mathbf{1}_{\mathbf{R}}$.

(ii) $\star$ On montre l'<u>existence</u> par récurrence :

• Si $n=1$, il existe des réels a,b,c,d tels que si $x \leqslant a_1$, $f(x) = ax+b$ et si $x \geqslant a_1$, $f(x) = cx+d$ avec (continuité en a_1) $aa_1+b = ca_1+d$ et (non dérivabilité en a_1) $a \neq c$. D'où si $f = \alpha_1 f_{a_1} + \beta\mathrm{id} + \gamma\mathbf{1}_{\mathbf{R}}$ nécessairement (même type de résolution que ci-dessus), $\begin{cases} \alpha_1 - \beta &= -a \\ \alpha_1 + \beta &= c \\ \alpha_1 a_1 + \gamma &= b \\ \alpha_1 a_1 - \gamma &= -d \end{cases}$

ce qui donne $f = \frac{c-a}{2}f_{a_1} + \frac{c+a}{2}\mathrm{id} + \frac{b+d}{2}\mathbf{1}_{\mathbf{R}}$ avec $\frac{c-a}{2} \neq 0$. Cette décomposition convenant effectivement, ceci prouve l'existence de la décomposition pour $n=1$.

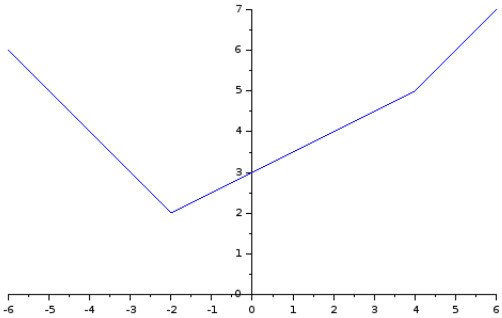
• Supposons la propriété vérifiée pour un certain $n \in \mathbf{N}^*$. Soit alors f une fonction de E admettant $n+1$ points de non dérivabilité $a_1 < \ldots < a_{n+1}$. Notons g la fonction égale à f sur $]-\infty, a_{n+1}]$ et affine sur $[a_n, +\infty[$. Alors g est dans E et admet pour points de non dérivabilité $a_1 < \ldots < a_n$ donc par hypothèse de récurrence, elle est décomposable sous la forme $g = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_{a_i} + \beta\mathrm{id} + \gamma\mathbf{1}_{\mathbf{R}}$ avec $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta, \gamma) \in (\mathbf{R}^*)^n \times \mathbf{R}^2$. De plus, $f-g$ est continue sur $\mathbf{R}$, nulle donc affine sur $]-\infty, a_{n+1}]$ et affine (en tant que différence de deux fonctions affines) sur $[a_{n+1}, +\infty[$ et non dérivable en a_{n+1} (sinon f serait dérivable en a_{n+1}) donc $f-g$ est dans E avec un unique point de non-dérivabilité : a_{n+1}. On en déduit à l'aide de la propriété vérifiée au rang $n=1$ que $f-g$ est décomposable sous la forme $\alpha_{n+1}f_{a_{n+1}} + \mu\mathrm{id} + \nu\mathbf{1}_{\mathbf{R}}$, $(\alpha_{n+1}, \mu, \nu) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^2$.

Il s'ensuit que $f = g + \alpha_{n+1}f_{a_{n+1}} + \mu\mathrm{id} + \nu\mathbf{1}_{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i f_{a_i} + (\beta+\mu)\mathrm{id} + (\gamma+\nu)\mathbf{1}_{\mathbf{R}}$ avec $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \beta+\mu, \gamma+\nu) \in (\mathbf{R}^*)^{n+1} \times \mathbf{R}^2$, ce qui est bien la forme voulue.

$\star$ On justifie ensuite l'<u>unicité</u> : pour $n \in \mathbf{N}^*$ donné, la famille $(f_{a_1}, \ldots, f_{a_n}, \mathrm{id}, \mathbf{1}_{\mathbf{R}})$ est libre. En effet, si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+2}) \in \mathbf{R}^{n+1}$ sont tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{a_i} + \lambda_{n+1}\mathrm{id} + \lambda_{n+2}\mathbf{1}_{\mathbf{R}} = 0$ alors, comme pour $i \in [\![1,n]\!]$, la fonction de gauche est non dérivable en a_i si $\lambda_i \neq 0$, alors que la fonction nulle l'est, nécessairement $\lambda_i = 0$. Il s'ensuit que $\lambda_{n+1}\mathrm{id} + \lambda_{n+2}\mathbf{1}_{\mathbf{R}} = 0$ et donc (en évaluant cette égalité en deux points différents) $\lambda_{n+1} = \lambda_{n+2} = 0$. Ceci implique l'unicité de la décomposition.

(iii) D'après ce qui précède (cas $n=1$, qui sert ensuite dans l'hérédité), pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, α_i est égal à la moitié de la différence entre la pente de f à droite de a_i et la pente à gauche de a_i.

(iv) Figure :



D'après ce qui précède, f est de la forme $f = \frac{3}{4}f_{-2} + \frac{1}{4}f_4 + \beta\mathrm{id} + \gamma\mathbf{1}_{\mathbf{R}}$.
Puis, par exemple en prenant un équivalent en $+\infty$: $1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \beta$ donc $\beta = 0$;
L'expression en 0 donne alors $3 = \frac{3}{2} + 1 + \gamma$ d'où $\gamma = \frac{1}{2}$.

(v) Pour toute fonction φ de classe C^∞ à support compact dans $\mathbf{R}$ et à valeurs réelles, pour toute fonction $f \in E$, si $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_{a_i} + \beta\mathrm{id} + \gamma\mathbf{1}_{\mathbf{R}}$ est sa décomposition telle que trouvée plus haut, alors par linéarité de l'intégrale (toutes les intégrales étant bien définies puisque φ est à support compact),

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi''(x)f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{\mathbf{R}} \varphi''(x)f_{a_i}(x)\mathrm{d}x + \int_{\mathbf{R}} \varphi''(x)(\beta\mathrm{id} + \gamma\mathbf{1}_{\mathbf{R}})(x)\mathrm{d}x.$$

Par simple intégration par parties on trouve que

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi''(x)(\beta\mathrm{id} + \gamma\mathbf{1}_{\mathbf{R}})(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Donc, avec ce qui précède, on obtient

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi''(x)f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n 2\alpha_i\varphi(a_i)$$

Ceci se réécrit en termes de distributions : $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = 2\sum_{i=1}^n \alpha_i\delta_{a_i}$. Les α_i sont aisés à trouver, puisque pour tout i, α_i est égal à la moitié de la différence entre la pente à droite de a_i et la pente à gauche de a_i. (Les candidats les plus à l'aise avec la théorie des distributions pouvaient également utiliser la linarité de la dérivation au sens des distributions ainsi que le fait que cette dérivation prolonge la dérivation au sens des fonctions.)

2) Fonctions harmoniques et solutions élémentaires du Laplacien dans le plan

a) Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbf{C}$. On note $f = P + iQ$ où P et Q désignent respectivement les parties réelle et imaginaire de f. La fonction f étant holomorphe, elle est de classe C^∞ sur $\mathcal{O}$ et vérifie $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, autrement dit $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$ (relations de Cauchy-Riemann). En redérivant alors partiellement (les parties réelle et imaginaire étant en particulier C^2 sur $\mathcal{O}$, le théorème de Schwarz s'applique) on obtient : $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$ d'où $\Delta P = 0$ et de même, $\Delta Q = 0$: ainsi, les parties réelle et imaginaire de f sont harmoniques sur $\mathcal{O}$.

b) (i) • La fonction $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}\Delta\varphi(x, y)$ est continue et à support compact donc intégrable sur $\mathbf{R}^2$;

• $\int_{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,:\,\sqrt{x^2+y^2}\geqslant\varepsilon} \sqrt{x^2 + y^2}\Delta\varphi(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbf{R}^2} \mathbf{1}_{\Omega_\varepsilon}(x, y)\sqrt{x^2 + y^2}\Delta\varphi(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

• pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $\left|\mathbf{1}_{\Omega_\varepsilon}(x, y)\sqrt{x^2 + y^2}\Delta\varphi(x, y)\right| \leqslant \left|\sqrt{x^2 + y^2}\Delta\varphi(x, y)\right|$ avec pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{1}_{\Omega_\varepsilon}(x, y) = 1$;

d'où, avec le théorème de convergence dominée :

$$\int_{\mathbf{R}^2} \sqrt{x^2+y^2}\Delta\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon} \sqrt{x^2+y^2}\Delta\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

On utilise le résultat rappelé et admis dans l'énoncé : pour tout $\varepsilon > 0$, les fonctions $v\ :\ (x,y)\mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ et φ sont bien de classe C^∞ sur $\Omega_\varepsilon = \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\ :\ \sqrt{x^2+y^2}\geqslant\varepsilon\right\}$ et φ est à support compact, donc on a :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\varepsilon} \sqrt{x^2+y^2}\Delta\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi(x,y)\Delta v(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &\quad -\varepsilon\int_0^{2\pi} \vec{n_\theta}\cdot\left(v\vec{\nabla}\varphi-\varphi\vec{\nabla}v\right)(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

Or pour tout $(x,y)\in\mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, $\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ puis $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ d'où $\Delta v(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ce qui donne, après passage en coordonnées polaires :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \varphi(x,y)\Delta v(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\left(\int_\varepsilon^{+\infty}\varphi(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta$$

qui a pour limite $\int_0^{2\pi}\left(\int_{\mathbf{R}_+}\varphi(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta$ lorsque ε tend vers 0. D'autre part, pour tout $\theta\in[0,2\pi]$, on

$$\begin{aligned}\vec{n_\theta}\cdot\left(v\vec{\nabla}\varphi-\varphi\vec{\nabla}v\right)(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta) &= \varepsilon\left(\cos\theta\tfrac{\partial\varphi}{\partial x}(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)+\sin\theta\tfrac{\partial\varphi}{\partial y}(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)\right)\\ &\quad -\varphi(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)\underbrace{\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)}_{1}.\end{aligned}$$

Comme φ est de classe C^∞, donc en particulier de classe C^1 et C^0, et à support compact, elle est bornée, ainsi que ses dérivées partielles premières, sur $\mathbf{R}^2$. Il existe donc un réel $C\in\mathbf{R}_+$ tel que $\left|\int_0^{2\pi}\vec{n_\theta}\cdot\left(v\vec{\nabla}\varphi-\varphi\vec{\nabla}v\right)(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)\mathrm{d}\theta\right|\leqslant 2\pi(2C\varepsilon+C)$. On en conclut que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \varepsilon\int_0^{2\pi}\vec{n_\theta}\cdot\left(v\vec{\nabla}\varphi-\varphi\vec{\nabla}v\right)(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)\mathrm{d}\theta = 0.$$

Ainsi, on a bien montré que $\int_{\mathbf{R}^2}\sqrt{x^2+y^2}\Delta\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\left(\int_{\mathbf{R}_+}\varphi(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta$.

(ii) La réponse est « non », car sinon on aurait obtenuégalité entre $\int_{\mathbf{R}^2}\sqrt{x^2+y^2}\Delta\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ et $2\varphi(0,0)$. En effet, il existe des fonctions φ C^∞ à support compact positives non identiquement nulles et nulles en 0 et ces fonctions vérifient $\int_0^{2\pi}\left(\int_{\mathbf{R}_+}\varphi(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta\neq 2\varphi(0,0)$.

c) (i) La fonction $r\mapsto r\ln r$ est localement intégrable sur $\mathbf{R}_+$ (étant continue sur $\mathbf{R}_+^*$ et prolongeable par continuité en 0) donc (passage en polaires) $(x,y)\mapsto\ln(\sqrt{x^2+y^2})$ est localement intégrable sur $\mathbf{R}^2$.

(ii) Soit on calcule « à la main » $\Delta\ln(\sqrt{x^2+y^2})$ sur $\mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, soit on remarque que $\ln(|z|)$ est la partie réelle d'une détermination quelconque de $\ln z$, dont il suffit de choisir la coupure de manière à ce que $\ln z$ soit holomorphe sur un voisinage ouvert du point (x,y) considéré, ce qui implique par la question **a)** que $\Delta\ln(\sqrt{x^2+y^2}) = 0$ et ce pour tout $(x,y)\in\mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

(iii) Par conséquent, pour toute fonction φ de classe C^∞ à support compact dans $\mathbf{R}^2$ et à valeurs réelles, la fonction $(x,y)\mapsto\ln(\sqrt{x^2+y^2})\Delta\varphi(x,y)$ étant nulle en dehors d'un compact de $\mathbf{R}^2$ et localement intégrable puisque $(x,y) \mapsto \ln(\sqrt{x^2+y^2})$ l'est, donc intégrable sur $\mathbf{R}^2$, on peut bien écrire, toujours par théorème de convergence dominée :

$$\int_{\mathbf{R}^2} \ln(\sqrt{x^2+y^2})\Delta\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{(x,y)\in\mathbf{R}^2\ :\ \sqrt{x^2+y^2}\geqslant\varepsilon} \ln(\sqrt{x^2+y^2})\Delta\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(iv) On utilise le résultat rappelé et admis par l'énoncé. Les fonctions $v\ :\ (x,y)\mapsto \ln(\sqrt{x^2+y^2})$ et φ sont bien de classe C^∞ sur $\Omega_\varepsilon = \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\ :\ \sqrt{x^2+y^2}\geqslant\varepsilon\right\}$ et φ est à support compact, donc on a :

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_\varepsilon \ln(\sqrt{x^2+y^2})\Delta\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi(x,y)\Delta v(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \varepsilon\int_0^{2\pi} \vec{n_\theta}\cdot\left(v\vec{\nabla}\varphi - \varphi\vec{\nabla}v\right)(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

Or :

• $v\ :\ (x,y)\mapsto\ln(\sqrt{x^2+y^2})$ est harmonique sur $\Omega_\varepsilon\subset\mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ (question (ii)) donc

$$\int_{\Omega_\varepsilon}\varphi(x,y)\Delta v(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

• $v(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta) = \ln\varepsilon$; $\frac{\partial v}{\partial x}(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta) = \frac{\varepsilon\cos\theta}{(\varepsilon\cos\theta)^2+(\varepsilon\sin\theta)^2} = \frac{\cos\theta}{\varepsilon}$ et, de même, $\frac{\partial v}{\partial y}(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta) = \frac{\sin\theta}{\varepsilon}$.

On obtient donc

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= -\varepsilon\ln\varepsilon\int_0^{2\pi}\left(\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial y}(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)\right)\mathrm{d}\theta \\ &\quad + \int_0^{2\pi}\varphi(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

Et comme φ est C^∞ sur $\mathbf{R}^2$, donc en particulier C^1 sur la boule de rayon 1, il existe $M\in\mathbf{R}_+$ tel que si $x^2+y^2\leqslant 1$ alors $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)\right|\leqslant M$ et $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\right|\leqslant M$. Alors, pour $\varepsilon\leqslant 1$, on a $\left|\int_0^{2\pi}\left(\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)+\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial y}(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)\right)\mathrm{d}\theta\right|\leqslant 4\pi M$ par inégalités triangulaires.En conclusion, on trouve bien $\left|I_\varepsilon - \int_0^{2\pi}\varphi(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)\mathrm{d}\theta\right|\leqslant C\varepsilon|\ln\varepsilon|$ avec $C=4\pi M$ indépendant de $\varepsilon\in]0,1]$.

(v) Comme φ est continue en particulier en $(0,0)$, $\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta) = \varphi(0,0)$; ceci implique (limite sous intégrale, par exemple par convergence dominée, φ étant bornée sur tout compact...) que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\varphi(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\varphi(0,0)\mathrm{d}\theta = 2\pi\varphi(0,0)$$

Comme de plus, $\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln\varepsilon = 0$, on obtient alors : $\int_{\mathbf{R}^2}\ln(\sqrt{x^2+y^2})\Delta\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi\varphi(0,0)$. Ceci correspond bien, d'après ce qui a été vu précédemment, à l'écriture (au sens des distributions et en identifiant $z=x+iy\in\mathbf{C}$ et $(x,y)\in\mathbf{R}^2$) : $\frac{1}{2\pi}\Delta\left(\ln(|z|)\right) = \delta_0$.

d) (i) Si f possédait un nombre infini de zéros dans $\mathcal{D}_R$, comme $\mathcal{D}_R$ est compact, on pourrait extraire de cet ensemble de zéros une suite convergente dans $\mathcal{D}_R$. Donc les zéros de f ne seraient pas isolés et donc f serait identiquement nulle sur $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}$ étant connexe, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi, f possède un nombre fini de zéros dans $\mathcal{D}_R$.

(ii) L'ensemble $\mathcal{B}_R$ est un ouvert non vide et simplement connexe de $\mathbf{C}$ sur lequel g ne s'annule pas (puisqu'elle ne s'annule pas sur $\mathcal{D}_R$). Donc il existe une fonction holomorphe h telle que $g = e^h$; autrement dit, il existe une détermination holomorphe de $\ln g$ sur $\mathcal{B}_R$. Comme $z \mapsto h(z)$ est holomorphe sur $\mathcal{B}_R$, d'après **II-2)a)**, sa partie réelle est harmonique. Or cette partie réelle est égale à $\ln(|g(z)|)$.

(iii) On a, pour tout $z \in K$, $\ln(|f(z)|) = \ln(|g(z)|) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \ln(|z - z_k|)$. Avec ce qui précède, linéarité du Laplacien et petite translation à partir de b)(iv) donnant $\Delta \ln(|z - z_k|) = 2\pi\delta_{z_k}$, sachant que le résultat précédent valait pour toute fonction test (C^∞ à support compact) et que les z_k désignaient les zéros de f sur une boule fermée contenant ledit compact, on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\Delta \ln(|f(z)|) = \sum_{\xi\in\mathbf{C}\ :\ f(\xi)=0} \delta_\xi.$$

III - Problème de Dirichlet sur le disque et formule intégrale de Poisson

1) Noyau de Poisson

a) Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $f_n\ :\ t \mapsto \left(\frac{r}{R}\right)^{|n|} e^{int}$ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ et, pour tout $k \in \mathbf{N}$, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $f^{(k)}(t) = (in)^k \left(\frac{r}{R}\right)^{|n|} e^{int}$. On a donc $|f^{(k)}(t)| = n^k \left(\frac{r}{R}\right)^{|n|}$ où la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^k \left(\frac{r}{R}\right)^{|n|}$ est convergente puisque $\left|\frac{r}{R}\right| < 1$. Le théorème de dérivation sous le signe somme implique alors que $t \mapsto P_R(r,t)$ est k fois dérivable sur $\mathbf{R}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et donc que $t \mapsto P_R(r,t)$ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.

b) Soit $r \in [0, R[$ et $t \in \mathbf{R}$.

(i) On découpe puis regroupe :

$$P_R(r,t) = 1 + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{r}{R}\right)^{|n|} e^{int} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{|n|} e^{int} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{|n|} (e^{-int} + e^{int})$$

(changement d'indice) d'où $P_R(r,t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos(nt)$. On a alors

$$P_R(r,t) = 1 + 2\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{re^{it}}{R}\right)^n\right) = 1 + 2\mathrm{Re}\left(\frac{re^{it}}{R}\frac{1}{1 - \frac{re^{it}}{R}}\right)$$

(série géométrique, sachant que $\left|\frac{r}{R}e^{it}\right| < 1$). En mettant tout sur le même dénominateur, on arrive à $P_R(r,t) = \mathrm{Re}\left(\frac{R+re^{it}}{R-re^{it}}\right)$. Enfin,

$$\mathrm{Re}\left(\frac{R + re^{it}}{R - re^{it}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{(R + re^{it})(R - re^{-it})}{R^2 - 2rR\cos(t) + r^2}\right) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(t) + r^2},$$

d'où la dernière égalité.

(ii) La fonction $t \mapsto P_R(r,t)$ est clairement continue et 2π-périodique sur $\mathbf{R}$, donc uniformément continue sur $\mathbf{R}$. En effet elle est uniformément continue sur $[0, 4\pi]$ par le théorème de Heine, donc $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\eta > 0$ tel que $\forall(x,y) \in [0, 4\pi]$, si $|x - y| < \eta$ alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Quitte à diminuer η, on peut supposer $\eta < 2\pi$. Alors pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, si $|x - y| < \eta$ et si, pour fixer les idées, $x \leqslant y$, alors avec $n = \left\lfloor\frac{x}{2\pi}\right\rfloor$, $0 \leqslant x - 2n\pi \leqslant y - 2n\pi \leqslant 4\pi$ et $|(x - 2n\pi) - (y - 2n\pi)| < \eta$ donc $|f(x) - f(y)| = |f(x - 2n\pi) - f(y - 2n\pi)| < \varepsilon$. La parité est triviale et la positivité est donnée par la positivité de $R^2 - r^2$ et celle de $t \mapsto R^2 - 2rR\cos(t) + r^2$ sur $\mathbf{R}$ (trinôme du second degré à coefficient dominant strictement positif et à racines complexes non réelles ; on pouvait aussi remarque que c'est le carré d'un module).

2)a) La fonction $|g|$ est continue sur $\mathcal{D}_1$ qui est un compact de $\mathbf{C}$ donc $|g|$ est bornée et atteint ses bornes sur $\mathcal{D}_1$; en particulier, elle y admet un maximum, donc il existe un $z_0 \in \mathcal{D}_1$ tel que pour tout $z \in \mathcal{D}_1$, $|g(z)| \leqslant |g(z_0)|$.

b) (i) $|g(z_0)| > 0$ donc $g(z_0) \neq 0$ et h est bien définie sur $\mathcal{D}_1$. De plus, par construction, pour tout $z \in \mathcal{D}_1$, on a

$$|g(z)| = |h(z)| = \sqrt{(\mathrm{Re}(h(z)))^2 + (\mathrm{Im}(h(z)))^2} \geqslant |\mathrm{Re}(h(z))| \geqslant \mathrm{Re}(h(z))$$

Et d'autre part, on a $|g(z)| \leqslant |g(z_0)| = |h(z_0)|$ avec $h(z_0) = \frac{|g(z_0)|}{g(z_0)} g(z_0) = |g(z_0)| \in \mathbf{R}$ donc $|h(z_0)| = \mathrm{Re}(h(z_0))$. Ainsi, on a bien pour tout $z \in \mathcal{D}_1$, $\mathrm{Re}(h(z)) \leqslant |g(z)| \leqslant \mathrm{Re}(h(z_0))$.

(ii) La fonction g est harmonique sur $\mathcal{B}_1$ donc h aussi et par conséquent ses parties réelle et imaginaire également. Donc $\Delta\varphi = 0$ sur $\mathcal{B}_1$ et $\Delta\psi_\varepsilon = 4\varepsilon > 0$ sur $\mathcal{B}_1$. La fonction ψ_ε étant de classe C^2 sur $\mathcal{B}_1$, si elle atteignait un maximum local sur $\mathcal{B}_1$, ce serait en un point critique et sa Hessienne en ce point aurait des valeurs propres négatives ou nulles. Ceci contredit le fait que $\Delta\psi_\varepsilon > 0$ puisque $\Delta\psi_\varepsilon$ est la trace de la Hessienne. Donc ψ_ε ne peut atteindre de maximum local sur $\mathcal{B}_1$. Comme elle est continue sur $\mathcal{D}_1$ qui est compact, elle atteint donc son maximum sur $\mathcal{C}_1$. Par conséquent, pour tout $(x, y) \in \mathcal{B}_1$,

$$\varphi(x, y) + \varepsilon(x^2 + y^2) \leqslant \max_{(x,y)\in\mathcal{C}_1} \varphi_\varepsilon(x, y) = \max_{(x,y)\in\mathcal{C}_1} \varphi(x, y) + \varepsilon.$$

Il suffit alors de passer à la limite $\varepsilon \to 0$ pour conclure que pour tout $(x, y) \in \mathcal{B}_1$,

$$\varphi(x, y) \leqslant \max_{(x,y)\in\mathcal{C}_1} \varphi(x, y).$$

(iii) Soit (x_0, y_0) un point de $\mathcal{C}_1$ tel que $\max\limits_{(x,y)\in\mathcal{C}_1} \varphi(x, y) = \varphi(x_0, y_0)$ et $\tilde{z}_0 = x_0 + iy_0$. On a alors bien, d'après ce qui précède (le fait que c'est encore vrai sur le cercle est immédiat), $\forall z \in \mathcal{D}_1$, $\mathrm{Re}(h(z)) \leqslant \mathrm{Re}(h(\tilde{z}_0))$.

(iv) Comme on a également pour tout $z \in \mathcal{D}_1$, $\mathrm{Re}(h(z)) \leqslant \mathrm{Re}(h(z_0))$, on obtient :

$$\mathrm{Re}(h(z_0)) = \mathrm{Re}(h(\tilde{z}_0)) = |g(z_0)|.$$

De plus, $|g(\tilde{z}_0)| = |h(\tilde{z}_0)| \geqslant \mathrm{Re}(h(\tilde{z}_0)) = |g(z_0)|$ donc comme $|g(z_0)| = \max\limits_{\mathcal{D}} |g|$ on obtient :

$$|g(\tilde{z}_0)| = |g(z_0)| = \max_{\mathcal{D}_1} |g|.$$

c) Avec ce qui précède, on a déjà que si $|g(z_0)| > 0$, alors $\max\limits_{z\in\mathcal{D}_1} |g(z)| = \max\limits_{z\in\mathcal{C}_1} |g(z)|$ puisque $\tilde{z}_0 \in \mathcal{C}_1$. Et si $|g(z_0)| = 0$ alors g est identiquement nulle sur $\mathcal{D}_1$ donc on a encore $\max\limits_{z\in\mathcal{D}_1} |g(z)| = 0 = \max\limits_{z\in\mathcal{C}_1} |g(z)|$.

d) On suppose qu'il existe deux solutions g_1 et g_2 au problème de Dirichlet sur le disque, c'est-à-dire : g_1 et g_2 continues sur $\mathcal{D}_1$ et à valeurs complexes, harmoniques sur $\mathcal{B}_1$ et égales à f sur $\mathcal{C}_1$. Alors $g = g_1 - g_2$ est continue sur $\mathcal{D}_1$, harmonique sur $\mathcal{B}_1$ et égale à 0 sur $\mathcal{C}_1$. Donc d'après ce qui précède, $\max\limits_{z\in\mathcal{D}_1} |g(z)| = \max\limits_{z\in\mathcal{C}_1} |g(z)| = 0$. Ceci implique $g_1 = g_2$ sur $\mathcal{D}_1$, d'où l'unicité de la fonction g solution au problème de Dirichlet sur le disque si une telle solution existe.

3)a) Pour tout $z \in \mathcal{B}_1$, en utilisant **III -1)b)**, on a

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_1(r, \theta - t) f(e^{it}) \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{1 + re^{i(\theta-t)}}{1 - re^{i(\theta-t)}}\right) (\phi_1(t) + i\phi_2(t)) \mathrm{d}t$$

d'où $g(z) = g_1(z) + ig_2(z)$ avec pour tout $k \in \{1,2\}$, $g_k(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{1+re^{i(\theta-t)}}{1-re^{i(\theta-t)}}\right)\phi_k(t)\mathrm{d}t$. Par conséquent, ϕ_k étant à valeurs réelles, en multipliant dénominateur et numérateur par e^{it} et avec $z = re^{i\theta}$, on obtient bien : pour tout $k \in \{1,2\}$, $g_k(z) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\phi_k(t)\mathrm{d}t\right)$.

b) Pour tout $t \in [0,2\pi]$, la fonction $z \mapsto \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\phi_k(t)$ est holomorphe sur $\mathcal{B}_1$ puisque $e^{it} \notin \mathcal{B}_1$. De plus, soit $\rho \in]0,1[$. Pour tout $z \in \mathcal{D}_\rho$, pour tout $t \in [0,2\pi]$,

$$\left|\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\phi_k(t)\right| \leqslant \frac{1+r}{1-r}|\phi_k(t)| \leqslant \frac{1+\rho}{1-\rho}|\phi_k(t)|$$

avec $t \mapsto \frac{1+\rho}{1-\rho}|\phi_k(t)|$ intégrable sur $[0,2\pi]$ donc par théorème d'holomorphie des intégrales à paramètres, $z \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\phi_k(t)\mathrm{d}t$ est holomorphe sur $\mathcal{D}_\rho$. Comme ceci est vrai pour tout $\rho \in]0,1[$, on en conclut que $z \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\phi_k(t)\mathrm{d}t$ est holomorphe sur $\mathcal{B}_1$. Par conséquent, d'après **II -2)a)**, g_1 et g_2 sont harmoniques sur $\mathcal{B}_1$ en tant que parties réelles de fonctions holomorphes et donc g est également harmonique sur $\mathcal{B}_1$.

4)a) Pour tout $k \in \mathbf{Z}$ et tout $z \in \mathcal{B}_1$, $\Psi(f_k)(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|}e^{in(\theta-t)}e^{ikt}\mathrm{d}t$. Par convergence normale de la série on en déduit

$$\Psi(f_k)(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|}e^{in\theta}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t}\mathrm{d}t\right)$$

avec $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t}\mathrm{d}t = 0$ si $n \neq k$ et 1 si $n = k$. Finalement, il vient bien $\Psi(f_k)(z) = r^{|k|}e^{ik\theta}$.

b) D'après **3)b)**, $\Psi(f_k)$ est harmonique sur $\mathcal{B}_1$. De plus, par construction, $\Psi(f_k) = f_k$ sur $\mathcal{C}_1$ et pour tout $z \in \mathcal{B}_1$, $\Psi(f_k)(z) = z^k$ si $k \in \mathbf{N}$ et $\Psi(f_k)(z) = \bar{z}^{-k}$ si $k \in \mathbf{Z}_-^*$. Donc pour tout $z \in \mathcal{D}_1$, on $\Psi(f_k)(z) = z^k$ si $k \in \mathbf{N}$ et $\Psi(f_k)(z) = \bar{z}^{-k}$ si $k \in \mathbf{Z}_-^*$, ce qui prouve la continuité de $\Psi(f_k)$ sur $\mathcal{D}_1$. Ainsi, $\Psi(f_k)$ est solution du problème problème de DIRICHLET sur le disque pour la fonction f_k.

5) Soit $p = \sum_{|k|\leqslant n} c_k f_k$ un polynôme trigonométrique. Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\Psi\left(\sum_{|k|\leqslant n} c_k f_k\right) = \sum_{|k|\leqslant n} c_k \Psi(f_k)$$

et donc $\Psi\left(\sum_{|k|\leqslant n} c_k f_k\right)$ est continue sur $\mathcal{D}_1$ comme somme de fonctions continues sur $\mathcal{D}_1$, harmonique sur $\mathcal{B}_1$ comme somme de fonctions harmoniques sur $\mathcal{B}_1$, et égale à p sur $\mathcal{C}_1$ car les $\Psi(f_k)$ sont égales aux f_k sur $\mathcal{C}_1$; c'est donc la solution du problème problème de DIRICHLET sur le disque pour la fonction p.

6)a) On a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_1(r,t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|}e^{int}\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{int}\mathrm{d}t$$

toujours par convergence normale de la série. Comme $\int_0^{2\pi} e^{int}\mathrm{d}t = 0$ si $n \neq 0$, on obtient $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_1(r,t)\mathrm{d}t = 1$.

b) Si f est continue sur $\mathcal{C}_1$, elle est bornée sur $\mathcal{C}_1$ donc $\sup\limits_{z\in\mathcal{C}_1}|f(z)| < +\infty$ et pour tout $z \in \mathcal{D}_1$,

$$|\Psi(f)(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|P_1(r,\theta-t)f(e^{it})\right|\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_1(r,\theta-t)|f(e^{it})|\mathrm{d}t$$

car $P_1(r,\theta-t)$ est positive pour tout $t\in\mathbf{R}$ (et les fonctions sont bien intégrables). On a donc

$$\left|\Psi(f)(z)\right| \leqslant \sup_{z\in\mathcal{C}}\left|f(z)\right|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_1(r,\theta-t)\mathrm{d}t$$

avec

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_1(r,\theta-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta-2\pi}^{\theta} P_1(r,t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_1(r,t)\mathrm{d}t = 1$$

par changement de variable affine puis 2π-périodicité de $t\mapsto P_1(r,\theta-t)$. On en conclut que $\sup\limits_{z\in\mathcal{D}_1}|\Psi(f)(z)| \leqslant \sup\limits_{z\in\mathcal{C}_1}|f(z)|$.

7) Par le théorème de Fejér, toute fonction continue est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques. Donc pour toute fonction f continue sur $\mathcal{C}_1$, il existe une suite $(p_n)_{n\in N}$ de polynômes trigonométriques convergeant uniformément vers f sur $\mathcal{C}_1$. Alors comme pour tout $z\in\mathcal{D}_1$, $\left|\Psi(f)(z)-\Psi(p_n)(z)\right| = \left|\Psi(f-p_n)(z)\right|$, on a d'après ce qui précède :

$$\sup_{z\in\mathcal{D}_1}|\Psi(f)(z)-\Psi(p_n)(z)| \leqslant \sup_{z\in\mathcal{C}_1}|f(z)-p_n(z)|$$

qui tend vers 0 quand $n\to\infty$. Ainsi, $\Psi(f)$ est limite uniforme des $\Psi(p_n)$. Or d'après la question précédente, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $\Psi(p_n)$ est continue sur $\mathcal{D}_1$, donc $\Psi(f)$ est également continue sur $\mathcal{D}_1$. D'après **2)**, $\Psi(f)$ étant harmonique sur $\mathcal{B}_1$, et égale par définition à f sur $\mathcal{C}_1$, $\Psi(f)$ est bien solution du problème de Dirichlet sur le disque unité pour f.

8) D'après ce qui précède, et en particulier l'unicité de la solution, si $\tilde{u}$ est une fonction continue sur $\mathcal{D}_1$ et si $\tilde{u}$ est harmonique sur $\mathcal{B}_1$, alors pour tout $z=re^{i\theta}$ dans $\mathcal{B}_1$, $\tilde{u}(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_1(r,\theta-t)\tilde{u}(e^{it})\mathrm{d}t$. Donc si u est une fonction continue sur $\mathcal{D}_R$ et si u est harmonique sur $\mathcal{B}_R$, comme $\tilde{u}\ :\ z\mapsto u(Rz)$ vérifie les hypothèses précédentes sur $\mathcal{D}_1$, on a pour tout $z=re^{i\theta}$ de $\mathcal{B}_R$,

$$u(z)=\tilde{u}\left(\frac{z}{R}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_1\left(\frac{r}{R},\theta-t\right)\tilde{u}(e^{it})\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_R(r,\theta-t)u(Re^{it})\mathrm{d}t.$$

IV - Formule de Poisson-Jensen

1)a) Si $(a,\omega)\in\mathbf{C}^2$ sont tels que $|a|<R$ et $|\omega|=R$ alors $|R^2-\bar{a}\omega|\neq 0$ et comme $R^2=\omega\bar{\omega}$,

$$\frac{R|\omega-a|}{|R^2-\bar{a}\omega|}=\frac{|\bar{\omega}|\ |\omega-a|}{R|\bar{\omega}-\bar{a}|}=1$$

b) Soit $|a|<R$. Alors $\frac{R^2}{|a|}>R$ donc en notant $\varepsilon=\frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{|a|}-R\right)$, on a, pour tout $z\in\mathcal{B}_{R+\varepsilon}$, $|z|<\frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{|a|}+R\right)<\frac{R^2}{|a|}$ et finalement $|R^2-\bar{a}z|\neq 0$. Comme $\mathcal{B}_{R+\varepsilon}$ est un ouvert simplement connexe de $\mathbf{C}$ et $z\mapsto R^2-\bar{a}z$ est holomorphe sur $\mathcal{B}_{R+\varepsilon}$, il existe une fonction holomorphe h telle que $R^2-\bar{a}z=e^{h(z)}$ ou encore $h(z)=\ln(R^2-\bar{a}z)$ sur $\mathcal{B}_{R+\varepsilon}$.

Ainsi, pour tout $z\in\mathcal{B}_{R+\varepsilon}$, $\ln(|R^2-\bar{a}z|)=\mathrm{Re}(h(z))$ donc avec **II-2)a)**, $u\ :\ z\mapsto\ln(|R^2-\bar{a}z|)$ est harmonique sur $\mathcal{B}_{R+\varepsilon}$. En particulier, u est continue sur $\mathcal{D}_R$ et harmonique sur $\mathcal{B}_R$ donc on en déduit avec **III-8)** que pour tout $z=re^{i\theta}$ tel que $|z|<R$,

$$u(z)=\ln(|R^2-\bar{a}z|)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_R(r,\theta-t)\ln(|R^2-\bar{a}Re^{it}|)\,\mathrm{d}t.$$

Avec **a)**, on obtient alors $\ln(|R^2-\bar{a}z|)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_R(r,\theta-t)\ln\left(R|Re^{it}-a|\right)\,dt$ et finalement

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_R(r,\theta-t)\ln|Re^{it}-a|\mathrm{d}t=\ln(|R^2-\bar{a}z|)-\ln R.$$

c) Soit donc $z \in \mathcal{B}_R$ fixé et $a \in \mathcal{C}_R$ donné. Quitte à changer de repère, on peut prendre $a = R$ et on pose $z = re^{i\theta} \in \mathcal{B}_R$ comme précédemment. Pour tout $x \in [0,1[$, $a_x = xR$ est dans $\mathcal{B}_R$ donc la formule précédente s'applique :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_R(r,\theta-t)\ln|Re^{it}-xR|\mathrm{d}t = \ln(|R^2-xRz|)-\ln R.$$

• Le terme de droite admet pour limite $\ln(|R^2-Rz|)-\ln R$ lorsque x tend vers 1 car $|z|<R$ et $x \mapsto \ln(|R^2-xRz|)-\ln R$ est continue sur $[0,1]$.

• Pour tout $t \in [0,2\pi]$, $\ln(|Re^{it}-xR|) = \ln R + \ln(|e^{it}-x|)$. Soit $h\ :\ (x,t) \mapsto \ln(|e^{it}-x|)$. On a toujours $|e^{it}-x| \geqslant |\sin t|$ (faire un dessin...) donc si $|e^{it}-x|<1$, $|\ln(|e^{it}-x|)| \leqslant |\ln(|\sin t|)|$ et sinon, $|\ln|e^{it}-x|| \leqslant \ln 2$. Il s'ensuit que pour tous $t \in [0,2\pi]$ et $x \in [0,1[$, $h(x,t) \leqslant |\ln|\sin t|| + \ln 2 = k(t)$. La fonction k ne dépend pas de x et on vérifie sans problème que $t \mapsto P_R(r,\theta-t)k(t)\mathrm{d}t$ est intégrable sur $[0,1]$ puisque $t \mapsto \ln t$ l'est. Le théorème de convergence dominée s'applique alors (la fonction $t \mapsto P_R(r,\theta-t)$ étant positive et bornée sur $[0,1]$) : $\lim_{x\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_R(r,\theta-t)\ln(|Re^{it}-xR|)\mathrm{d}t$ existe et vaut $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_R(r,\theta-t)\ln(|Re^{it}-R|)\mathrm{d}t$, ce qui achève de prouver le résultat.

2) La fonction g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}_R$ et elle admet un nombre fini de zéros sur $\mathcal{D}_{R+1}$ (cf **II-2)d)(i)**), donc il existe $\varepsilon \in]0,1[$ tel que g ne s'annule pas sur $\mathcal{B}_{R+\varepsilon}$. Comme $\mathcal{B}_{R+\varepsilon}$ est un ouvert simplement connexe, on peut alors trouver une fonction h holomorphe sur $\mathcal{B}_{R+\varepsilon}$ telle que $g = e^h$ et donc $\ln(|g|) = \mathrm{Re}(h)$ est harmonique sur $\mathcal{B}_R$ et continue sur $\mathcal{D}_R$. Avec **III-8)** on en déduit que pour tout $z = re^{i\theta}$ de $\mathcal{B}_R$, $\ln|g(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_R(r,\theta-t)\ln|g(Re^{it})|\,\mathrm{d}t$.

3) Ainsi, si $z = re^{i\theta} \in \mathcal{B}_R$, n'est ni un zéro ni un pôle de f, et avec les notations introduites :

$$\begin{aligned}
\ln(|f(z)|) &= \ln|g(z)| + \sum_{i=1}^m \ln(|z-a_i|) - \sum_{j=1}^n \ln(|z-b_j|)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_R(r,\theta-t)\ln|g(Re^{it})|\,\mathrm{d}t\\
&\quad + \sum_{i=1}^m \ln(|z-a_i|) - \sum_{j=1}^n \ln(|z-b_j|),
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_R(r,\theta-t)\ln(|g(Re^{it})|)\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_R(r,\theta-t)\ln|f(Re^{it})|\,\mathrm{d}t\\
&\quad -\sum_{i=1}^m \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_R(r,\theta-t)\ln(|Re^{it}-a_i|)\mathrm{d}t\\
&\quad +\sum_{i=1}^m \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_R(r,\theta-t)\ln(|Re^{it}-a_i|)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Avec ce qui précède, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_R(r,\theta-t)\ln(|g(Re^{it})|)\mathrm{d}t &= \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_0^{2\pi} P_R(r,\theta-t)\ln|f(Re^{it})|\,\mathrm{d}t\\
&\quad -\sum_{i=1}^m \ln\frac{|R^2-\bar{a}_i z|}{R} + \sum_{i=1}^m \ln\frac{|R^2-\bar{b}_i z|}{R}
\end{aligned}$$

et donc, en regroupant :

$$\ln|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_R(r,\theta-t)\ln|f(Re^{it})|\,\mathrm{d}t - \sum_{i=1}^m \ln\left|\frac{R^2-\overline{a_i}z}{R(z-a_i)}\right| + \sum_{j=1}^n \ln\left|\frac{R^2-\overline{b_j}z}{R(z-b_j)}\right|.$$

V - Points critiques de polynômes aléatoires aux racines identiquement distribuées - Cas où les racines sont distribuées non uniformément sur le cercle unité de $\mathbf{R}^2$

1) Critère de Weyl sur le segment $[0,1]$

a) • Le sens réciproque est immédiat : si pour toute fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{C}$ continue par morceaux sur $[0,1]$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(u_j) = \int_0^1 f$$

alors ceci est valable en particulier pour les fonctions indicatrices de segments $[a,b] \subset [0,1]$, donc pour tout segment $[a,b] \subset [0,1]$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{[a,b]}(u_j) = \int_0^1 \mathbf{1}_{[a,b]} = b-a$.

• Pour le sens direct, supposons $(u_j)_{j\in\mathbf{N}^*}$ équidistribuée dans $[0,1]$. Alors pour tout segment $[a,b] \subset [0,1]$, on $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{[a,b]}(u_j) = \int_0^1 \mathbf{1}_{[a,b]} = b-a$. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction en escaliers ; comme elle peut s'écrire comme une combinaison linéaire d'indicatrices de segments inclus dans $[0,1]$ (sachant qu'on a le droit à $a=b$), on obtient par linéarité que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(u_j) = \int_0^1 f$.

• Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ continue par morceaux sur $[0,1]$. Alors f est limite uniforme de fonctions en escaliers sur ce segment, donc il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de fonctions en escaliers telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbf{N}^*$ tel que si $m \geqslant M$, $\|f-g_n\| \leqslant \varepsilon$ (où $\|\cdot\|$ désigne la norme infinie). Soit alors $m \geqslant M$. Comme g_m est en escalier, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} g_m(u_j) = \int_0^1 g_m$ et il existe $N \geqslant M$ tel que si $n \geqslant N$, $\left|\int_0^1 g_m - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} g_m(u_j)\right| \leqslant \varepsilon$. Pour tout $n \geqslant N$, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(u_j)\right| &\leqslant \left|\int_0^1 f - \int_0^1 g_m\right| + \left|\int_0^1 g_m - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} g_m(u_j)\right| \\ &\quad + \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} g_m(u_j) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(u_j)\right| \leqslant 3\varepsilon\end{aligned}$$

par majorations classiques. Ceci prouve, puisque cela est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(u_j) = \int_0^1 f.$$

• Enfin, si $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{C}$ est continue par morceaux sur $[0,1]$, on peut l'écrire sous la forme $u+iv$ où u et v sont continues par morceaux sur $[0,1]$ et à valeurs réelles et on conclut par linéarité.

Ainsi, une suite $(u_j)_{j\in\mathbf{N}^*}$ est équidistribuée dans $[0,1]$ si et seulement si pour toute fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{C}$ continue par morceaux sur $[0,1]$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(u_j) = \int_0^1 f$.

b) Si $(u_j)_{j\in\mathbf{N}^*}$ est équidistribuée dans $[0,1]$, alors comme pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, la fonction $f_k : t \mapsto e^{2i\pi kt}$ est continue sur $[0,1]$ à valeurs complexes, d'après ce qui précède, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_k(u_j) = \int_0^1 f_k$. Or $\int_0^1 f_k(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 e^{2i\pi kt}\mathrm{d}t = 0$ par calcul élémentaire. Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{2i\pi k u_j} = 0$.

c) (i) • Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs réelles et vérifiant $f(0)=f(1)$. On peut la considérer comme la restriction à $[0,1]$ d'une fonction continue et périodique de période 1 sur $\mathbf{R}$, donc d'après le théorème de Weierstrass trigonométrique, f est la limite uniforme de polynômes trigonométriques. Or par linéarité, comme pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{2i\pi k u_j} = 0 = \int_0^1 f_k$ et que pour $k=0$ et $f_0 : t \mapsto 1$ on a encore $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{2i\pi 0 u_j} = 1 = \int_0^1 f_0$ et qu'en passant aux complexes conjugués (les u_j sont réels) la propriété reste vraie pour les $k \in \mathbf{Z}_-$, alors pour tout polynôme trigonométrique p on obtient encore $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} p(u_j) = \int_0^1 p(t)\mathrm{d}t$. On conclut par limite uniforme comme précédemment.

• Si f une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs réelles avec $f(0) \neq f(1)$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des fonctions g et h continues sur $[0,1]$, vérifiant $g(0) = g(1)$ et $h(0) = h(1)$, telles que $g \leqslant f \leqslant h$ et $\int_0^1 (h - g) \leqslant \varepsilon$. Alors il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$,

$$\begin{aligned} -2\varepsilon \leqslant \int_0^1 g - \int_0^1 h - \varepsilon &\leqslant \int_0^1 g - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n h(u_j) \leqslant \int_0^1 f - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n f(u_j) \\ &\leqslant \int_0^1 h - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n g(u_j) \leqslant \int_0^1 h - \int_0^1 g + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que l'on a encore $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n f(u_j) = \int_0^1 f$.

• Enfin, si f est continue sur $[0,1]$ à valeurs complexes ce qui précède montre que le résultat est valable pour sa partie réelle et sa partie imaginaire, donc on a bien encore

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n f(u_j) = \int_0^1 f.$$

(ii) Soit $[a,b] \subset [0,1]$ et soit $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$. Si $a < b$, pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < b - a$, on peut prendre par exemple h nulle sur $\left[0, \max\left(a - \frac{\varepsilon}{2}, 0\right)\right]$, affine sur $\left[\max\left(a - \frac{\varepsilon}{2}, 0\right), a\right]$, égale à f sur $[a,b]$, affine sur $\left[b, \min\left(b + \frac{\varepsilon}{2}, 1\right)\right]$ et nulle sur $\left[\min\left(b + \frac{\varepsilon}{2}, 1\right), 1\right]$ et g nulle sur $[0,a]$, affine sur $\left[a, a + \frac{\varepsilon}{2}\right]$, égale à f sur $\left[a + \frac{\varepsilon}{2}, b - \frac{\varepsilon}{2}\right]$, affine sur $\left[b - \frac{\varepsilon}{2}, b\right]$ et nulle sur $[b,1]$. Les fonctions g et h sont alors bien continues sur $[0,1]$, vérifient $g \leqslant f \leqslant h$ sur $[0,1]$ et $\int_0^1 (h-g) \leqslant \varepsilon$. Et si $a = b$, il suffit de prendre g nulle sur $[0,1]$ et h nulle sur $\left[0, \max\left(a - \frac{\varepsilon}{2}, 0\right)\right]$, affine sur $\left[\max\left(a - \frac{\varepsilon}{2}, 0\right), a\right]$, égale à 1 en a, affine sur $\left[a, \min\left(a + \frac{\varepsilon}{2}, 1\right)\right]$ et nulle sur $\left[\min\left(a + \frac{\varepsilon}{2}, 1\right), 1\right]$. On conclut alors comme en **1)a)** que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n f(u_j) = b - a$.

d) Si $\alpha \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ alors la suite $(u_j)_{j\in\mathbf{N}^*}$ définie par : pour tout $j \in \mathbf{N}^*$, $u_j = j\alpha - \lfloor j\alpha \rfloor$ est bien une suite de réels dans $[0,1]$ et vérifie pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $e^{2i\pi k\alpha} \neq 1$ donc

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n e^{2i\pi k u_j}\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{j=1}^n e^{2i\pi kj\alpha}\right| = \frac{1}{n}\left|e^{2i\pi k\alpha}\left(\frac{1 - e^{2i\pi kn\alpha}}{1 - e^{2i\pi k\alpha}}\right)\right| \leqslant \frac{1}{n}\frac{2}{|1 - e^{2i\pi k\alpha}|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $(u_j)_{j\in\mathbf{N}^*}$ est équidistribuée dans $[0,1]$ d'après le critère précédent.

2)a) Si ν est uniforme sur $[0,1]$ alors pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{E}(Z^k) = \int_0^1 e^{2ik\pi t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2ik\pi}\left(e^{2ik\pi} - e^0\right) = 0$.

b) (i) Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, puisque les variables aléatoires Θ_j sont indépendantes et identiquement distribuées, il en est de même (lemme des coalitions) pour les variables $e^{2i\pi k\Theta_j}$; de plus, par la question précédente, ces variables admettent pour espérance 0. La loi forte des grands nombres rappelée en début d'énoncé entraîne que $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n e^{2i\pi k\Theta_j}$ tend presque sûrement vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

(ii) Ceci signifie que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, il existe un sous-ensemble Ω'_k de Ω vérifiant $\mathbf{P}(\Omega'_k) = 1$ tel que pour tout $\in \Omega'_k$, $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n e^{2i\pi k\Theta_j(\omega)}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Soit $\Omega' = \bigcap_{k\in\mathbf{N}^*} \Omega'_k$. Le complémentaire $\overline{\Omega'}$ de Ω' est de probabilité nulle puisque

$$\mathbf{P}(\overline{\Omega'}) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbf{N}^*} \overline{\Omega'_k}\right) \leqslant \sum_{k\in\mathbf{N}^*} \mathbf{P}(\overline{\Omega'_k}) = 0$$

Donc $\mathbf{P}(\Omega') = 1$ et d'après ce qui précède, pour tout $\omega \in \Omega'$, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n e^{2i\pi k\Theta_j(\omega)}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

D'après le critère de WEYL, ceci implique que pour tout $\omega \in \Omega'$, la suite $(\Theta_j(\omega))_{j \in \mathbf{N}^*}$ est équidistribuée dans $[0,1]$ et donc que pour tout $\omega \in \Omega'$, pour tout $(a,b) \in [0,1]^2$ tel que $a \leqslant b$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{[a,b]}(\Theta_j(\omega)) = b - a.$$

(iii) Pour $(a,b) \in [0,1]^2$, $a \leqslant b$ fixés, pour tout $j \in N^*$, pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbf{1}_{[a,b]}(\Theta_j)(\omega) = 1$ si $\Theta_j(\omega)$ est dans $[a,b]$ et $\mathbf{1}_{[a,b]}(\Theta_j)(\omega) = 0$ sinon : $\mathbf{1}_{[a,b]}(\Theta_j)$ est donc une variable de BERNOULLI, dont le paramètre est égal à la probabilité que Θ_j soit dans $[a,b]$, c'est-à-dire, d'après les hypothèses de l'énoncé, $\nu([a,b])$. Autrement dit (le paramètre d'une BERNOULLI étant égal à l'espérance) $\mathbf{E}(\mathbf{1}_{[a,b]}(\Theta_j)) = \nu([a,b])$.

Comme les variables $\mathbf{1}_{[a,b]}(\Theta_j)$ sont indépendantes (coalitions) et identiquement distribuées, a loi forte des grands nombres implique que $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{[a,b]}(\Theta_j)$ tend presque sûrement vers $\nu([a,b])$ lorsque n tend vers $+\infty$. Il existe donc un sous-ensemble Ω'' de Ω vérifiant $\mathbf{P}(\Omega'') = 1$ tel que pour tout $\omega \in \Omega''$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{[a,b]}(\Theta_j)(\omega) = \nu([a,b])$.

On remarque alors que $\Omega' \cap \Omega'' \neq \varnothing$ (sinon, on aurait $\mathbf{P}(\Omega' \cup \Omega'') = \mathbf{P}(\Omega') + \mathbf{P}(\Omega'') = 2$...) et que pour $\omega \in \Omega' \cap \Omega''$, on a simultanément

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{[a,b]}(\Theta_j(\omega)) = b - a$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{[a,b]}(\Theta_j)(\omega) = \nu([a,b])$$

d'où $\nu([a,b]) = b - a$. Ceci achève de prouver que ν est uniforme sur $[0,1]$.

3)a) Pour tout $k \in \mathbf{N}$, $|a_k| = \left|\mathbf{E}(Z^{k+1})\right| \leqslant \mathbf{E}(|Z^{k+1}|)$ (propriété de l'espérance) et comme $|Z^{k+1}| = 1$ (variable constante), on a bien $|a_k| \leqslant 1$. On en déduit que, pour tout $z \in \mathcal{B}_1$, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \bar{a}_k |z|^k$ converge et par conséquent, la fonction $f \ : \ z \mapsto -\sum_{k=0}^{+\infty} \bar{a}_k z^k$ est bien définie sur la boule unité ouverte $\mathcal{B}_1$. Et même mieux, f est holomorphe sur $\mathcal{B}_1$ puisque ce qui précède prouve que le rayon de convergence de la série entière définissant f est supérieur ou égal à 1 et qu'une fonction somme de série entière est holomorphe sur son disque (ouvert) de convergence. Or, f est non identiquement nulle car on a supposé μ non uniforme et donc les a_k ne sont pas tous nuls. Ceci implique (voir les justifications en **II-2)d)**(i)) que pour tout $r \in]0,1[$, f admet un nombre fini N_r de zéros dans $\mathcal{D}_r$.

b) (i) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déjà, pour tout $z \in \mathcal{B}_1$, pour tout $\omega \in \Omega$, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $Z_j(\omega)$ est de module 1 donc $Z_j(\omega) \neq z$ et donc $V_n(z)$ est bien défini et

$$V_n(z) = \frac{P_n'(z)}{nP_n(z)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \prod_{k \neq j} (z - Z_k)}{n \prod_{k=1}^{n} (z - Z_k)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - Z_j}.$$

Il s'ensuit que

$$V_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - e^{2i\pi\Theta_j}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{e^{-2i\pi\Theta_j}}{ze^{-2i\pi\Theta_j} - 1} = -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{-2i\pi\Theta_j} \sum_{k=0}^{+\infty} (ze^{-2i\pi\Theta_j})^k$$

(somme de série géométrique convergente, pour tout $\omega \in \Omega$) et en arrangeant un peu (somme finie de séries convergentes) : $V_n(z) = -\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \bar{Z}_j^{k+1}\right) z^k$.

(ii) D'après la loi forte des grands nombres, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \bar{Z}_j^{k+1}$ tend presque sûrement vers a_k lorsque n tend vers $+\infty$. Il existe donc un sous-ensemble Ω'_k de Ω tel que $\mathbf{P}(\Omega'_k) = 1$ et pour tout $\omega \in \Omega'_k$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \bar{Z}_j^{k+1}(\omega) = a_k$ et en définissant comme précédemment $\Omega' = \bigcap_{k\in\mathbf{N}^*} \Omega'_k$ on a $\mathbf{P}(\Omega') = 1$ et pour tout $\omega \in \Omega'$, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \bar{Z}_j^{k+1}(\omega) = a_k$$

Soit alors $\omega \in \Omega'$. Pour tout K compact de $\mathcal{B}_1$, il existe $r \in]0,1[$ tel que $K \subset \mathcal{B}_r$. Ainsi, pour tout $z \in K$, $|V_n(z)(\omega) - f(z)| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \bar{Z}_j^{k+1}(\omega) - \bar{a}_k\right| r^k$ (série convergente puisque $|r| < 1$ et pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \bar{Z}_j^{k+1}(\omega) - \bar{a}_k\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} 1 + 1 = 2$).

Soit alors $\varepsilon > 0$. Il existe $k_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\sum_{k=k_0+1}^{+\infty} r^k < \frac{\varepsilon}{4}$ (reste de série convergente) d'où $\sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \bar{Z}_j^{k+1}(\omega) - \bar{a}_k\right| r^k < \frac{\varepsilon}{2}$. Et pour tout $k \in [\![0, k_0]\!]$, comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \bar{Z}_j^{k+1}(\omega) = \bar{a}_k$, il existe un N_k tel que pour tout $n \geqslant N_k$,

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \bar{Z}_j^{k+1}(\omega) - a_k\right| < \frac{\varepsilon}{2}(1-r).$$

En choisissant $N = \max(N_0, \ldots, N_{k_0})$, on a alors pour tout $n \geqslant N$, pour tout $z \in K$,

$$|V_n(z)(\omega) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}(1-r)\sum_{k=0}^{k_0} r^k + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ce qui précède prouve que $V_n(z)(\omega)$ tend vers $f(z)$ uniformément sur tout compact de $\mathcal{B}_1$ lorsque n tend vers $+\infty$.

c) (i) La fonction f ne s'annule pas sur $\mathcal{C}_r$ et est continue sur $\mathcal{C}_r$ (car holomorphe) donc, $\mathcal{C}_r$ étant un compact, $|f|$ y admet un minimum strictement positif m. Et comme $\omega \in \Omega'$, $V_n(z)(\omega)$ tend vers $f(z)$ uniformément sur $\mathcal{C}_r$. Il existe donc un $N \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant N$ et tout $z \in \mathcal{C}_r$, $|V_n(z)(\omega) - f(z)| < m \leqslant |f(z)|$.

Ou encore : pour tout $n \geqslant N$ et tout $z \in \mathcal{C}_r$, $\left|\frac{V_n(z)(\omega)}{f(z)} - 1\right| < 1$. Ceci implique que $\frac{V_n(z)(\omega)}{f(z)} \notin \mathbf{R}_-$ car si $\frac{V_n(z)(\omega)}{f(z)} \in \mathbf{R}_-$, alors on aurait $\left|\frac{V_n(z)(\omega)}{f(z)} - 1\right| = 1 - \frac{V_n(z)(\omega)}{f(z)} \geqslant 1$.

Ainsi, l'image de $\mathcal{C}_r$ par $\psi \ : \ z \mapsto \frac{V_n(z)(\omega)}{f(z)}$ est incluse dans $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$. Soit ln une détermination du logarithme complexe sur $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$; $z \mapsto \ln\psi(z)$ est alors une primitive de $\frac{\psi'}{\psi}$ sur $\mathcal{C}_r$ et donc

$$\int_{\mathcal{C}_r} \frac{\psi'}{\psi} = 0 = \int_{\mathcal{C}_r} \left(\frac{V'_n(z)(\omega)}{V_n(z)(\omega)} - \frac{f'(z)}{f(z)}\right) \mathrm{d}\lambda(z)$$

(ii) Si h est une fonction holomorphe au voisinage d'un point $a \in \mathbf{C}$ et possède un zéro d'ordre $m \in \mathbf{N}^*$ en a alors h est de la forme $z \mapsto (z-a)^m g(z)$ où g est holomorphe et ne s'annule pas au voisinage de a (les zéros de h étant isolés). On a alors $h'(z) = m(z-a)^{m-1}g(z) + (z-a)^m g'(z)$ d'où $\frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{m}{z-a} + \varphi(z)$ où $\varphi = \frac{g'}{g}$ est bien holomorphe au voisinage de a.

(iii) La fonction f est holomorphe sur $\mathcal{B}_r$: en notant $a_1, \ldots, a_p$ ses zéros dans $\mathcal{B}_r$ et $m_1, \ldots, m_p$ leurs multiplicités respectives, $f(z)$ est de la forme (avec la convention que le produit est égal à 1 i.e. $f(z) = g(z)$ si f n'admet pas de zéro dans $\mathcal{B}_r$) $\prod_{k=1}^{p}(z-a_k)^{m_k} g(z)$ où g est holomorphe et ne s'annule pas sur un voisinage de $\mathcal{D}_r$ (car f ne s'annule pas sur $\mathcal{C}_r$). Alors $\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{p} \frac{m_k}{z-a_k} + \frac{g'(z)}{g(z)}$ (cf. la question précédente) d'où en utilisant le théorème de Cauchy : $\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_r} \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{p} m_k + 0$ (puisque $\frac{g'}{g}$ n'a pas de pôles dans $\mathcal{D}_r$).

Ainsi, $\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_r}\frac{f'(z)}{f(z)}$ est bien égale au nombre N_r de zéros (comptés avec leur multiplicité) de f situés dans la boule ouverte $\mathcal{B}_r$.

Or, d'après ce qui précède, pour tout $n \geqslant N$, on a $\int_{\mathcal{C}_r}\frac{V_n'(z)(\omega)}{V_n(z)(\omega)}\mathrm{d}\lambda(z) = \int_{\mathcal{C}_r}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}\lambda(z)$. Avec le même raisonnement (et puisque $z \mapsto V_n(z)(\omega)$ vérifie les mêmes propriétés que f sur $\mathcal{D}_r$), pour tout $n \geqslant N$, $z \mapsto V_n(z)(\omega)$ admet exactement N_r zéros (comptés avec leur multiplicité) dans $\mathcal{B}_r$.

d) Soit alors K un compact inclus dans $\mathcal{B}_1$. Il existe un $r \in]0,1[$ tel que $K \subset \mathcal{B}_r$ (sinon, on pourrait contruire une suite d'éléments de K convergeant sur $\mathcal{C}_1$ ce qui contredirait le fait que K est inclus dans $\mathcal{B}_1$) et f ne s'annule pas sur $\mathcal{C}_r$ (car f possède un nombre fini de zéros dans tout disque fermé inclus dans $\mathcal{B}_1$: si pour tout $r' \in [r,1[$, f s'annulait sur $\mathcal{C}_{r'}$ on aurait une infinité de zéros par exemple dans le disque $\mathcal{D}_{\frac{1+r}{2}}$; quitte à prendre r un peu plus grand, on peut donc le choisir tel que f ne s'annule pas sur $\mathcal{C}_r$).

On reprend les notations et les résultats de la question précédente. Comme $z \mapsto P_n(z)(\omega)$ ne s'annule que sur le cercle unité, $z \mapsto P_n'(z)(\omega)$ a exactement le même nombre de zéros que $z \mapsto V_n(z)(\omega)$ dans $\mathcal{B}_r$ donc $z \mapsto P_n'(z)(\omega)$ a un nombre constant N_r de zéros dans $\mathcal{B}_r$ pour tout $n \geqslant N$, et donc au plus N_r zéros dans K pour tout $n \geqslant N$. Par conséquent, $\zeta(P_n')(\omega)(K)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Ceci étant vrai pour tout $\omega \in \Omega'$, ceci prouve que $\zeta(P_n')(K)$ tend presque sûrement vers 0 pour tout compact K inclus dans $\mathcal{B}_1$.

VI - Points critiques de polynômes aléatoires aux racines identiquement distribuées - Cas général

A. Un théorème de convergence dominée (et une première convergence en probabilité)

Dans toute la suite, on fixe ε un réel strictement positif.

1)a) (i) Soit $M > 0$. On a, pour tout $n \geqslant N_p$,

$$\begin{aligned}\int_X |f_n(.,x)|^{1+\delta}\mathrm{d}\nu(x) &= \int_X |f_n(.,x)|^{1+\delta}\mathbf{1}_{|f_n(.,x)|<M}\mathrm{d}\nu(x) + \int_X |f_n(.,x)|^{1+\delta}\mathbf{1}_{|f_n(.,x)|\geqslant M}\mathrm{d}\nu(x)\\ &\geqslant \int_X |f_n(.,x)|^{1+\delta}\mathbf{1}_{|f_n(.,x)|\geqslant M}\mathrm{d}\nu(x)\\ &\geqslant M^\delta \int_X |f_n(.,x)|\mathbf{1}_{|f_n(.,x)|\geqslant M}\mathrm{d}\nu(x)\\ &\geqslant M^\delta \Big|\int_X f_n(.,x)\mathbf{1}_{|f_n(.,x)|\geqslant M}\mathrm{d}\nu(x)\Big|.\end{aligned}$$

Par conséquent, on a l'inclusion

$$\left[\int_X |f_n(.,x)|^{1+\delta}\mathrm{d}\nu(x) \geqslant C_p\right] \supset \left[\Big|\int_X f_n(.,x)\mathbf{1}_{|f_n(.,x)|\geqslant M}\mathrm{d}\nu(x)\Big| \geqslant \frac{C_p}{M^\delta}\right].$$

On en déduit

$$\mathbf{P}\left(\Big|\int_X f_n(.,x)\mathbf{1}_{|f_n(.,x)|\geqslant M}\mathrm{d}\nu(x)\Big| \geqslant \frac{C_p}{M^\delta}\right) \leqslant \mathbf{P}\left(\int_X |f_n(.,x)|^{1+\delta}\mathrm{d}\nu(x) \geqslant C_p\right) < \frac{1}{p}.$$

Ainsi, on a bien, pour tout $M > 0$, pour tout $n \geqslant N_p$,

$$\mathbf{P}\left(\Big|\int_X f_n(.,x)\mathbf{1}_{|f_n(.,x)|\geqslant M}\mathrm{d}\nu(x)\Big| \geqslant \frac{C_p}{M^\delta}\right) < \frac{1}{p}.$$

(ii) Soit alors $M_p > 0$ tel que $\frac{C_p}{M_p^\delta} = \varepsilon$ (un tel nombre existe puisque $\delta > 0$). On a, pour cet M_p, pour tout $n \geqslant N_p$,

$$\left[\Big|\int_X f_n(.,x)\mathbf{1}_{|f_n(.,x)|\geqslant M_p}\mathrm{d}\nu(x)\Big| \geqslant \varepsilon\right] \subset \left[\Big|\int_X f_n(.,x)\mathbf{1}_{|f_n(.,x)|\geqslant M_p}\mathrm{d}\nu(x)\Big| \geqslant \frac{C_p}{M_p^\delta}\right]$$

et donc, pour tout $n \geqslant N_p$, $\mathbf{P}\left(\left|\int_X f_n(.,x)\mathbf{1}_{|f_n(.,x)|\geqslant M_p}\mathrm{d}\nu(x)\right| \geqslant \varepsilon\right) < \frac{1}{p}$.

b) (i) Par hypothèse,

$$\nu\left(\left\{x \in X \ : \ \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(|f_n(.,x)| \geqslant \varepsilon) = 0\right\}\right) = 1$$

donc avec $X' = \{x \in X \ : \ \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(|f_n(.,x)| \geqslant \varepsilon) = 0\}$, comme

$$\begin{aligned}\int_X \mathbf{P}(|f_n(.,x)| \geqslant \varepsilon)\mathrm{d}\nu(x) &= \int_{X'} \mathbf{P}(|f_n(.,x)| \geqslant \varepsilon)\mathrm{d}\nu(x) + \int_{X\setminus X'} \mathbf{P}(|f_n(.,x)| \geqslant \varepsilon)\mathrm{d}\nu(x) \\ &= \int_{X'} \mathbf{P}(|f_n(.,x)| \geqslant \varepsilon)\mathrm{d}\nu(x)\end{aligned}$$

on obtient par théorème de convergence dominée (une probabilité étant majorée par 1) que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X \mathbf{P}(|f_n(.,x)| \geqslant \varepsilon)\mathrm{d}\nu(x) = 0.$$

(ii) Le théorème de Fubini permet d'écrire

$$\mathbf{E}\left(\int_X \mathbf{1}_{|f_n(.,x)|\geqslant\varepsilon}\mathrm{d}\nu(x)\right) = \int_X \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{|f_n(.,x)|\geqslant\varepsilon}\right)\mathrm{d}\nu(x) = \int_X \mathbf{P}(|f_n(.,x)| \geqslant \varepsilon)\mathrm{d}\nu(x)$$

donc on a bien : $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}\left(\int_X \mathbf{1}_{|f_n(.,x)|\geqslant\varepsilon}\mathrm{d}\nu(x)\right) = 0$.

(iii) Avec l'inégalité de Markov (la variable $\int_X \mathbf{1}_{|f_n(.,x)|\geqslant\varepsilon}\mathrm{d}\nu(x)$ étant bien positive et admettant une espérance), on obtient

$$\mathbf{P}\left(\int_X \mathbf{1}_{|f_n(.,x)|\geqslant\varepsilon}\mathrm{d}\nu(x) \geqslant \frac{\varepsilon}{M}\right) \leqslant M\frac{\mathbf{E}\left(\int_X \mathbf{1}_{|f_n(.,x)|\geqslant\varepsilon}\mathrm{d}\nu(x)\right)}{\varepsilon}.$$

Avec ce qui précède, on en conclut $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\int_X \mathbf{1}_{|f_n(.,x)|\geqslant\varepsilon}\mathrm{d}\nu(x) \geqslant \frac{\varepsilon}{M}\right) = 0$.

(iv) On a par inégalités triangulaires et quitte à choisir $M > \frac{\varepsilon}{2}$:

$$\begin{aligned}\left|\int_X f_n(.,x)\mathbf{1}_{|f_n(.,x)|<M}\mathrm{d}\nu(x)\right| &\leqslant \left|\int_X f_n(.,x)\mathbf{1}_{\frac{\varepsilon}{2}\leqslant|f_n(.,x)|} < M|\mathrm{d}\nu(x)\right| \\ &\quad +\left|\int_X f_n(.,x)\mathbf{1}_{|f_n(.,x)|<\frac{\varepsilon}{2}}\mathrm{d}\nu(x)\right|,\end{aligned}$$

puisque ν est une mesure de probabilité, avec

$$\left|\int_X f_n(.,x)\mathbf{1}_{\frac{\varepsilon}{2}\leqslant|f_n(.,x)|} < M|\mathrm{d}\nu(x)\right| \leqslant M\int_X \mathbf{1}_{\frac{\varepsilon}{2}\leqslant|f_n(.,x)|} < M|\mathrm{d}\nu(x) \leqslant M\int_X \mathbf{1}_{\frac{\varepsilon}{2}\leqslant|f_n(.,x)|}|\mathrm{d}\nu(x).$$

On a donc

$$\mathbf{P}\left(\left|\int_X f_n(.,x)\mathbf{1}_{\frac{\varepsilon}{2}\leqslant|f_n(.,x)|} < M|\mathrm{d}\nu(x)\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant \mathbf{P}\left(\int_X \mathbf{1}_{|f_n(.,x)|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}}\mathrm{d}\nu(x) \geqslant \frac{\varepsilon}{2M}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

D'autre part, on a $\mathbf{P}\left(\left|\int_X f_n(.,x)\mathbf{1}_{|f_n(.,x)|<\frac{\varepsilon}{2}}\mathrm{d}\nu(x)\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0$. Comme par inégalités triangulaires, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\left|\int_X f_n(.,x)\mathbf{1}_{|f_n(.,x)|<M}\mathrm{d}\nu(x)\right| \geqslant \varepsilon\right) &\leqslant \mathbf{P}\left(\left|\int_X f_n(.,x)\mathbf{1}_{\frac{\varepsilon}{2}\leqslant|f_n(.,x)|} < M|\mathrm{d}\nu(x)\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &\quad +\mathbf{P}\left(\left|\int_X f_n(.,x)\mathbf{1}_{|f_n(.,x)|<\frac{\varepsilon}{2}}\mathrm{d}\nu(x)\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right),\end{aligned}$$

on en déduit que, pour $M > \frac{\varepsilon}{2}$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left|\int_X f_n(.,x)\mathbf{1}_{|f_n(.,x)|<M}\mathrm{d}\nu(x)\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$. Par ailleurs, si $M \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, on a directement pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}\left(\left|\int_X f_n(.,x)\mathbf{1}_{|f_n(.,x)|<M}\mathrm{d}\nu(x)\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$. Par conséquent, pour tout $M > 0$, on a bien $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left|\int_X f_n(.,x)\mathbf{1}_{|f_n(.,x)|<M}\mathrm{d}\nu(x)\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$.

c) Ainsi, d'après ce qui précède : pour $\varepsilon > 0$ fixé, pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, il existe un $M_p > 0$ et un $N_p \in \mathbf{N}$ tels que pour tout $n \geqslant N_p$, $\mathbf{P}\left(\left|\int_X f_n(.,x)\mathbf{1}_{|f_n(.,x)|\geqslant M_p}\mathrm{d}\nu(x)\right| \geqslant \varepsilon\right) < \frac{1}{p}$. De plus, pour cet M_p, $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left|\int_X f_n(.,x)\mathbf{1}_{|f_n(.,x)|<M_p}\mathrm{d}\nu(x)\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$, donc il existe $\tilde{N}_p \geqslant N_p$ tel que pour tout $n \geqslant \tilde{N}_p$, $\mathbf{P}\left(\left|\int_X f_n(.,x)\mathbf{1}_{|f_n(.,x)|<M_p}\mathrm{d}\nu(x)\right| \geqslant \varepsilon\right) < \frac{1}{p}$. Par inégalité triangulaire, on obtient alors, pour tout $n \geqslant \tilde{N}_p$, $\mathbf{P}\left(\left|\int_X f_n(.,x)\mathrm{d}\nu(x)\right| \geqslant 2\varepsilon\right) < \frac{2}{p}$. Ceci prouve (quitte à changer 2ε en ε) que $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left|\int_X f_n(.,x)\mathrm{d}\nu(x)\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$ et donc que $\left(\int_X f_n(.,x)\mathrm{d}\nu(x)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en probabilité vers 0.

2) Dans le cas où ν est une mesure positive finie quelconque, il suffit d'appliquer ce qui précède à $\tilde{\nu} = \frac{\nu}{\nu(X)}$ et le résultat s'ensuit.

B. Application (et seconde convergence en probabilité)

Soit $R \in \mathbf{R}_+^*$.

1) Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $\omega \in \Omega$ fixé. On note $x_{1,n}, \dots, x_{k_n,n}$ les zéros de $P_n(\omega)$ situés dans $\mathcal{D}_R$ et $y_{1,n}, \dots, y_{\ell_n,n}$ les zéros de $P_n'(\omega)$ situés dans $\mathcal{D}_R$ (on a donc $k_n \in [0,n]$ et $\ell_n \in [\![0, n-1]\!]$).

a) D'après **IV-3)**, on a bien, pour tout $z = \rho e^{i\theta} \in \mathcal{B}_R \setminus \{x_{1,n}, \dots, x_{k_n,n}, y_{1,n}, \dots, y_{\ell_n,n}\}$,

$$\ln(|L_n(z)|) = I_n(z,R) + \sum_{i=1}^{\ell_n} \ln\left(\left|\frac{R(z-y_{i,n})}{R^2 - \bar{y}_{i,n}z}\right(\right| - \sum_{j=1}^{k_n} \ln\left(\left|\frac{R(z-x_{j,n})}{R^2-\bar{x}_{j,n}z}\right|\right)$$

où on a noté : $I_n(z,R) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_R(\rho, \theta - t)\ln(|L_n(Re^{it})|)\mathrm{d}t$.

b) En se servant deux fois de **I-1)**, on obtient :

$$\frac{1}{n^2}\ln^2(|L_n(z)|) \leqslant \frac{3}{n^2} I_n(z,R)^2 + \frac{3\ell_n}{n^2}\sum_{i=1}^{\ell_n} \ln^2\left(\left|\frac{R(z-y_{i,n})}{R^2-\bar{y}_{i,n}z}\right|\right) + \frac{3k_n}{n^2}\sum_{j=1}^{k_n} \ln^2\left(\left|\frac{R(z-x_{j,n})}{R^2-\bar{x}_{j,n}z}\right|\right).$$

2) Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $r \in]0, R[$.

a) Par continuité de $(\rho, \tau) \mapsto P_R(\rho, \tau)$ sur $[0,r] \times [0, 2\pi]$ (compact), il existe bien une constante $M(r,R) > 1$ telle que pour tout $z = \rho e^{i\theta} \in \mathcal{B}_r$ et tout $t \in [0,2\pi]$, $\frac{1}{M(r,R)} < P_R(\rho, \theta - t) < M(r,R)$.

b) On utilise alors **I-3)** pour obtenir : $\ln_+(|L_n(Re^{it})|) \leqslant \sum_{k=1}^n \ln_-(|Re^{it} - Z_k|) + \ln n$.

c) On remarque déjà que si $z \notin \{\rho e^{i\theta} \ / \ \rho \in [R-1, R+1] \text{ et } \theta \in [0,2\pi]\}$, pour tout $t \in [0,2\pi]$, $\ln_-(|Re^{it} - z|) = 0$. Ensuite, pour $z = \rho e^{i\theta}$, $\int_0^{2\pi} \ln_-(|Re^{it} - z|)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \ln_-(|Re^{it} - \rho|)\mathrm{d}t$ donc

$$\sup_{z\in\mathbf{C}} \int_0^{2\pi} \ln_-(|Re^{it} - z|)\mathrm{d}t = \sup_{\rho\in[R-1,R+1]} \int_0^{2\pi} \max\left(-\ln(|Re^{it} - \rho|), 0\right)\mathrm{d}t.$$

Il suffit maintenant d'étudier $\rho \mapsto -\ln(|Re^{it} - \rho|)$ et de remarquer que cette fonction atteint son maximum en $\rho = R\cos t$. Par conséquent (on a bien $\ln(|\sin t|)$ intégrable sur $[0, 2\pi]$...), pour tout $\rho \in [R-1, R+1]$, on a

$$\int_0^{2\pi} \max\left(-\ln()|Re^{it} - \rho|), 0\right)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2\pi} \max\left(-2\ln(R|\sin t|), 0\right)\mathrm{d}t,$$

donc en posant

$$C(R)=\int_0^{2\pi}\max\left(-2\ln(R|\sin t|),0\right)\mathrm{d}t+1$$

on a bien : $\sup\limits_{z\in\mathbf{C}}\int_0^{2\pi}\ln_-(|Re^{it}-z|)\mathrm{d}t<C(R)$.

d) On en déduit que pour tout $n\in\mathbf{N}^*$ et pour tout $z=\rho e^{i\theta}\in\mathcal{B}_r$,

$$I_n(z,R)\leqslant\frac{M(r,R)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln_+(|L_n(Re^{it})|)\mathrm{d}t\leqslant\frac{M(r,R)}{2\pi}\left(\sum_{k=1}^n\int_0^{2\pi}\ln_-(|Re^{it}-Z_k|)\mathrm{d}t+2\pi\ln n\right).$$

Il s'ensuit que

$$I_n(z,R)\leqslant\frac{M(r,R)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln_+(|L_n(Re^{it})|)\mathrm{d}t\leqslant\frac{n}{2\pi}M(r,R)C(R)+M(r,R)\ln n.$$

Ainsi, $\frac{1}{n}I_n(z,R)\leqslant M(r,R)C(R)+M(r,R)\frac{\ln n}{n}$ et comme $x\mapsto\frac{\ln x}{x}$ est bornée sur $[1,+\infty[$, il existe une constante K telle que $\frac{1}{n}I_n(z,R)\leqslant M(r,R)C(R)+KM(r,R)$, et ce, pour tout $z\in\mathcal{B}_r$. On en déduit l'existence d'une constante $B_1(r,R)=M(r,R)C(R)+KM(r,R)$ telle que

$$\sup_{z\in\mathcal{B}_r}\frac{1}{n}I_n(z,R)\leqslant B_1(r,R)$$

3)a) En appliquant le théorème de Fubini, on obtient

$$\int_{\mathbf{C}}\left(\int_{\mathbf{C}}\frac{\mathbf{1}_{|y-z|<1}}{|y-z|}\mathrm{d}\mu(y)\right)\mathrm{d}\lambda(z)=\int_{\mathbf{C}}\left(\int_{\mathbf{C}}\frac{\mathbf{1}_{|y-z|<1}}{|y-z|}\mathrm{d}\lambda(z)\right)\mathrm{d}\mu(y)=2\pi$$

car pour tout $z\in\mathbf{C}$,

$$\int_{\mathbf{C}}\frac{\mathbf{1}_{|y-z|<1}}{|y-z|}\mathrm{d}\lambda(z)=\int_{\mathcal{B}_1}\frac{1}{|z|}\mathrm{d}\lambda(z)=\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{1}{r}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=2\pi$$

et μ est une mesure de probabilité.

b) On a

$$\int_{\mathbf{C}}\frac{\mathrm{d}\mu(y)}{|y-z|}=\int_{\mathbf{C}}\frac{\mathbf{1}_{|y-z|<1}}{|y-z|}\mathrm{d}\mu(y)+\int_{\mathbf{C}}\frac{\mathbf{1}_{|y-z|\geqslant 1}}{|y-z|}\mathrm{d}\mu(y)\leqslant\int_{\mathbf{C}}\frac{\mathbf{1}_{|y-z|<1}}{|y-z|}\mathrm{d}\mu(y)+1$$

et

$$\lambda\left(z\in\mathbf{C}\ :\ \int_{\mathbf{C}}\frac{\mathbf{1}_{|y-z|<1}}{|y-z|}\mathrm{d}\mu(y)=+\infty\right)=0$$

d'après la question précédente, d'où *a fortiori* $\lambda(A)=0$.

4) On suppose $0\notin A$.

a) On remarque que $h\ :\ z\mapsto\ln_-(|\frac{z}{R}|)-\ln_-(|z|)$ est bornée (facile), et nulle en dehors de la boule centrée en $z=0$ de rayon $\max(1,R)$ donc $\mathbf{E}(h(Z_1))$ est finie. De plus, par hypothèse $0\notin A$ donc $\int_{\mathbf{C}}\frac{\mathrm{d}\mu(y)}{|y|}<+\infty$ et, comme $-\ln(|z|)\underset{0}{=}o\left(\frac{1}{|z|}\right)$, on en déduit que $\mathbf{E}\left(\ln_-(|Z_1|)\right)=-\int_{D_1}\ln(|z|)\mathrm{d}\mu(z)$ est finie. Ceci prouve que $-\mathbf{E}\left(\ln_-\left(|\frac{Z_1}{R}|\right)\right)$ est également finie.

De plus, par définition, $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k_n}\ln\left(|\frac{x_{j,n}}{R}|\right)=-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k_n}\ln_-\left(|\frac{Z_j}{R}|\right)$; par la loi forte des grands nombres, les variables $\ln_-\left(|\frac{Z_1}{R}|\right)$ étant indépendantes (coalitions), identiquement distribuées et admettant toutes pour espérance $\mathbf{E}\left(\ln_-\left(|\frac{Z_1}{R}|\right)\right)$, on en déduit que

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k_n}\ln\left(|\frac{x_{j,n}}{R}|\right)=-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k_n}\ln_-\left(|\frac{Z_j}{R}|\right)$$

tend presque sûrement vers $-\mathbf{E}\left(\ln_-\left(\left|\frac{Z_1}{R}\right|\right)\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) On écrit la formule de Poisson-Jensen en $z=0$ et on divise par $n \in \mathbf{N}^*$ pour obtenir

$$\frac{1}{n}I_n(0,R) = \frac{1}{n}\ln\left(\left|L_n(0)\right|\right) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\ell_n}\ln\left(\left|\frac{y_{i,n}}{R}\right|\right) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k_n}\ln\left(\left|\frac{x_{j,n}}{R}\right|\right).$$

On a $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\ell_n}\ln\left(\left|\frac{y_{i,n}}{R}\right|\right) \leqslant 0$ par définition des $y_{i,n}$ donc $\frac{1}{n}I_n(0,R) \geqslant \frac{1}{n}\ln\left(\left|L_n(0)\right|\right)+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k_n}\ln\left(\left|\frac{x_{j,n}}{R}\right|\right)$. De plus, on a admis que ($z=0$ n'étant pas dans A) $\frac{1}{n}\ln(|L_n(0)|)$ convergeait en probabilité vers 0. Donc en posant $D(R) = \mathbf{E}\left(\ln_-\left(\left|\frac{Z_1}{R}\right|\right)\right)+1$, on a bien $D(R) \geqslant 0$ et

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(\frac{1}{n}I_n(0,R) \leqslant -D(R)\right) = 0.$$

c) Dans le cas général, soit $a \notin A$ (il en existe un...) : on se ramène au cas précédent en posant $Y_k = Z_k - a$.

5)a) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $z \in \mathcal{B}_r$, on a

$$\begin{aligned} I_n(z,R) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_R(\rho,\theta-t)\ln(|L_n(Re^{it})|)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_R(\rho,\theta-t)\ln_+(|L_n(Re^{it})|)\mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_R(\rho,\theta-t)\ln_-(|L_n(Re^{it})|)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

En utilisant **VI B-2)a)** et $\ln_+$ et $\ln_-$ fonctions positives, il vient

$$\frac{2\pi}{n}I_n(z,R) \geqslant \frac{1}{M(r,R)}\int_0^{2\pi}\frac{1}{n}\ln_+(|L_n(Re^{it})|)\mathrm{d}t - M(r,R)\int_0^{2\pi}\frac{1}{n}\ln_-(|L_n(Re^{it})|)\mathrm{d}t.$$

Puis, en utilisant

$$I_n(0,R) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln(|L_n(Re^{it})|)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln_+(|L_n(Re^{it})|)\mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln_-(|L_n(Re^{it})|)\mathrm{d}t$$

on obtient

$$-M(r,R)\int_0^{2\pi}\frac{1}{n}\ln_-(|L_n(Re^{it})|)\mathrm{d}t = M(r,R)\frac{2\pi}{n}\left(I_n(0,R) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln_+(|L_n(Re^{it})|)\mathrm{d}t\right).$$

On en déduit

$$\frac{2\pi}{n}I_n(z,R) \geqslant \frac{2\pi M(r,R)}{n}I_n(0,R) - \left(M(r,R) - \frac{1}{M(r,R)}\right)\int_0^{2\pi}\frac{1}{n}\ln_+(|L_n(Re^{it})|)\mathrm{d}t.$$

b) Avec **VI-B.2)d)**, on obtient

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{n}\ln_+(|L_n(Re^{it})|)\mathrm{d}t \leqslant C(R) + \frac{2\pi}{n}\ln n \leqslant C(R) + \frac{2\pi}{e}.$$

Ainsi, pour tout $z \in \mathcal{B}_r$, on a

$$\frac{2\pi}{n}I_n(z,R) \geqslant \frac{2\pi M(r,R)}{n}I_n(0,R) - \left(M(r,R) - \frac{1}{M(r,R)}\right)\left(C(R) + \frac{2\pi}{e}\right).$$

Par conséquent, il vient

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{n}I_n(z,R) \leqslant -B_2(r,R)\right) \leqslant \mathbf{P}\left(\frac{1}{n}I_n(0,R) \leqslant -D(R)\right)$$

en posant

$$B_2(r,R) = M(r,R)\left[D(R) + \left(M(r,R) - \frac{1}{M(r,R)}\right)\left(C(R) + \frac{2\pi}{e}\right)\right] > 0.$$

Comme ceci est valable pour tout $z \in \mathcal{B}_r$, et comme $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\frac{1}{n}I_n(0,R) \leqslant -D(R)\right) = 0$, on a alors bien

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\inf_{z\in\mathcal{B}_r} \frac{1}{n}I_n(z,R) \leqslant -B_2(r,R)\right) = 0.$$

6) D'après ce qui précède, pour tout $z \in \mathcal{B}_r$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\frac{3}{n^2}\int_{\mathcal{B}_r} I_n(z,R)^2 \mathrm{d}\lambda(z) > 6\pi r \ \max\left(B_1(r,R)^2, B_2(r,R)^2\right)\right) = 0$$

donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon = 6\pi r \ \max\left(B_1(r,R)^2, B_2(r,R)^2\right)$ et un certain rang N_ε à partir duquel

$$\mathbf{P}\left(\frac{3}{n^2}\int_{\mathcal{B}_r} I_n(z,R)^2 \mathrm{d}\lambda(z) > C_\varepsilon\right) < \varepsilon.$$

Ceci signifie que $\frac{3}{n^2}\int_{\mathcal{B}_r} I_n(z,R)^2 \mathrm{d}\lambda(z)$ est bornée en probabilité.

7)a) Comme $0 < r < R$, $(y,z) \mapsto \ln^2(|R^2 - \bar{y}z|)$ est majorée sur $\mathcal{D}_r^2$ par une constante strictement positive K en tant que fonction continue sur un compact et de plus, $\ln^2$ est localement intégrable sur $\mathbf{R}_+$, on peut donc écrire, pour tout $y \in \mathcal{B}_r$:

$$\int_{\mathcal{B}_r} \ln^2\left(\left|\frac{R(z-y)}{R^2 - \bar{y}z}\right|\right)\mathrm{d}\lambda(z) \leqslant 2\int_{\mathcal{B}_r} \ln^2(|R(z-y)|)\mathrm{d}\lambda(z) + 4\pi r K$$

(puisque $(A-B)^2 = A^2 + B^2 - 2AB$ et $2|AB| \leqslant A^2 + B^2$) et on peut décomposer, pour tout $\varepsilon > 0$, $\int_{\mathcal{B}_r} \ln^2(|R(z-y)|)\mathrm{d}\lambda(z)$ en

$$\int_{\mathcal{B}_r \cap \mathcal{B}(y,\varepsilon)} \ln^2|R(z-y)|\mathrm{d}\lambda(z) + \int_{\mathcal{B}_r \setminus \mathcal{B}(y,\varepsilon)} \ln^2|R(z-y)|\mathrm{d}\lambda(z)$$

avec la seconde intégrale bornée par $2\pi r \max(\ln^2(R\varepsilon), \ln^2(2rR))$ et la première intégrale inférieure ou égale à $\int_{\mathcal{B}(y,\varepsilon)} \ln^2|R(z-y)|\mathrm{d}\lambda(z) = \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \ln^2(|Rz|)\mathrm{d}\lambda(z)$, constante indépendante de y. En regroupant les morceaux, on en déduit l'existence d'une constante $C_1(r,R)$ telle que

$$\sup_{y\in\mathcal{B}_r} \int_{\mathcal{B}_r} \ln^2\left(\left|\frac{R(z-y)}{R^2 - \bar{y}z}\right|\right)\mathrm{d}\lambda(z) < C_1(r,R)$$

b) On a, avec **VI-B.1)b)**,

$$\frac{1}{n^2}\ln^2\left(|L_n(z)|\right)\frac{3}{n^2}I_n(z,R)^2 \leqslant \frac{3\ell_n}{n^2}\sum_{i=1}^{\ell_n} \ln^2\left(\left|\frac{R(z-y_{i,n})}{R^2 - \bar{y}_{i,n}z}\right|\right) + \frac{3k_n}{n^2}\sum_{j=1}^{k_n} \ln^2\left(\left|\frac{R(z-x_{j,n})}{R^2 - \bar{x}_{j,n}z}\right|\right).$$

Il s'ensuit que

$$\frac{1}{n^2}\ln^2(|L_n(z)|) - \frac{3}{n^2}I_n(z,R)^2 \leqslant \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{\ell_n} \ln^2\left(\left|\frac{R(z-y_{i,n})}{R^2 - \bar{y}_{i,n}z}\right|\right) + \frac{3}{n}\sum_{j=1}^{k_n} \ln^2\left(\left|\frac{R(z-x_{j,n})}{R^2 - \bar{x}_{j,n}z}\right|\right)$$

puisque k_n et ℓ_n sont le nombre de racines respectivement de P_n et P_n' dans $\mathcal{B}_r$ et ne dépassent donc pas n. Ainsi,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{B}_r}\left(\frac{1}{n^2}\ln^2(|L_n(z)|)-\frac{3}{n^2}I_n(z,R)^2\right)\mathrm{d}\lambda(z)\\&\quad\leqslant\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{\ell_n}\int_{\mathcal{B}_r}\ln^2\left(|\frac{R(z-y_{i,n})}{R^2-\bar{y}_{i,n}z}|\right)\mathrm{d}\lambda(z)+\frac{3}{n}\sum_{j=1}^{k_n}\int_{\mathcal{B}_r}\ln^2\left(|\frac{R(z-x_{j,n})}{R^2-\bar{x}_{j,n}z}|\right)\mathrm{d}\lambda(z).\end{aligned}$$

Avec ce qui précède, on en conclut que

$$\int_{\mathcal{B}_r}\left(\frac{1}{n^2}\ln^2(|L_n(z)|)-\frac{3}{n^2}I_n(z,R)^2\right)\mathrm{d}\lambda(z)\leqslant C_2(r,R)$$

en posant $C_2(r,R)=6C_1(r,R)$.

c) Comme $\frac{3}{n^2}\int_{\mathcal{B}_r}I_n(z,R)^2\mathrm{d}\lambda(z)$ est bornée en probabilité, on en déduit que $\frac{1}{n^2}\int_{\mathcal{B}_r}\ln^2(|L_n(z)|)\mathrm{d}\lambda(z)$ est également bornée en probabilité : en effet, pour tout $\varepsilon>0$, il existe C_ε et un certain rang N_ε tels que pour tout $n\geqslant N_\varepsilon$,

$$\mathbf{P}\left(\frac{3}{n^2}\int_{\mathcal{B}_r}I_n(z,R)^2\mathrm{d}\lambda(z)>C_\varepsilon\right)<\varepsilon$$

et on a, de plus, $\int_{\mathcal{B}_r}\frac{1}{n^2}\ln^2(|L_n(z)|)\mathrm{d}\lambda(z)\leqslant C_2(r,R)+\frac{3}{n^2}\int_{\mathcal{B}_r}I_n(z,R)^2\mathrm{d}\lambda(z)$ donc $\mathbf{P}\left(\int_{\mathcal{B}_r}\frac{1}{n^2}\ln^2(|L_n(z)|)\mathrm{d}\lambda(z)>C\right.$
$\mathbf{P}\left(\frac{3}{n^2}\int_{\mathcal{B}_r}I_n(z,R)^2\mathrm{d}\lambda(z)>C_\varepsilon\right)<\varepsilon$.

Ainsi, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\tilde{C}_\varepsilon=C_\varepsilon+C_2(r,R)$ et un certain rang N_ε tels que pour tout $n\geqslant N_\varepsilon$, $\mathbf{P}\left(\int_{\mathcal{B}_r}\frac{1}{n^2}\ln^2(|L_n(z)|)\mathrm{d}\lambda(z)>\tilde{C}_\varepsilon\right)<\varepsilon$. Et donc, $\frac{1}{n^2}\int_{\mathcal{B}_r}\ln^2(|L_n(z)|)\mathrm{d}\lambda(z)$ est bornée en probabilité.

8) Si Ψ est une fonction continue et à support compact sur $\mathbf{C}$ et à valeurs réelles, on a, en prenant pour $(X,\mathcal{A},\nu)$ l'ensemble $\mathbf{C}$ muni de la mesure de Lebesgue et de la tribu borélienne usuelle, un espace mesuré où $\nu=\lambda$ est bien une mesure (positive) finie, $(\Omega,\mathcal{B},\mathbf{P})$ l'espace probabilisé associé au problème, et la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies sur $\Omega\times\mathbf{C}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$ (muni de sa tribu borélienne usuelle) par : $f_n(.,z)=\left(\frac{1}{n}\ln(|L_n(z)|)\right)\Psi(z)$. Les propriétés suivantes sont alors satisfaites :

- pour tout $n\in\mathbf{N}$, f_n est $\mathcal{B}\times\mathcal{A}$ - mesurable.
- il existe $\delta=1>0$ pour lequel $\int_{\mathbf{C}}|f_n(.,z)|^{1+\delta}\mathrm{d}\lambda(x)$ est bornée en probabilité (cette propriété découle directement du **7)c)** puisque Ψ est bornée sur $\mathbf{C}$, étant continue à support compact, et en choisissant r de manière à ce que le support de Ψ soit inclus dans $\mathcal{B}_r$)
- pour presque tout $z\in\mathbf{C}$, $(f_n(.,z))_{n\in\mathbf{N}}$ converge en probabilité vers 0 (la multiplication par $\Psi(z)$, variable aléatoire constante, ne changeant rien à la convergence en probabilité vers 0).

Les hypothèses de la partie **VI-A** sont donc vérifiées : on peut conclure que la suite

$$\left(\frac{1}{n}\int_{\mathbf{C}}(\ln(|L_n(z)|))\,\Psi(z)\mathrm{d}\lambda(z)\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$$

converge en probabilité vers 0.

C. Démonstration du résultat

1) Du **II. 2)d)(iii)** et de la définition de $L_n(z)$, on déduit immédiatement que pour toute fonction de classe C^∞ à support compact dans $\mathbf{C}$, et à valeurs dans $\mathbf{R}$,

$$\frac{1}{2\pi n}\int_{\mathbf{C}}(\ln(|L_n(z)|))\,\Delta\varphi(z)\mathrm{d}\lambda(z)=\frac{1}{n}\sum_{z\in\mathbf{C}\ :\ P_n'(z)=0}\varphi(z)-\frac{1}{n}\sum_{z\in\mathbf{C}\ :\ P_n(z)=0}\varphi(z).$$

2) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, les zéros de P_n étant μ-identiquement distribués, on a par théorème de transfert que pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, $\mathbf{E}(\varphi(Z_k)) = \int_{\mathbf{C}} \varphi \, \mathrm{d}\mu$ et on conclut par la loi forte des grands nombres, sachant que $\frac{1}{n} \sum_{z \in \mathbf{C} \,:\, P_n(z)=0} \varphi(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi(Z_k)$:

$$\frac{1}{n} \sum_{z \in \mathbf{C} \,:\, P_n(z)=0} \varphi(z)$$

tend presque sûrement vers $\int_{\mathbf{C}} \varphi \, \mathrm{d}\mu$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3) Le terme de gauche de l'égalité du **VI-C.1)** converge en probabilité vers 0 d'après **VI-B.8)** (avec $\Psi(z) = \frac{1}{2\pi} \Delta\varphi(z)$) donc avec le résultat de la question précédente, on a bien que $\frac{1}{n} \sum_{z \in \mathbf{C} \,:\, P_n'(z)=0} \varphi(z)$ converge en probabilité vers $\int_{\mathbf{C}} \varphi \, \mathrm{d}\mu$, ce qui est le résultat recherché.

Chapitre 5

Épreuves orales : Algèbre et Géométrie ; Analyse et Probabilités ; Mathématiques–Option D ; Informatique fondamentale–Option D

5.1 Organisation générale des épreuves

Modalités. Pour les épreuves de leçons, les candidats tirent au sort un couple de sujets. Le candidat est libre de choisir le sujet qui lui plaît parmi ces deux sujets proposés, celui où il se sent le plus à même de mettre en valeur ses connaissances. Il n'a pas à justifier ou commenter son choix.

Les candidats préparent l'interrogation pendant 3 heures. Durant tout ce temps, ils ont libre accès aux livres de la bibliothèque de l'agrégation, à ceux mis à disposition par les préparations universitaires ou à leurs propres ouvrages. Seuls sont autorisés les ouvrages avec un numéro ISBN et jouissant d'un minimum de diffusion commerciale. L'attention des candidats est attirée sur le fait que l'ISBN ne suffit pas, une « diffusion commerciale avérée » est tout autant importante. Ainsi, un polycopié de cours, propre à un établissement, même muni d'un ISBN, pourra être refusé. Cette restriction est motivée par le principe d'égalité des candidats : les ressources documentaires autorisées doivent être facilement accessibles à tout candidat au concours. Les ouvrages imprimés par les candidats eux-mêmes (ou les bibliothèques universitaires) ne sont pas autorisés et les livres doivent être vierges d'annotation. Il n'est pas autorisé non plus de venir avec des livres dont certaines pages auraient été marquées au préalable, fût-ce de manière amovible, au moyen de post-it par exemple. (Il est toutefois possible de se munir de tels marque-pages à apposer durant la préparation.) Le représentant du directoire présent lors de la préparation peut interdire tout ouvrage personnel ou envoyé par une préparation universitaire. Évidemment, les notes personnelles, manuscrites ou dactylographiées, ne sont autorisées ni pendant l'épreuve proprement dite, ni pendant la préparation. Il est possible, et même recommandé, de venir muni d'un exemplaire du rapport du jury de l'agrégation externe de mathématiques, complet, relié et sans annotation. Les candidats n'ont pas accès à Internet et la possession d'un dispositif de communication ou de stockage de données (téléphone, calculatrice, clé USB, montre connectée,...) serait considérée comme une tentative de fraude, susceptible d'entraîner l'exclusion du concours. À l'issue de cette phase de préparation, le jury fait procéder à la photocopie des plans de la leçon élaborés par les candidats. Le temps de préparation est décompté dès l'ouverture des enveloppes contenant les sujets. Lorsque les plans des leçons sont ramassés pour leur reproduction, les candidats disposent encore de quelques minutes pour finaliser leur réflexion et ils peuvent, bien sûr, continuer à noter leurs idées sur leurs brouillons qu'ils emmèneront en salle d'interrogation.

Les plans sont donc des documents manuscrits, communiqués à la commission d'interrogation. Ils comportent *au maximum 3 pages* au format A4, éventuellement complétées par une page de figures. Les candidats doivent veiller à la lisibilité de leur document, en tenant en compte le fait qu'ils vont être photocopiés : écrire suffisament gros, soigner la présentation, faire apparaître des titres, éviter l'utilisation de couleurs,... Le candidat doit clairement signaler sur ce plan les résultats qu'il estime significatifs, représentatifs de la leçon et qu'il propose de développer devant le jury.

L'épreuve s'organise en trois temps, prévus pour une durée totale de *55 minutes environ* : une présentation du plan de la leçon éventuellement suivie d'une brève discussion, un développement de 15 minutes maximum et enfin une partie consacrée au dialogue et aux questions. *Le candidat peut utiliser sa copie du plan pendant toute l'épreuve*. Pendant la première phase de l'interrogation consacrée à la présentation du plan, il peut utiliser toutes les notes manuscrites produites durant la préparation. Le développement doit quant à lui se faire sans utiliser ces notes manuscrites ; si le plan comporte lui-même trop de détails sur les développements proposés, le jury peut restreindre l'utilisation de ce document durant cette seconde phase de l'épreuve.

Commentaires généraux. Le jury met en garde contre trois écueils qui peuvent altérer les performances des candidats :

— *le hors-sujet*. Le hors-sujet se manifeste de deux manières, qui dans tous les cas sont lourdement sanctionnées. Quelques candidats prennent des libertés quant au libellé de la leçon et s'en écartent notablement : les titres des leçons définissent le champ précis qu'il faut traiter. Par ailleurs, le jury constate l'abus de « recyclage » de thèmes plus ou moins classiques, mais qui ne sont pas exploités avec à propos dans les leçons et qui, parfois, prennent une place sans commune mesure avec leur importance mathématique.

— une mauvaise évaluation des attentes et du niveau, conduisant à un *défaut de maîtrise*. Le rapport distingue très clairement des niveaux différents auxquels peuvent être abordées les leçons. Trop de candidats proposent plan et développements au dessus de leur niveau, une stratégie qui ne peut pas être payante, tant ils se mettent en perdition lors de l'épreuve. Des connaissances des bases fermement maîtrisées et intelligemment utilisées valent mieux qu'un étalage artificiel de savoirs emmagasinés sans recul et à peine digérés, voire pas assimilés du tout. Une maîtrise avérée et solide des bases assure déjà une note très convenable, certainement de nature à permettre l'admission, en l'état du concours.

— *la fatigue et le stress*. Une grande majorité des candidats se présente avec une forte charge émotionnelle, à la mesure de l'enjeu et de leur investissement personnel, qui peut nuire à l'expression de leurs connaissances. Cela est d'autant plus vrai que l'épreuve ne se réduit pas à la simple récitation d'un cours mais à un échange avec le jury et donc, là encore, à une réflexion personnelle, à une prise de hauteur et à la démonstration, dans un temps court, non seulement de la maîtrise technique mais aussi de l'aptitude à construire un raisonnement. Le jury est pleinement conscient de ces difficultés et s'emploie à en réduire les effets négatifs en mettant en pratique une posture de bienveillance constante. Le jury ne cherche en rien à déstabiliser le candidat pendant l'épreuve, mais au contraire cherche à valoriser les connaissances du candidat. Les premières questions, parfois très simples, visent souvent à préciser une notation, un point du plan ou du développement, pour que le jury s'assure de la compréhension par le candidat des notions qu'il vient d'exposer et non pour lui tendre un quelconque piège. Mettre le candidat en confiance, le respecter, l'écouter, poser des questions ouvertes, permettre au candidat déstabilisé de se reprendre sans l'acculer au silence, stimuler le dialogue sont autant d'objectifs que s'assignent les membres du jury.

Une liste d'énoncés, quelque sophistiqués qu'ils soient, ne peut suffire à convaincre le jury. Il faut savoir motiver les énoncés et expliquer comment ils s'enchaînent et en quoi ils sont pertinents.

Les leçons doivent donc être illustrées avec des exemples judicieusement choisis. De nombreux titres de leçons se terminent d'ailleurs par « exemples et applications » : le jury attend donc que le plan soit riche en exemples et applications et/ou que le candidat puisse en développer lors de la présentation de son plan.

Liste des leçons. Depuis la session 2017, afin d'aider les candidats et les préparateurs, le jury annonce dans son rapport la liste des leçons qui seront utilisées l'année suivante. On trouvera donc en annexe les leçons qui seront utilisées pour la session 2020 du concours. Cette liste est aussi reprise sur le site agreg.org. Cette pratique peut conduire à une certaine sclérose. Aussi, afin de conserver un minimum de dynamisme et éviter un rabâchage nuisible dans les préparations, le jury souhaite faire évoluer régulièrement cette liste, par des reformulations, des suppressions ou l'introduction de nouveaux sujets de réflexion. Si des titres disparaissent, cela ne signifie en rien, le programme étant stable par ailleurs, que les notions qui y sont liées deviennent de moindre importance. Le rapport indique d'ailleurs des pistes permettant d'exploiter ces notions sous d'autres intitulés. Les commentaires qui suivent prennent en compte les évolutions de la liste des leçons qui seront proposées. Le jury espère que candidats et préparateurs sauront se saisir de ces indications pour proposer des développements originaux : il n'y a pas de format standard et des manières différentes d'aborder les leçons peuvent toutes permettre d'obtenir d'excellents résultats.

La rédaction des commentaires sur les leçons tente de distinguer les notions « de base », incontournables pour l'intitulé proposé et dont la maîtrise est attendue des candidats, et des suggestions d'ouverture. Ces suggestions sont de niveaux variés et peuvent concerner des champs différents, par exemple qui trouvent leurs motivations dans des problématiques propres aux options de modélisation. Certaines pistes se placent aussi aux frontières du programme et peuvent faire écho à des sujets spécialisés abordés durant la formation du candidat. Il ne s'agit là que de propositions qui ne revêtent aucun caractère obligatoire, introduites par des formulations comme « pour aller plus loin » ou « si les candidats le désirent »... ; le jury n'attend certainement pas un balayage exhaustif de ces indications et il n'est pas nécessaire de développer les éléments les plus sophistiqués pour obtenir une note élevée. Enfin, certains commentaires font part de l'expérience du jury pour évoquer le dosage pas toujours approprié entre théorie et exemples, souligner des points de faiblesse qui méritent une attention particulière ou mettre en garde contre de possibles écueils (oublis, hors-sujets, erreurs fréquentes, positionnement mal à propos, etc).

Les leçons proposées ont toutes leurs spécificités qu'un principe unique ne saurait résumer ou englober. Une partie des sujets sont très délimités, alors que certains intitulés de leçons sont très ouverts et obligent le candidat à opérer des choix thématiques et de points de vue. Ces sujets sont pensés pour offrir de multiples points d'entrée, avec une échelle de niveaux techniques assez large, l'objectif étant de permettre à l'ensemble des candidats de s'exprimer au mieux et de mettre en valeur leurs connaissances. La pertinence des choix adoptés et leur motivation au regard de l'intitulé de la leçon entrent alors tout particulièrement dans l'appréciation, ainsi, bien entendu, que la maîtrise du contenu proposé. Ces leçons de synthèse exigent certainement un important recul ; elles réclament un effort conséquent de réflexion et méritent tout particulièrement d'être préparées en amont du concours. En retour, elles permettent de consolider un matériel mathématique qui peut être réinvesti avec profit dans d'autres thèmes.

5.1.1 Première partie : présentation de la leçon

Dans cette première phase de l'épreuve, le candidat est convié à utiliser son temps de parole, *6 minutes maximum*, pour présenter, argumenter, mettre en valeur et faire une synthèse de sa leçon.

Pour cette partie de l'épreuve, le candidat devrait s'imaginer dans la situation où il doit introduire à un auditoire, pendant 6 minutes, une leçon destinée ensuite à être développée sur plusieurs séances. Quel est l'intérêt du sujet ? Comment se positionne-t-il dans un paysage mathématique plus large ?

Comment s'articulent les différentes sections qui composent la leçon ? Comment s'expliquent et se motivent les enchaînements ? Comment se hiérarchisent les résultats et les difficultés ? Il s'agit aussi de s'interroger sur les enjeux didactiques de la leçon, c'est-à-dire dans quel ordre et comment présenter les choses pour que le tout soit cohérent, compréhensible et pédagogiquement efficace. De plus, cette présentation doit être illustrée. Des exemples doivent bien mettre en évidence les difficultés, faire ressortir le rôle des hypothèses et décrire des applications met en valeur l'intérêt des résultats. Enfin, des figures peuvent aussi contribuer à expliquer les idées maîtresses. Si l'enjeu principal est d'argumenter la construction du plan de la leçon, il est aussi parfois pertinent de mettre en valeur les liens logiques et l'intérêt des notions présentées dans d'autres domaines (sans forcément les introduire dans le plan écrit).

Le rapport du concours indique des pistes pour chaque leçon ; il ne s'agit que de suggestions que le candidat n'est pas tenu de suivre et qui ne constituent pas une trame obligatoire pour le plan. Notamment le rapport distingue clairement le cœur des leçons et des extensions dont le contenu peut être techniquement plus exigeant. La vocation de ces commentaires n'est donc pas d'être repris de manière exhaustive ; il ne s'agit que de guider les candidats dans leur auto-évaluation et les encourager à présenter des notions avec lesquelles ils sont à l'aise. Notamment, ils peuvent tout à fait exploiter des notions ou des applications qui trouvent leur motivation dans les options de modélisation qu'ils ont choisies.

Il existe maintenant de nombreux plans *tout faits* disponibles dans la littérature, plus ou moins pertinents, de plus ou moins grande valeur. Il est naturel que les candidats s'inspirent de sources de qualité et, d'une certaine manière, le choix de ces sources, la capacité à s'en affranchir ou à pleinement se les approprier, participent au regard que le jury peut porter sur leur maturité scientifique. Il est bien entendu que se contenter simplement de recopier un plan ou le réciter par cœur n'a pas d'intérêt. Le jury ne cherche pas des plans absolument originaux, le plus important est que le plan soit bien structuré, maîtrisé par le candidat et qu'y figure une quantité substantielle d'exemples et de mathématique. Exploiter des ouvrages de référence n'a rien de condamnable, mais le jury attend que le candidat fasse preuve d'un investissement personnel sur le sujet et qu'il explique pourquoi il adopte cette présentation et qu'il soit en mesure de la commenter. Le jury met aussi en garde les candidats sur le fait que la plupart des livres « de leçons » sont le fruit du travail de mathématiciens professionnels aguerris : la présentation des leçons qui y est faite est généralement (très) ambitieuse, exhaustive et dépasse souvent le contenu attendu pour obtenir déjà une très bonne note. S'inspirer de telles références est louable mais requiert un indispensable travail d'appropriation, d'adaptation et de personnalisation.

Il s'agit d'une épreuve *orale*. Le document écrit transmis au jury se justifie pour servir de base pour la discussion et constitue un fil conducteur qui guide le jury pour mener la partie consacrée au dialogue et aux questions. Ce plan ne doit être ni une énumération d'énoncés, ni un cours ou un exposé complet avec développement des démonstrations. En revanche, il doit définir avec suffisamment de précision les notions mathématiques introduites, donner les énoncés complets (notamment les hypothèses) des résultats fondamentaux, citer des exemples et des applications. Le plan est important puisqu'il calibre l'ensemble de la leçon, il détermine l'orientation et le niveau choisis par le candidat. Les choix doivent être motivés lors de la présentation et éventuellement lors de la discussion avec le jury. Il est nécessaire d'être en mesure de démontrer les résultats importants et de pouvoir les illustrer avec des exemples simples. Soigner la présentation d'un document écrit qui sert de support pour un cours est une compétence professionnelle importante du métier d'enseignant. Aussi, la formalisation mathématique et le français doivent être soignés, ainsi que la mise en forme, autant que possible dans le temps de préparation imparti : ces éléments ne peuvent que faciliter les interactions avec le jury. Il est contre-productif de chercher à remplir à tout prix les 3 feuilles autorisées, surtout avec des éléments que le candidat ne maîtrise manifestement pas.

Un exposé oral qui se réduit à relire simplement ce qui est écrit sur le document photocopié n'a pas beaucoup d'intérêt. Trop de candidats se contentent d'une présentation linéaire, sans expliquer ou mettre en valeur les articulations du plan, ni faire ressortir les méthodes ou les résultats importants. Il est inutile de recopier le plan au tableau, puisque le jury dispose d'une copie de ce document. Toutefois le jury encourage les candidats à exploiter le tableau comme support pédagogique. Faire apparaître la structure de la leçon, illustrer une difficulté technique ou le principe d'une démonstration par une figure... permet au candidat de s'affranchir de ses notes et rend l'exposé plus vivant. La présentation orale, la qualité d'expression, la compréhension synthétique, la plus-value de l'exposé par rapport au plan écrit, la capacité du candidat à intéresser son auditoire sur une leçon donnée, constituent des éléments importants d'évaluation. Le jury se réjouit d'ailleurs des progrès constatés cette année sur cette partie de l'épreuve.

Le jury attache une grande importance à la *maîtrise du plan* qui intervient de manière substantielle dans la grille de notation. Le plan ne peut être considéré comme maîtrisé si l'exposé ressemble à une récitation. Les résultats exposés doivent être compris ainsi que l'organisation d'ensemble de la leçon. Il est souhaitable que le candidat connaisse dans leurs grandes lignes les démonstrations des résultats figurant au programme du concours. Il est indispensable que le candidat ait une idée assez claire de la difficulté des démonstrations des résultats qu'il évoque dans son plan. Le jury rappelle qu'il n'est pas nécessaire de s'aventurer au-delà des contours du programme pour prétendre à une très bonne note ! Plus généralement, il vaut mieux se cantonner à un niveau où l'on se sait solide plutôt que de chercher à placer des énoncés débordant du programme mais sans le recul, ni l'assurance technique nécessaires. Bien entendu, réussir cette partie de l'épreuve ne s'improvise pas et le discours doit avoir été réfléchi durant la préparation de l'épreuve, et plus largement tout au long du parcours qui conduit les candidats jusqu'au concours.

À la fin de cette présentation de la leçon, le jury peut éventuellement questionner très brièvement le candidat et aborder quelques points techniques, sans entrer dans des détails qui retarderaient le début du développement.

5.1.2 Deuxième partie : le développement

Le jury demande au candidat de proposer *deux développements au moins*. Il s'agit de résultats représentatifs de la leçon que le candidat est en mesure d'exposer en détail et sans notes.

Proposer un seul développement ou des développements de niveaux trop disparates conduit à une minoration de la note. Ces propositions de développements doivent être clairement mentionnées sur le plan écrit et non pas vaguement évoquées à l'oral. Dans cet esprit, le candidat motivera soigneusement le choix des développements qu'il propose, expliquant en quoi il estime que ces résultats ou énoncés sont centraux ou jouent à ses yeux un rôle particulier sur le sujet. Le candidat doit aussi préciser, sur son plan écrit, ce qu'il va démontrer et, le cas échéant, les résultats de son plan qu'il va admettre pour mener à bien son développement. Il faut prendre garde dans ce choix à ne pas déclarer admis un énoncé majeur qui, une fois acquis, rend l'objet du développement trivial. De même il faut prendre garde aux « raisonnements circulaires » en faisant appel à un énoncé qu'on interpréterait comme une conséquence de celui qu'on cherche à démontrer. De telles maladresses sont perçues comme un défaut de maîtrise et de recul qui est pénalisé.

Le jury choisit le développement qui va être effectivement exposé par le candidat. Le candidat dispose de 15 minutes (maximum) pour mener à bien son développement. La gestion du temps est une des difficultés de l'épreuve. Un exposé trop court est le signe d'un sujet mal choisi, inapproprié au concours ; une démonstration inachevée dans le temps imparti témoigne d'un manque de maîtrise. Le jury demande au candidat de bien gérer son tableau, en particulier le candidat doit demander aux membres du jury l'autorisation d'effacer. Lors du développement, le jury attend du candidat des explications sur la preuve et sur l'utilisation pertinente des notions développées durant l'exposé oral ; il peut être opportun, lors du développement, de se référer explicitement au plan présenté. Trop peu de candidats commencent leur développement par une rapide synthèse des grandes idées ou des étapes qui le composent. Expliquer l'approche adoptée, et les difficultés, au début du développement est une démarche pédagogique appréciée. Un ou plusieurs dessins peuvent aider à clarifier la discussion technique. Il est inutile de se précipiter ou de parler trop vite ; on veillera au contraire à préciser ses notations, à soigner sa présentation, à placer sa voix et à regarder de temps en temps le jury. Le développement ressemble parfois à une succession plus ou moins convaincante de résultats intermédiaires *ad hoc*. Cette phase de l'épreuve vise à mettre en valeur des qualités pédagogiques autant que techniques et l'exposé doit faire la preuve de la compréhension du sujet par le candidat. La récitation mécanique d'un développement ne peut pas être convaincante ; le jury veille à ce que les futurs enseignants comprennent ce qu'ils exposent et sachent exposer ce qu'ils comprennent. C'est une qualité essentielle d'un futur agrégé. Un choix judicieux des notations utilisées contribuent à la clarté de l'exposé ; par exemple il peut être maladroit de noter deux polynômes P et P'... surtout si on doit travailler avec les dérivées de ceux-ci. Enfin, même si le jury laisse évoluer le candidat durant son développement, en intervenant le moins possible, il peut, en cas de lacunes ou d'erreurs manifestes, interrompre le candidat pour demander des explications. Cette intervention ne donne pas droit à une extension du temps consacré au développement.

Le jury veille à la cohérence du plan et des propositions de développements. Il est souhaitable que le candidat recherche une adéquation entre le niveau auquel il souhaite se placer et les développements proposés. Un candidat ne sera pas avantagé s'il présente un développement non maîtrisé, manifestement mal compris. Si le niveau de l'agrégation ne peut se cantonner aux notions abordées dans une classe de Terminale ou une première année post-bac, trop de candidats se lancent, curieusement, dans des propositions, parfois aux limites du programme, qui dépassent largement leur niveau technique. Dans un cas comme dans l'autre, il en résulte une appréciation négative. Le développement doit être en lien direct avec le thème de la leçon présentée. L'utilisation d'un résultat qui n'apparaît pas dans le plan écrit doit être explicitement signalée par le candidat. Toute utilisation d'un lemme non démontré et enfermant l'essence de la preuve est sanctionnée. Le jury peut exiger la démonstration d'un lemme admis, si celui-ci est essentiellement le cœur du développement. Il faut éviter de présenter ou d'utiliser un résultat préliminaire ou intermédiaire sans explication convaincante. Dans le cas d'un développement difficile, il ne faut pas négliger les cas élémentaires et les détails utiles à la compréhension du jury. Le jury déplore l'abus de certains développements plus ou moins classiques, qui ne sont pas toujours utilisés à bon escient et qui occupent parfois une place disproportionnée (l'ellipsoïde de JOHN, la décomposition de DUNFORD, le théorème de BERNSTEIN, le processus de GALTON-WATSON,...). Trop de candidats ont tendance à replacer exagérément et de manière inappropriée de tels développements et se retrouvent ainsi hors sujet, impair qui est sévèrement sanctionné. Il faut aussi veiller au fait que des thèmes peuvent être exploités dans des leçons différentes... mais avec des points de vue différents, qu'il faut savoir mettre en exergue.

Le programme du concours comprend maintenant un chapitre spécifique consacré aux méthodes numériques. Les candidats sont invités à explorer ce champ, éventuellement en s'appuyant sur leurs connaissances spécifiques à l'option de modélisation qu'ils ont choisie, pour proposer des développements originaux en lien avec l'analyse d'algorithmes de calcul. La description des leçons indique quelques pistes dans cette direction. Le jury se réjouit qu'un nombre croissant de candidats saisisse ces opportunités et espère que cette tendance, qui enrichit les contenus, se renforcera.

La pertinence des explications, le souci pédagogique, la capacité à mener à bien et complètement le sujet dans le temps imparti, l'aisance technique sont des éléments importants d'appréciation. Par ailleurs, le candidat doit s'attendre à être interrogé lors de la période de discussion sur des applications ou illustrations élémentaires de son développement. Il est donc essentiel qu'il soit capable de reconnaître dans une question donnée un cas particulier simple du résultat général qu'il vient d'exposer.

5.1.3 Troisième partie : questions et dialogue

Le jury teste systématiquement la maîtrise du plan présenté. Une part importante de la discussion porte donc sur le plan, ou trouve sa source dans le plan présenté par le candidat. Il faut éviter que ce plan dépasse largement le niveau que l'on maîtrise. Le candidat doit se préparer à des questions élémentaires voire considérées comme « évidentes » sur tout énoncé mis dans son plan, questions auxquelles il doit répondre avec précision. Des candidats après des prestations relevées ont parfois pu être surpris par de telles questions portant sur les bases ; elles sont pourtant quasi-systématiques, le jury souhaitant précisément s'assurer de la maîtrise de ces bases. Le jury peut aussi proposer des calculs illustrant les notions évoquées par le plan.

Cette phase de l'épreuve requiert un certain recul qui ne peut être que le fruit d'un travail de préparation approfondi en amont du concours où l'on doit se demander si on est capable de mettre en œuvre des énoncés sur des situations simples et, pour certains théorèmes, réfléchir à des exemples ou des contre-exemples.

Les réponses aux questions des examinateurs ne prennent pas forcément une forme unique et ceux-ci se placent dans une posture de dialogue avec le candidat. Le jury pose aussi des exercices en rapport direct avec la leçon et le plan proposé mais ne s'attend pas à ce que le candidat trouve une solution immédiatement. Ces exercices ont plutôt pour objectif de voir évoluer le futur agrégé dans une démarche scientifique rigoureuse et méthodique. Le candidat doit réfléchir, utiliser son plan et rattacher l'exercice à sa leçon. Le fait de ne pas résoudre un exercice ne doit pas être perçu comme un échec et le candidat ne doit pas se décourager : plus qu'achever l'exercice, ce sont les réactions du candidat qui importent (par exemple en identifiant l'énoncé de la leçon qui permettrait de traiter le problème et en se demandant si les hypothèses d'application sont satisfaites). Dans cette partie de l'épreuve le candidat doit faire preuve de capacité d'écoute, qui est aussi évaluée ; il doit rester attentif aux suggestions du jury. Il est souvent utile d'exploiter le tableau pour bien reformuler la question, formaliser les pistes de réflexion et donner un support écrit à l'échange. Pendant cette discussion, le jury veille à laisser un temps raisonnable au candidat pour réfléchir, sans le submerger de questions.

Enfin, l'objet du concours étant de recruter de futurs enseignants, le jury peut aussi, comme l'indique l'article 8 de l'arrêté du 25 juillet 2014, poser toute question qu'il juge utile *lui permettant d'apprécier la capacité du candidat, en qualité de futur agent du service public d'éducation, à prendre en compte dans le cadre de son enseignement la construction des apprentissages des élèves et leurs besoins, à se représenter la diversité des conditions d'exercice du métier, à en connaître de façon réfléchie le contexte, les différentes dimensions (classe, équipe éducative, établissement, institution scolaire, société) et les valeurs qui le portent, dont celles de la République. Le jury peut, à cet effet, prendre appui sur le référentiel des compétences professionnelles des métiers du professorat et de l'éducation fixé par l'arrêté du 1er juillet 2013.*

5.2 L'épreuve orale d'algèbre et géométrie

S'il est attendu que les candidats connaissent les énoncés fondamentaux de la leçon qu'ils traitent, il est non moins important d'être en mesure de les mettre en œuvre et de savoir les appliquer à des cas simples. Par exemple il est indispensable de savoir

— justifier qu'une matrice est diagonalisable ou en déterminer un polynôme annulateur ;

— effectuer des manipulations élémentaires sur les éléments appartenant à diverses structures algébriques standards ($\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, $\mathfrak{S}_n$, $\mathbf{F}_q$, etc.) ;

— mettre en œuvre des algorithmes exposés dans le plan (opérations élémentaires sur des systèmes ou des déterminants, réduction de Gauss d'une forme quadratique, etc.).

Comme y invite clairement l'intitulé de l'épreuve, les exemples et applications motivés par la géométrie sont particulièrement bienvenus. Les thèmes relevant de la théorie des groupes se prêtent tout particulièrement à de telles illustrations. De plus, les connaissances spécifiques à chacune des trois options A, B et C fournissent des exemples d'applications très appréciés par le jury. Les notions de quotients sont importantes, il est important à ce stade de dominer la projection canonique et, surtout, les subtilités du passage au quotient dans le cadre d'un morphisme. La théorie des représentations est naturellement reliée à bon nombre de leçons. En dehors des leçons directement concernées, les représentations peuvent figurer naturellement dans les leçons 101, 102, 103, 104, 105, 106, 150, 151 et 154.

Certains développements trouvent naturellement leur place dans des leçons différentes. Toutefois, le point de vue n'est en général pas le même et les éléments de démonstration à mettre en avant, voire la motivation du résultat, changent suivant l'intitulé. Il est important d'avoir bien conscience de cet aspect et de savoir justifier la pertinence de ces développements dans le cadre de la leçon traitée.

Les remarques qui suivent sont spécifiques à chaque leçon et permettent aux candidats de mieux saisir les attentes du jury sur chacun de ces sujets. On y distingue clairement ce qui constitue le cœur du sujet d'éléments plus sophistiqués et ambitieux, qui dépassent cette base.

101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Dans cette leçon, au-delà de la présentation du matériel théorique indispensable, le choix, l'organisation et la pertinence des illustrations sont des éléments forts de l'appréciation. Les deux facettes de l'action d'un groupe G sur un ensemble X doivent être maîtrisées : l'application de $G \times X$ vers X et le morphisme de G vers $\mathfrak{S}(X)$. La relation entre orbite et stabilisateur qui en découle est incontournable ainsi que des exemples de son utilisation. Il faut savoir utiliser des actions bien choisies pour obtenir des informations soit sur un ensemble X donné, soit sur un groupe G donné et faire apparaître des sous-groupes intéressants de G comme stabilisateurs. Par ailleurs, la présentation doit illustrer comment l'étude des orbites de certaines actions revient à classifier certains objets, soit en trouvant un représentant simple de chaque orbite, soit en dégageant des invariants caractérisant les orbites. Les actions de groupes interviennent aussi efficacement dans des problèmes de dénombrements, notamment via la formule de Burnside.

Les exemples peuvent être internes à la théorie des groupes (action naturelle de $\mathfrak{S}_n$ sur $\{1, ..., n\}$, action par translation ou par conjugaison, etc). Mais il est souhaitable d'emprunter aussi à d'autres domaines (action sur des anneaux, des espaces de matrices ou des espaces de polynômes, représentations de groupes, groupes d'isométries, etc). La géométrie fournit aussi de nombreux exemples pertinents (groupes d'isométries d'un solide ou d'un polygone régulier).

Pour aller plus loin, on peut aborder l'action de $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{K})$ sur la droite projective menant au birapport ou celle de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré ou les preuves par actions de groupes des théorèmes de Sylow ou encore d'autres actions donnant lieu à des isomorphismes exceptionnels. Il est aussi possible de s'intéresser aux aspects topologiques ou différentiels liés à certaines actions.

102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

Cette leçon ne peut faire l'impasse sur les aspects élémentaires du sujet (définitions, exponentielle complexe, trigonométrie, etc.), mais elle ne doit s'y cantonner. Elle doit aborder l'aspect « groupe » de S^1 en considérant son lien avec $(\mathbf{R}, +)$ et en examinant ses sous-groupes (en particulier finis). Il faut aussi envisager des applications en géométrie plane. Plus généralement, la leçon invite à expliquer où et comment les nombres complexes de module 1 et les racines de l'unité apparaissent dans divers domaines des mathématiques : spectres de matrices remarquables, polynômes cyclotomiques, représentations de groupes, etc. On peut également s'intéresser aux sous-groupes compacts de $\mathbf{C}^*$

Pour aller plus loin, on peut s'intéresser aux nombres de module 1 et aux racines de l'unité dans $\mathbf{Q}[i]$, ou à la dualité des groupes abéliens finis (notamment la preuve du théorème de structure par prolongement de caractère) ou encore aux transformées de FOURIER discrètes et rapides.

Des aspects analytiques du sujet peuvent être évoqués (théorème de relèvement, logarithme complexe, analyse de Fourier sur $\mathbf{R}^n$) mais ne doivent occuper ni le coeur de l'exposé, ni l'essentiel d'un développement.

103 : Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

Pour la session 2020 le titre cette leçon évolue en

Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

Dans cette leçon, le jury souhaite que les candidats mettent tout d'abord l'accent sur la conjugaison dans un groupe. Ensuite, ils doivent expliciter la structure de groupe obtenue sur le quotient d'un groupe par un sous-groupe distingué.

La notion de conjugaison doit être illustrée dans des situations variées : groupes de petit cardinal, groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, groupe linéaire d'un espace vectoriel, groupe affine d'un espace affine, groupe orthogonal, etc. Il est bon de montrer que la conjugaison aide à résoudre certains problèmes (par exemple, en transformant un élément en un autre plus simple à manipuler ou en considérant l'action par conjugaison). L'étude des classes de conjugaison de divers groupes peut être menée. Dans le cadre d'une action d'un groupe, il faut penser que les stabilisateurs d'éléments d'une même orbite sont conjugués. On peut aussi illustrer et utiliser le principe du « transport par conjugaison » voulant que hgh^{-1} ait la même « nature géométrique » que g et que ses caractéristiques soient les images par h des caractéristiques de g (conjugaison d'une transvection, d'une translation, d'une réflexion, etc.).

Concernant la notion de sous-groupe distingué, il faut indiquer en quoi c'est précisément la notion qui permet de munir le quotient d'une structure de groupe héritée. Cette notion permet aussi de donner une caractérisation interne des produits directs. Le lien entre sous-groupe distingué et noyau de morphisme ϕ est incontournable ainsi que l'isomorphisme $G/\mathrm{Ker}\phi \cong \mathrm{Im}\phi$. Des exemples bien choisis mettent en évidence comment certains problèmes portant sur l'un des deux groupes G ou G/H peuvent être résolus en utilisant l'autre (par exemple, le lien entre les sous-groupes de l'un et de l'autre). L'examen de la simplicité de certains groupes peut être proposé.

Il est important de s'attarder sur l'utilité des notions présentées. Les applications en arithmétique sont nombreuses, mais il est pertinent de présenter aussi des applications en géométrie ou en algèbre linéaire. On peut ainsi expliquer comment l'étude des classes de conjugaison permet de démontrer la simplicité de certains groupes comme SO_n, étudier le groupe des homothéties-translations distingué dans le groupe affine, établir que les groupes orthogonaux de formes quadratiques congruentes sont conjugués ou encore qu'un sous groupe compact de $\mathrm{GL}(n)$ est conjugué à un sous groupe de $\mathrm{O}(n)$. En algèbre linéaire, des propriétés topologiques de la classe de conjugaison d'un endomorphisme permettent d'établir son caractère diagonalisable ou nilpotent. Enfin, on peut interpréter le discriminant d'une forme quadratique non-dégénérée comme élément du quotient $\mathbf{K}^\times/(\mathbf{K}^\times)^2$.

S'ils le désirent, les candidats peuvent poursuivre en illustrant ces notions en théorie des représentations des groupes finis (classes de conjugaison et nombres de représentations irréductibles, treillis des sous-groupes distingués lu dans la table de caractères, liens entre représentations de G et de G/H, etc.). La notion de produit semi-direct et les théorèmes de SYLOW débordent du programme. Il est possible de les évoquer, mais en veillant à les illustrer par des exemples et des applications.

104 : Groupes finis. Exemples et applications.

Cet intitulé ne sera pas utilisé pour la session 2020 ; il est remplacé par le nouveau titre

Groupes abéliens et non abéliens finis. Exemples et applications.

La richesse de cette leçon ne doit pas nuire à sa présentation. Le candidat devra sans doute faire des choix qu'il doit être en mesure de justifier.

La notion d'ordre (d'un groupe, d'un élément et d'un sous-groupe) est très importante dans cette leçon ; le théorème de LAGRANGE est incontournable. Les groupes $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et $\mathfrak{S}_n$ sont des exemples très pertinents. Pour ces groupes, il est indispensable de savoir proposer un générateur ou une famille de générateurs. Dans $\mathfrak{S}_n$, il faut savoir calculer un produit de deux permutations et savoir décomposer une permutation en produit de cycles à supports disjoints. Le théorème de structure des groupes abéliens finis doit figurer dans cette leçon. Sa démonstration est techniquement exigeante, mais il faut que l'énoncé soit bien compris, en particulier le sens précis de la clause d'unicité, et être capable de l'appliquer dans des cas particuliers. Il est important de connaître les groupes d'ordre premier ainsi que les groupes d'ordre inférieur à 7.

Les exemples doivent figurer en bonne place dans cette leçon. L'étude des groupes d'isométries laissant fixe un polygone (ou un polyèdre) régulier peut être opportunément exploitée sous cet intitulé. Afin d'illustrer leur présentation, les candidats peuvent aussi s'intéresser à des groupes d'automorphismes ou à des représentations de groupes, ou étudier les groupes de symétries $\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{A}_5$ et relier sur ces exemples géométrie et algèbre.

Pour aller plus loin, les candidats peuvent s'attarder sur la dualité dans les groupes abéliens finis. Comme application, la cyclicité du groupe multiplicatif d'un corps fini est tout à fait adaptée. Des exemples de caractères, additifs, ou multiplicatifs dans le cadre des corps finis, sont les bienvenus. Il est aussi possible de s'intéresser aux sommes de GAUSS. S'ils le désirent, les candidats peuvent ensuite introduire la transformée de FOURIER discrète qui pourra être vue comme son analogue analytique, avec ses formules d'inversion, sa formule de PLANCHEREL. Ainsi, la leçon peut mener à introduire la transformée de FOURIER rapide sur un groupe abélien dont l'ordre est une puissance de 2 ainsi que des applications à la multiplication d'entiers, de polynômes et éventuellement au décodage de codes via la transformée de HADAMARD.

105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

Parmi les attendus, il faut savoir relier la leçon avec les notions d'orbites et d'actions de groupes. Il faut aussi savoir décomposer une permutation en cycles à supports disjoints, tant sur le plan théorique (preuve du théorème de décomposition), que pratique (sur un exemple). Il est important de savoir déterminer les classes de conjugaisons du groupe symétrique par la décomposition en cycles, d'être capable de donner des systèmes de générateurs. L'existence du morphisme signature est un résultat non trivial mais ne peut pas constituer, à elle seule, l'objet d'un développement. Il est bon d'avoir en tête que tout groupe fini se plonge dans un groupe symétrique et de savoir calculer la signature des permutations ainsi obtenues dans des cas concrets. Les applications sont nombreuses, il est très naturel de parler du déterminant, des polynômes symétriques ou des fonctions symétriques des racines d'un polynôme. On peut également parler du lien avec les groupes d'isométries des solides.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant par exemple aux automorphismes du groupe symétrique, à des problèmes de dénombrement, aux représentations des groupes des permutations ou encore aux permutations aléatoires.

106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

Cette leçon ne doit pas se résumer à un catalogue de résultats épars sur $\mathrm{GL}(E)$. Il est important de savoir faire correspondre les sous-groupes du groupe linéaire avec les stabilisateurs de certaines actions naturelles (sur des formes quadratiques, sur des drapeaux, sur une décomposition en somme directe, etc.). On doit présenter des systèmes de générateurs de $\mathrm{GL}(E)$ et étudier la topologie de ce groupe en précisant pourquoi le choix du corps de base est important. Les liens avec le pivot de GAUSS sont à détailler. Il faut aussi savoir réaliser $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ et faire le lien entre signature et déterminant. S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en remarquant que la théorie des représentations permet d'illustrer l'importance de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ et de son sous-groupe unitaire. Ils peuvent également étudier les sous-groupes compacts maximaux et les sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}(n)$.

107 : Représentations et caractères d'un groupe fini sur un C-espace vectoriel. Exemples.

Il s'agit d'une leçon où théorie et exemples doivent apparaître. D'une part, il est indispensable de savoir dresser une table de caractères pour des petits groupes, et d'autre part, il faut savoir tirer des informations sur le groupe à partir de sa table de caractères, et être capable de trouver la table de caractères de certains sous-groupes. Les représentations peuvent provenir d'actions de groupes sur des ensembles finis, de groupes d'isométries, d'isomorphismes exceptionnels entre groupes de petit cardinal. Inversement, on peut chercher à interpréter des représentations de façon géométrique, mais il faut avoir conscience qu'une table de caractères provient généralement de représentations complexes *a priori* non réelles. La présentation du lemme de SCHUR est importante et ses applications doivent être parfaitement maîtrisées.

S'ils le désirent, les candidats peuvent évoquer la transformée de FOURIER en présentant par exemple les formules d'inversion, de PLANCHEREL et de convolution.

108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

Il est indispensable de donner des parties génératrices pour tous les exemples proposés. La description ensembliste du groupe engendré par une partie doit être connue et les groupes monogènes et cycliques doivent être évoqués. C'est une leçon qui doit être illustrée par des exemples très variés. Les groupes $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ fournissent des exemples naturels tout comme les groupes de permutations, les groupes linéaires ou leurs sous-groupes (par exemple $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$, $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ ou $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$). Ainsi, on peut s'attarder sur l'étude du groupe des permutations avec différents types de parties génératrices en discutant de leur intérêt (ordre, simplicité de $\mathcal{A}_5$ par exemple). On peut présenter le groupe $\mathrm{GL}(E)$ généré par des transvections et des dilatations en lien avec le pivot de GAUSS, le calcul de l'inverse ou du rang (par action sur $M_{n,p}(\mathbf{K})$), le groupe des isométries d'un triangle équilatéral qui réalise S_3 par identifications des générateurs. Éventuellement, il est possible de discuter des conditions nécessaires et suffisantes pour que $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$ soit cyclique ou la détermination de générateurs du groupe diédral.

On n'hésitera pas à illustrer comment la connaissance de parties génératrices s'avère très utile dans l'analyse des morphismes de groupes ou pour montrer la connexité par arcs de certains sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ par exemple.

S'il le souhaite, le candidat peut s'intéresser à la présentation de certains groupes par générateurs et relations. Pour aller plus loin, il est également possible de parler du logarithme discret et de ces applications à la cryptographie (algorithme de DIFFIE-HELLMAN, cryptosystème de EL GAMAL).

110 : Structure et dualité des groupes abéliens finis. Applications.

Cette leçon ne sera pas proposée en 2020. La notion de dualité dans les groupes abéliens finis reste néanmoins évidemment au programme ; elle peut être exploitée ainsi que ses applications dans d'autres leçons. Ce thème peut, en particulier, faire l'objet d'une partie de la leçon 104.

Parmi les résultats saillants sur ce sujet, on peut mentionner le théorème de structure des groupes abéliens finis. Il s'agit d'un résultat de classification, et à ce titre, la clause d'unicité en est une composante essentielle. La dualité des groupes abéliens finis est aussi une notion importante, illustrée par la cyclicité du groupe multiplicatif d'un corps fini. Il est bon de connaître des exemples de caractères, additifs, ou multiplicatifs dans le cadre des corps finis.

La transformée de FOURIER discrète est un outil fondamental qui pourra être vu comme son analogue analytique, avec ses formules d'inversion, sa formule de PLANCHEREL, mais dans une version affranchie des problèmes de convergence, qui font le sel des leçons d'Analyse sur ce sujet. Les techniques de transformée de FOURIER rapide sur un groupe abélien dont l'ordre est une puissance de 2 et leurs applications à la multiplication d'entiers, de polynômes et éventuellement au décodage de codes via la transformée de HADAMARD peuvent aussi être exploités avec pertinence.

120 : Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

Dans cette leçon, après avoir rapidement construit $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, il faut en décrire les éléments inversibles, les diviseurs de zéro et les idéaux. Ensuite, le cas où l'entier n est un nombre premier doit être étudié. La fonction indicatrice d'EULER ainsi que le théorème chinois et sa réciproque sont incontournables.

Les applications sont très nombreuses. Les candidats peuvent, par exemple, choisir de s'intéresser à la résolution d'équations diopantiennes (par réduction modulo n bien choisi) ou bien au cryptosystème RSA. Si des applications en sont proposées, l'étude des morphismes de groupes de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ ou le morphisme de FROBENIUS peuvent figurer dans la leçon.

S'ils le désirent, les candidats peuvent poursuivre en donnant une généralisation du théorème chinois lorsque deux éléments ne sont pas premiers entre eux, ceci en faisant apparaître le PGCD et le PPCM de ces éléments.

Enfin, les candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant au calcul effectif des racines carrées dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, au logarithme discret, ou à la transformée de FOURIER rapide.

121 : Nombres premiers. Applications.

Le sujet de cette leçon, souvent appréciée des candidats, est très vaste. Elle doit donc être abordée en faisant des choix qui devront être clairement motivés. La répartition des nombres premiers doit être évoquée : certains résultats sont accessibles dans le cadre du programme du concours, d'autres peuvent être admis et cités pour leur importance culturelle. Des conjectures classiques ont aussi leur place dans cette leçon. On peut définir certaines fonctions importantes en arithmétique, les relier aux nombres premiers et illustrer leurs utilisations. Il est particulièrement souhaitable de s'intéresser aussi aux aspects algorithmiques du sujet (tests de primalité). En plus d'une étude purement interne à l'arithmétique des entiers, il est important d'exhiber des applications dans différents domaines : théorie des corps finis, théorie des groupes, arithmétique des polynômes, cryptographie, etc. La réduction modulo p n'est pas hors-sujet et constitue un outil puissant pour résoudre des problèmes arithmétiques simples.

122 : Anneaux principaux. Applications.

Comme l'indique son intitulé, cette leçon ne doit pas se cantonner aux aspects théoriques. L'arithmétique des anneaux principaux doit être décrite et les démonstrations doivent être maîtrisées (lemme d'EUCLIDE, théorème de GAUSS, décomposition en irréductibles, PGCD et PPCM, etc.). Les anneaux euclidiens représentent une classe importante d'anneaux principaux et l'algorithme d'EUCLIDE a toute sa place dans cette leçon pour effectuer des calculs. Les applications en algèbre linéaire ne manquent pas et doivent être mentionnées (par exemple, le lemme des noyaux ou la notion de polynôme minimal pour un endomorphisme, pour un endomorphisme relativement à un vecteur ou pour un nombre algébrique). Si les anneaux classiques $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}[X]$ doivent impérativement figurer, il est possible d'en évoquer d'autres (décimaux, entiers de GAUSS $\mathbf{Z}[i]$ ou d'EISENSTEIN $\mathbf{Z}[e^{2i\pi/3}]$) accompagnés d'une description de leurs inversibles, de leurs irréductibles et éventuellement d'applications à des problèmes arithmétiques (équations diophantiennes).

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant à l'étude des réseaux, à des exemples d'anneaux non principaux, mais aussi à des exemples d'équations diophantiennes résolues à l'aide d'anneaux principaux. À ce sujet, il sera fondamental de savoir déterminer les unités d'un anneau, et leur rôle au moment de la décomposition en facteurs premiers. De même, le calcul effectif des facteurs invariants de matrices à coefficients dans un anneau principal peut être présenté.

123 : Corps finis. Applications.

Une construction des corps finis doit être connue et une bonne maîtrise des calculs dans les corps finis est indispensable. Les injections des divers $\mathbf{F}_q$ doivent être connues. Les applications des corps finis (y compris pour $\mathbf{F}_q$ avec q non premier !) ne doivent pas être oubliées. Par exemple, l'étude de polynômes à coefficients entiers et de leur irréductibilité peut figurer dans cette leçon. Le calcul des degrés des extensions et le théorème de la base téléscopique sont incontournables. La structure du groupe multiplicatif doit aussi être connue. L'étude des carrés dans un corps fini et la résolution d'équations de degré 2 sont envisageables.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en détaillant des codes correcteurs ou en étudiant l'irréductiblilité des polynômes à coefficients dans un corps fini.

125 : Extensions de corps. Exemples et applications.

Le théorème de la base téléscopique et ses applications à l'irréductibilité de certains polynômes, ainsi que les corps finis, sont incontournables. De même il faut savoir calculer le polynôme minimal d'un élément algébrique dans des cas simples, notamment pour quelques racines de l'unité. La leçon peut être illustrée par des exemples d'extensions quadratiques et leurs applications en arithmétique, ainsi que par des extensions cyclotomiques.

S'ils le désirent, les candidats peuvent montrer que l'ensemble des nombres algébriques forme un corps algébriquement clos et expliquer comment l'utilisation du résultant permet de calculer des polynômes annulateurs de sommes et de produits de nombres algébriques. Pour aller plus loin, les candidats peuvent parler des nombres constructibles à la règle et au compas, et éventuellement s'aventurer en théorie de GALOIS.

126 : Exemples d'équations en arithmétique.

Dans cette leçon, il est indispensable de s'intéresser à des équations sur $\mathbf{Z}$ mais aussi des équations dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et dans les corps finis. On doit présenter les notions de bases servant à aborder les équations de type $ax + by = d$ (identité de BEZOUT, lemme de GAUSS). On doit présenter des exemples d'utilisation effective du lemme chinois.

Ensuite, la méthode de descente de FERMAT et l'utilisation de la réduction modulo un nombre premier p méritent d'être mis en œuvre. La leçon peut aussi dériver vers la notion de factorialité, illustrée par des équations de type MORDELL, PELL-FERMAT, et même FERMAT (pour $n = 2$, ou pour les nombres premiers de Sophie GERMAIN). La résolution des systèmes linéaires sur $\mathbf{Z}$ peut être abordée. Il est de plus naturel de s'intéresser à la résolution des systèmes de congruences, à la recherche de racines carrées dans les corps finis. Les candidats peuvent plus généralement aborder la recherche des racines des polynômes dans les corps finis.

S'il le désirent, les candidats peuvent étudier les coniques sur les corps finis et la recherche de points sur ces coniques.

141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

La présentation du bagage théorique permettant de définir corps de rupture, corps de décomposition, ainsi que des illustrations dans différents types de corps (réel, rationnel, corps finis) sont inévitables. Les corps finis peuvent être illustrés par des exemples de polynômes irréductibles de degré 2, 3, 4 sur $\mathbf{F}_2$ ou $\mathbf{F}_3$. Il est nécessaire de présenter des critères d'irréductibilité de polynômes et des polynômes minimaux de quelques nombres algébriques.

Il est bon de savoir montrer que l'ensemble des nombres algébriques sur le corps $\mathbf{Q}$ des rationnels est un corps algébriquement clos. Le théorème de la base téléscopique, ainsi que les utilisations arithmétiques (utilisation de la divisibilité) que l'on peut en faire dans l'étude de l'irréductibilité des polynômes, est incontournable.

142 : PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

Le champ d'étude de cette leçon ne peut se limiter au cas de $\mathbf{Z}$; il s'agit de définir et manipuler les notions de PGCD et PPCM dans un anneau factoriel et comme générateurs de sommes/intersections d'idéaux dans un anneau principal. Le candidat doit prendre soin de différencier le cadre théorique des anneaux factoriels ou principaux dans lequel sont définis les objets et dans lequel s'appliquent les énoncés des théorèmes proposés et le cadre euclidien fournissant les algorithmes. Bien sûr, la leçon peut opportunément s'illustrer d'exemples élémentaires d'anneaux euclidiens, comme $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}[X]$.

Une part substantielle de la leçon doit être consacrée à la présentation d'algorithmes : algorithme d'EUCLIDE, algorithme binaire, algorithme d'EUCLIDE étendu. Dans le cas des polynômes, il faut étudier l'évolution de la suite des degrés et des restes. Il est important de savoir évaluer le nombre d'étapes de ces algorithmes dans les pires cas et on peut faire le lien avec les suites de FIBONACCI.

Des applications élémentaires sont particulièrement bienvenues : calcul de relations de BEZOUT, résolutions d'équations diophantiennes linéaires, inversion modulo un entier ou un polynôme, calculs d'inverses dans les corps de ruptures, les corps finis. On peut aussi évoquer le théorème chinois effectif, la résolution d'un système de congruences et faire le lien avec l'interpolation de LAGRANGE.

Pour aller plus loin, on peut évoquer le rôle de algorithme d'EUCLIDE étendu dans de nombreux algorithmes classiques en arithmétique (factorisation d'entiers, de polynômes, etc). Décrire l'approche matricielle de l'algorithme d'EUCLIDE et l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur $\mathbf{Z}^2$ est tout à fait pertinent. On peut aussi établir l'existence d'un supplémentaire d'une droite dans $\mathbf{Z}^2$, ou d'un hyperplan de $\mathbf{Z}^n$, la possibilité de compléter un vecteur de $\mathbf{Z}^n$ en une base.

La leçon peut amener à étudier les matrices à coefficients dans un anneau principal ou euclidien, et, de manière plus avancée, la forme normale d'HERMITE et son application à la résolution d'un système d'équations diophantiennes linéaires. De même, aborder la forme normale de SMITH, et son application au théorème de la base adaptée, permet de faire le lien avec la réduction des endomorphismes *via* le théorème des invariants de similitude.

La leçon invite aussi, pour des candidats familiers de ces notions, à décrire le calcul de PGCD dans $\mathbf{Z}[X]$ et $\mathbf{K}[X, Y]$, avec des applications à l'élimination de variables. On peut rappeler les relations entre PGCD et résultant et montrer comment obtenir le PGCD en échelonnant la matrice de SYLVESTER. Sur l'approximation diophantienne, on peut enfin envisager le développement d'un rationnel en fraction continue et l'obtention d'une approximation de PADÉ-HERMITE à l'aide de l'algorithme d'EUCLIDE, la recherche d'une relation de récurrence linéaire dans une suite ou le décodage des codes BCH.

144 : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications

Dans cette leçon, il est indispensable de bien définir l'ordre de multiplicité d'une racine (définition algébrique et analytique, quand c'est possible). Les fonctions symétriques élémentaires et les relations entre cœfficients et racines doivent être maîtrisées et pouvoir être mises en œuvre. Des méthodes, même élémentaires, de localisation des racines ont toute leur place et peuvent déboucher sur des résultats de topologie à propos de la continuité des racines.

Il peut être pertinent d'introduire la notion de polynôme scindé et de citer le théorème de d'Alembert-Gauss. Il est apprécié de faire apparaître le lien entre la recherche des racines d'un polynôme et la réduction des matrices. Les candidats peuvent également s'intéresser aux racines des polynômes orthogonaux, ou aux règles des signes de Descartes et de Sturm. L'étude des propriétés des nombres algébriques peuvent trouver leur place dans cette leçon. La théorie des corps et le cas particulier des corps finis peuvent aussi être évoqués de façon pertinente.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'intéresser à des problèmes de localisation des valeurs propres, comme les disques de Gershgorin.

Il ne s'agit par contre en aucun cas d'adapter le plan de la leçon 141 : l'irréductibilité des polynômes peut être évoquée mais ne doit pas être l'élément central de la leçon.

150 : Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

Le choix des exemples doit être fait avec soin, en évitant de présenter des actions dont on ne maîtrise pas les bases.

Dans un premier temps, il faut présenter différentes actions (translation à gauche, congruence, similitude, équivalence, ...) et quelques orbites. Dans chaque cas on pourra dégager d'une part des invariants simples (matrices échelonnées réduites, rang...) et d'autre part des algorithmes, comme le pivot de Gauss. On peut détailler le cas particulier de l'action de $O_n(\mathbf{R})$ sur $S_n(\mathbf{R})$.

Les candidats peuvent s'intéresser au fait que les polynômes caractéristiques et minimaux ne suffisent pas à caractériser les classes de similitudes. Dans le cas de l'action par congruence, le théorème de Sylvester et son interprétation en termes de changements de bases méritent de figurer dans la leçon. Il est possible de limiter l'action aux matrices de produits scalaires et de caractériser les éléments des stabilisateurs. Si l'on veut aborder un aspect plus théorique, il est possible de faire apparaître à travers différentes actions quelques décompositions célèbres ; on peut décrire les orbites lorsque la topologie s'y prête.

S'ils le désirent, les candidats peuvent travailler sur des corps finis et utiliser le dénombrement dans ce contexte.

151 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Dans cette leçon, il est indispensable de présenter les résultats fondateurs de la théorie des espaces vectoriels de dimension finie en ayant une idée de leurs preuves. Ces théorèmes semblent simples car ils ont été très souvent pratiqués, mais leur preuve demande un soin particulier. Il est important de savoir justifier pourquoi un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est aussi de dimension finie.

On peut montrer, sur des exemples, comment la dimension finie intervient dans la démonstration de certains résultats (récurrence sur la dimension, égalité de sous-espaces par inclusion et égalité des dimensions, isomorphisme par injectivité et dimension, etc.). À cette occasion, on pourra signaler des résultats qui ne subsistent pas en dimension infinie. Le pivot de Gauss ainsi que les diverses notions et caractérisations du rang trouvent leur place dans cette leçon. Les applications sont nombreuses : existence de polynômes annulateurs, dimension de l'espace des formes n-linéaires alternées en dimension n, isomorphisme avec le dual dans le cadre euclidien et théorème de Riesz, espaces de solutions d'équations différentielles ordinaires, caractérisation des endomorphismes diagonalisables, décomposition d'isométries en produits de réflexions, dimensions des représentations irréductibles d'un groupe fini, théorie des corps finis, etc.

Les caractérisations du rang peuvent aussi être utilisées pour démontrer l'invariance du rang par extension de corps, ou pour établir des propriétés topologiques (sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). S'ils le désirent, les candidats peuvent déterminer des degrés d'extensions dans la théorie des corps ou s'intéresser aux nombres algébriques. Il est également possible d'explorer des applications en analyse comme les extrémas liés. Dans un autre registre, il est pertinent d'évoquer la méthode des moindres carrés dans cette leçon, par exemple en faisant ressortir la condition de rang maximal pour garantir l'unicité de la solution et s'orienter vers les techniques de décomposition en valeurs singulières pour le cas général. On peut alors naturellement analyser l'approximation d'une matrice par une suite de matrices de faible rang.

152 : Déterminant. Exemples et applications.

Dans cette leçon, il faut commencer par définir correctement le déterminant. et savoir démontrer ses propriétés fondamentales (en particulier le fait que l'espace des formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n est de dimension 1). La distinction entre le déterminant d'une famille de vecteurs dans une base donnée et le déterminant d'un endomorphisme doit être comprise. L'interprétation en termes de volume est essentielle. Le calcul explicite est important, mais le jury ne peut se contenter d'un déterminant de VANDERMONDE ou d'un déterminant circulant. Les opérations élémentaires permettant de calculer des déterminants doivent être présentées et illustrées. Le polynôme caractéristique est incontournable (on prendra garde que $A - XI_n$ est à coefficients dans $\mathbf{K}[X]$ qui n'est pas un corps). Parmi les autres applications possibles, on peut penser aux déterminants de GRAM (permettant des calculs de distances), au déterminant jacobien (utile en calcul intégral et en probabilités), à l'utilisation du déterminant en géométrie (coordonnées barycentriques, colinéarité, etc.) ou encore à son rôle dans l'étude des formes quadratiques. Il est bienvenu d'illustrer la continuité du déterminant par une application. On pourra aussi s'intéresser à sa différentielle.

Pour aller plus loin, les candidats peuvent s'intéresser aux calculs de déterminants sur $\mathbf{Z}$. Le résultant et les applications simples à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes peuvent aussi trouver leur place dans cette leçon pour des candidats ayant une pratique de ces notions.

153 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Cette leçon ne doit pas être un catalogue de résultats autour de la réduction qui est ici un moyen pour démontrer des théorèmes ; les polynômes d'endomorphismes doivent y occuper une place importante. Il faut consacrer une courte partie de la leçon à l'algèbre $\mathbf{K}[u]$ et aux liens entre réduction de l'endomorphisme u et structure de l'algèbre $\mathbf{K}[u]$. Il faut connaître la dimension de $\mathbf{K}[u]$ sans hésitation. Il est ensuite possible de s'intéresser aux propriétés globales de cette algèbre (inversibles, condition nécessaire et suffisante assurant que ce soit un corps...). De même il est important de mettre en évidence les liens entre les idempotents et la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques.

Le lemme des noyaux, les polynômes caractéristiques et minimaux doivent figurer dans la leçon. Il faut bien préciser que, dans la réduction de DUNFORD, les composantes sont des polynômes en l'endomorphisme, et connaître les conséquences théoriques et pratiques. L'aspect *applications* est trop souvent négligé. Il est possible, par exemple, de mener l'analyse spectrale de matrices stochastiques. On attend d'un candidat qu'il soit en mesure, pour une matrice simple de justifier la diagonalisabilité et de déterminer un polynôme annulateur (voire minimal). Il est bien sûr important de ne pas faire de confusion entre diverses notions de multiplicité pour une valeur propre λ donnée (algébrique ou géométrique). Enfin, calculer A^k ne nécessite pas, en général, de réduire A (la donnée d'un polynôme annulateur de A suffit souvent). Il est possible d'envisager des applications aux calculs d'exponentielles de matrices.

S'il le souhaite, le candidat pourra étudier des équations matricielles et de calcul fonctionnel, avec par exemple l'étude de l'extraction de racines ou du logarithme.

154 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Dans cette leçon, il faut présenter des propriétés de l'ensemble des sous-espaces stables par un endomorphisme. Des études détaillées sont les bienvenues, par exemple dans le cas d'une matrice diagonalisable ou dans le cas d'une matrice nilpotente d'indice maximum.

L'étude des endomorphismes cycliques et des endomorphismes semi-simples trouvent tout à fait leur place dans cette leçon. Dans le cas des corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, on pourra, si on le souhaite, caractériser ces derniers par la fermeture de leur orbite.

La réduction des endomorphismes normaux et l'exemple de résolutions d'équations matricielles peuvent être présentés en applications.

La décomposition de Frobenius constitue également une application intéressante de cette leçon. Il ne faut pas oublier d'examiner le cas des sous-espaces stables par des familles d'endomorphismes. Ceci peut déboucher par exemple sur des endomorphismes commutants entre eux ou sur la théorie des représentations.

155 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Dans cette leçon, on attend des exemples naturels d'endomorphismes diagonalisables et des critères de diagonalisabilité. On doit notamment savoir expliquer pourquoi l'application induite par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable est encore diagonalisable. Il ne faut pas oublier de parler du cas des endomorphismes symétriques. On peut étudier certaines propriétés topologiques en prenant le soin de donner des précisions sur le corps $\mathbf{K}$ et la topologie choisie pour $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Les candidats doivent disposer de méthodes efficaces de calcul de l'exponentielle d'un endomorphisme diagonalisable. On peut dénombrer les endomorphismes diagonalisables dans les corps finis, ou possédant des propriétés données, liées à la diagonalisation.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'intéresser aux liens qui peuvent aussi être fait avec la théorie des représentations et la transformée de Fourier rapide.

156 : Exponentielle de matrices. Applications.

Bien que ce ne soit pas une leçon d'analyse, il faut toutefois pouvoir justifier clairement la convergence de la série exponentielle.

Les questions de surjectivité ou d'injectivité doivent être abordées. Par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle l'exponentielle d'une matrice à coefficients réels ? La matrice définie par blocs $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est-elle l'exponentielle d'une matrice à coefficients réels ?

La décomposition de Dunford multiplicative (décomposition de Jordan) de $\exp(A)$ trouve toute son utilité dans cette leçon. L'exponentielle fait bon ménage avec la décomposition polaire dans bon nombre de problèmes sur les sous-groupes du groupe linéaire. L'étude du logarithme (quand il est défini) peut être menée dans cette leçon.

Il est bon de connaître l'image par exponentielle de certains sous-ensembles de matrices (ensemble des matrices symétriques, hermitiennes, ou antisymétriques).

Les applications aux équations différentielles méritent d'être présentées sans toutefois constituer l'essentiel de la leçon. On pourra par exemple faire le lien entre réduction et comportement asymptotique, mais le jury déconseille aux candidats de proposer ce thème dans un développement de cette leçon, sauf à avoir bien compris comment les apports algébriques permettent ici de simplifier les conclusions analytiques.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'aventurer vers les sous-groupes à un paramètre du groupe linéaire (on peut alors voir si ces sous-groupes constituent des sous-variétés fermées de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$) ou vers les algèbres de Lie.

157 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Il est indispensable de connaître les polynômes caractéristiques et minimaux d'un endomorphisme nilpotent et de savoir justifier son caractère trigonalisable. Il est bon de savoir expliquer pourquoi l'application induite par un endomorphisme trigonalisable (respectivement nilpotent) sur un sous-espace stable est encore trigonalisable (respectivement nilpotent). L'utilisation des noyaux itérés est fondamentale dans cette leçon, par exemple pour déterminer si deux matrices nilpotentes sont semblables. Il est intéressant de présenter des conditions suffisantes de trigonalisation simultanée ; l'étude des endomorphismes cycliques a toute sa place dans cette leçon. L'étude des nilpotents en dimension 2 débouche naturellement sur des problèmes de quadriques et l'étude sur un corps fini donne lieu à de jolis problèmes de dénombrement.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi présenter la décomposition de Frobenius, ou des caractérisations topologiques des endomorphismes nilpotents, ou encore des propriétés topologiques de l'ensemble des endomorphismes nilpotents.

158 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

Le théorème spectral est indispensable dans cette leçon sans toutefois constituer un développement consistant. Une place importante mérite d'être faite au cas particulier des matrices symétriques positives et définies positives ; les candidats doivent connaître leurs propriétés fondamentales, leur rôle, et la structure de leur ensemble. La notion de signature pourra être présentée en montrant comment elle détermine la classe de congruence d'une matrice symétrique réelle. L'action du groupe linéaire et du groupe orthogonal sur l'espace des matrices symétriques peut donner un cadre naturel à cette leçon. Le lien avec les formes quadratiques et les formes hermitiennes est incontournable. L'orthogonalisation simultanée est un résultat important de cette leçon. Il faut en connaître les applications géométriques aux quadriques.

Les candidats familiers avec ces notions pourront illustrer la leçon en évoquant le cas des matrices de covariance de vecteurs aléatoires et discuter les conditions en assurant le caractère inversible.

Une discussion de la décomposition de Cholesky, qui a de nombreuses applications pour le calcul scientifique (en lien avec la résolution de systèmes linéaires ou de problèmes de moindres carrés) ou en probabilités (construction d'un vecteur gaussien de matrice de covariance donnée à partir d'un vecteur gaussien de matrice de covariance identité), peut mériter sa place dans cette leçon. On poura également évoquer la décomposition en valeurs singulières d'une matrice (particulièrement importante pour le traitement massif de données).

159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Il est important de bien placer la thématique de la dualité dans cette leçon ; celle-ci permet de mettre en évidence des correspondances entre un morphisme et son morphisme transposé, entre un sous-espace et son orthogonal (canonique), entre les noyaux et les images ou entre les sommes et les intersections. Bon nombre de résultats d'algèbre linéaire se voient dédoublés par cette correspondance. Les liens entre base duale et fonctions de coordonnées doivent être parfaitement connus. Le passage d'une base à sa base duale ou antéduale, ainsi que les formules de changement de base, doivent être maîtrisés. On pourra s'intéresser aux cas spécifiques où l'isomorphisme entre l'espace et son dual est canonique (cas euclidien, cas des matrices).

Savoir calculer la dimension d'une intersection d'hyperplans via la dualité est important dans cette leçon. L'utilisation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permet facilement d'obtenir les équations d'un sous-espace vectoriel ou d'exhiber une base d'une intersection d'hyperplans.

Cette leçon peut être traitée sous différents aspects : géométrique, algébrique, topologique ou analytique. Il faut que les développements proposés soient en lien direct avec la leçon. Enfin rappeler que la différentielle d'une fonction à valeurs réelles est une forme linéaire semble incontournable.

Il est possible d'illustrer la leçon avec un point de vue probabiliste, en rappelant que la loi d'un vecteur aléatoire X est déterminée par les lois unidimensionnelles de $X \cdot u$ pour tout vecteur u.

160 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Dans cette leçon, le caractère euclidien de l'espace est essentiel pour que l'endomorphisme soit remarquable. Le théorème spectral pour les auto-adjoints et la réduction des endomorphismes orthogonaux sont des résultats incontournables. Le jury met les candidats en garde sur le fait que le lemme des noyaux ou la décomposition de Dunford ne sont pas des développements adaptés à cette leçon. En revanche, l'utilisation du fait que l'orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme est stable par l'adjoint doit être mis en valeur. De même la réduction d'endomorphismes normaux peut être évoquée.

L'étude des projections orthogonales (en lien ave le calcul de distances), des rotations, des réflexions, des renversements, etc. fournit des exemples dignes d'intérêt. Une illustration pertinente peut s'appuyer sur la description de problèmes de moindres carrés en faisant ressortir le rôle de l'hypothèse de rang plein de A sur le caractère inversible de $A^{\intercal}A$.

161 : Distances et isométries d'un espace affine euclidien.

Cette leçon ne doit pas se restreindre aux seuls cas des dimensions 2 et 3, même s'il est naturel que ceux-ci y occupent une place importante. La classification des isométries en dimension 2 et 3 est exigible. En dimension 3, il faut savoir classifier les rotations et connaître les liens avec la réduction. On peut aussi penser aux isométries laissant stables certains objets en dimension 2 et 3. Il faut savoir prouver qu'une isométrie est affine, pouvoir donner des générateurs du groupe des isométries affines et savoir composer des isométries affines.

Les candidats peuvent en outre parler de la définition de la distance, de la distance à un sous-espace vectoriel et de déterminant de Gram. Les groupes de similitude peuvent également être abordés.

S'ils le désirent, les candidats peuvent évoquer l'interprétation de l'écart-type comme une distance, et présenter la matrice de covariance comme un exemple pertinent de matrice de Gram. Ainsi, les déterminants de Gram permettent de calculer l'erreur commise dans le cadre de prédictions affines.

162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Dans cette leçon, les techniques liées au simple pivot de Gauss constituent l'essentiel des attendus. Il est impératif de faire le lien avec la notion de système échelonné (dont on donnera une définition précise et correcte) et de situer l'ensemble dans le contexte de l'algèbre linéaire, sans oublier la dualité. Un point de vue opératoire doit accompagner l'étude théorique et l'intérêt algorithmique des méthodes présentées doit être expliqué, éventuellement en l'illustrant par des exemples simples (où l'on attend parfois une résolution explicite).

Parmi les conséquence théoriques, les candidats peuvent notamment donner des systèmes de générateurs de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$. Ils est aussi pertinent de présenter les relations de dépendance linéaire sur les colonnes d'une matrice échelonnée qui permettent de décrire simplement les orbites de l'action à gauche de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ donnée par $(P, A) \mapsto PA$.

S'ils le désirent, les candidats peuvent exploiter les propriétés des systèmes d'équations linéaires pour définir la dimension des espaces vectoriels et obtenir une description de l'intersection de deux sous-espaces vectoriels donnés par des systèmes générateurs, ou d'une somme de deux sous-espaces vectoriels donnés par des équations.

De même, des discussions sur la résolution de systèmes sur $\mathbf{Z}$ et la forme normale de Hermite peuvent trouver leur place dans cette leçon. Enfin, il est possible de présenter les décompostions LU et de Choleski, en évaluant le coût de ces méthodes ou encore d'étudier la résolution de l'équation normale associée aux problèmes des moindres carrés et la détermination de la solution de norme minimale par la méthode de décomposition en valeurs singulières.

170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

L'intitulé implique implicitement que le candidat ne doit pas se contenter de travailler sur $\mathbf{R}$. Le candidat pourra parler de la classification des formes quadratiques sur le corps des complexes et sur les corps finis. L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être mis en œuvre sur une forme quadratique simple.

Les notions d'isotropie et de cône isotrope sont un aspect important de cette leçon. On pourra rattacher cette notion à la géométrie différentielle.

171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

Dans cette leçon, la loi d'inertie de Silvester doit être présentée ainsi que l'orthogonalisation simultanée. L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être expliqué sur une forme quadratique de $\mathbf{R}^3$; le lien avec la signature doit être clairement énoncé et la signification géométrique des deux entiers r et s composant la signature d'une forme quadratique réelle doit être expliqué. La différentielle seconde d'une fonction de plusieurs variables est une forme quadratique importante qui mérite d'être présentée dans cette leçon.

La définition et les propriétés classiques des coniques d'un plan affine euclidien doivent être connues. On peut présenter les liens entre la classification des formes quadratiques et celles des coniques ; de même il est intéressant d'évoquer le lien entre le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et la signature de la forme quadratique $ax^2 + bxy + cy^2$.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi aller vers la théorie des représentations et présenter l'indicatrice de Schur-Frobenius qui permet de réaliser une représentation donnée sur le corps des réels.

181 : Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

Dans cette leçon, la notion de coordonnées barycentriques est incontournable ; des illustrations dans le triangle (coordonnées barycentriques de certains points remarquables) sont envisageables. Les candidats doivent savoir reconnaître des lignes de niveau et des lieux de points en utilisant des coordonnées barycentriques. Il est important de parler d'enveloppe convexe et de savoir dessiner l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points dans le plan ; le théorème de Gauss-Lucas trouve parfaitement sa place dans cette leçon. Il semble approprié d'évoquer les points extrémaux, ainsi que des applications qui en résultent. Par ailleurs, il est important d'avoir compris le lien entre fonctions convexes et ensembles convexes.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en présentant le lemme de Farkas, le théorème de séparation de Hahn-Banach, les théorèmes de Helly et de Caratheodory, ou parler des sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

182 : Applications des nombres complexes à la géométrie.

Cette leçon ne sera pas proposée à la session 2020.

183 : Utilisation des groupes en géométrie.

Cette leçon ne sera pas proposée à la session 2020.

Les thèmes propres à ces deux leçons trouveront à s'exprimer dans le nouvel intitulé 191.

190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Il est nécessaire de dégager clairement différentes méthodes de dénombrement et de les illustrer d'exemples significatifs. De nombreux domaines de mathématiques sont concernés par des problèmes de dénombrement, cet aspect varié du thème de la leçon doit être mis en avant. L'utilisation de séries génératrices est un outil puissant pour le calcul de certains cardinaux. De plus, il est naturel de calculer des cardinaux classiques et certaines probabilités. Il est important de connaître l'interprétation ensembliste de la somme des coefficients binomiaux et ne pas se contenter d'une justification par le binôme de Newton. L'introduction des corps finis (même en se limitant aux cardinaux premiers) permet de créer un lien avec l'algèbre linéaire. Les actions de groupes peuvent également conduire à des résultats remarquables.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi présenter des applications de la formule d'inversion de Möebius ou de la formule de Burnside. Des candidats ayant un bagage probabiliste pourront explorer le champ des permutations aléatoires, en présentant des algorithmes pour générer la loi uniforme sur le groupe symétrique S_n et analyser certaines propriétés de cette loi uniforme (points fixes, cycles, limite $n \to +\infty$...).

Une nouvelle leçon est ouverte pour la session 2020 :

191 : Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie

Si cette nouvelle leçon est proposée alors que les intitulés « Applications des nombres complexes à la géométrie » et « Utilisation des groupes en géométrie » ne seront pas utilisés, il serait cependant erroné de l'envisager comme une simple fusion de leurs contenus. Le jury souhaite proposer une leçon qui offre une ouverture large autour du thème de la géométrie. Avec cet intitulé, les candidats sont libres de présenter des résultats et des exemples très variés en lien avec la géométrie. L'objectif n'est pas de couvrir le plus d'aspects possible, mais plutôt d'en mettre certains en avant tout en motivant les choix personnels des candidats. À partir du moment où ils sont de nature géométrique, tous les éléments du programme peuvent être pertinents. En contrepartie de cette liberté laissée aux candidats, la difficulté consiste à parvenir à structurer la présentation des objets et des notions choisies. Ainsi, plusieurs approches sont également valables pour organiser cette leçon, par exemple :

- en regroupant les outils par « famille » : outils matriciels (repérage des points par des matrices colonnes, des transformations par des matrices, rang, réduction, etc.), outils polynomiaux (formes quadratiques, déterminant, résultant, etc.), outils structurels (groupes, corps) ;
- ou par niveau d'abstraction/de généralité (nombres réels, complexes, matrices, groupes...) ;

— ou par type d'objectifs (identifier des objets géométriques, les mesurer, les classifier, démontrer des résultats en utilisant des transformations géométriques...)

Il est aussi possible de se focaliser sur un seul type d'outils (par exemple algèbre linéaire, géométrie affine ou groupes) en détaillant plusieurs applications en géométrie ou sur une question géométrique fouillée à l'aide de diverses techniques (par exemple sur des problèmes impliquant des figures géométriques comme les cercles et triangles, les polygones et polyèdres réguliers, etc.). Des situations « élémentaires », dans le plan, permettent certainement de mettre en valeur des connaissances et un recul mathématique. Il faut bien éviter l'écueil d'un catalogue fastidieux ou celui qui consisterait à recycler directement le contenu d'une autre leçon avec un vague habillage géométrique.

Parmi les nombreux éléments qui peuvent être discutés, on peut indiquer :

— les notions de distance, aire, volume. Notamment les propriétés de la matrice de Gram, le lien entre déterminant et aire d'un parallélogramme ou volume d'un parallépipède, la construction du produit vectoriel et du produit mixte,... peuvent être exploités avec pertinence dans cette leçon. On peut ainsi être amené à étudier l'aire balayée par un arc paramétré du plan, la position d'un point par rapport à un cercle circonscrit à un triangle, etc. Le déterminant de Cayley-Menger permet de mettre en évidence des conditions pour que $n+1$ points de $\mathbf{R}^n$ forment une base affine, ou que $n+2$ points de $\mathbf{R}^n$ soient cocycliques. Dans une autre direction, la division euclidienne dans $\mathbf{Z}$ donne une preuve d'une forme du théorème de la base adaptée, avec pour conséquence le calcul du volume (d'une maille élémentaire) d'un sous réseau de $\mathbf{Z}^n$ comme étant le déterminant d'un système générateur dans la base canonique.

— l'apport de l'algèbre linéaire à la géométrie. On peut ainsi exploiter le calcul matriciel et les techniques de réduction pour mettre en évidence des informations de nature géométrique (avec les exemples fondamentaux des homothéties, projections, symétries, affinités, rotations, la classification des isométries vectorielles, etc.). On peut être alors amené à présenter le théorème de Cartan-Dieudonné sur la décomposition d'isométries euclidiennes en produit de réflexions ou encore évoquer une (ou des) interprétation(s) géométrique(s) de la décomposition en valeurs singulières. Dans cette même veine, la leçon peut être orientée vers la géométrie affine, en s'adossant à la théorie des espaces vectoriels pour définir certains objets (espaces et sous-espaces affines, applications affines, repères affines, etc), ce qui permet, par exemple, d'établir ainsi certains résultats classiques, comme les théorèmes de Thalès, Pappus, Desargues,...

— l'analyse des formes quadratiques permet d'aborder des problèmes géométriques : étude des coniques, quadriques, classification des quadriques de $\mathbf{R}^n$, interprétation géométrique de la signature, application des méthodes de réduction, etc.

— la théorie des groupes est un champ naturel pour cette leçon (mais qui n'est cependant pas indispensable) : groupes de transformations (isométries, déplacements, similitudes, translations), composition de transformations, mise en évidence d'invariants fondamentaux (angle, birapport, excentricité d'une conique). Il est possible de se focaliser sur des groupes de transformations préservant une certaine structure géométrique et en distinguant parmi eux les groupes finis (groupes d'isométries classiques), les groupes discrets infinis (avec des translations, groupes de pavages) et, pour aller plus loin, les groupes continus (groupes de Lie).

— les techniques de convexité constituent aussi un champ fructueux : le théorème de séparation par un hyperplan dans $\mathbf{R}^n$ de Hahn-Banach et, en corollaire, le théorème de Helly permettent par exemple d'établir des propriétés intéressantes sur les cordes de convexes compacts.

— certains candidats peuvent trouver intérêt à aborder les questions d'intersection de courbes polynomiales, qui permettent notamment de mettre en œuvre le théorème de Bezout et des méthodes exploitant la notion de résultant.

— un grand nombre de problèmes de géométrie peuvent être traités en exploitant le formalisme des nombres complexes. Il est tout à fait approprié d'évoquer l'étude des inversions et, en particulier la possibilité de ramener un cercle à une droite et inversement ; la formule de Ptolémée illustre bien l'utilisation de cet outil. On peut parler des suites définies par récurrence par une homographie et leur lien avec la réduction dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ et aborder la construction de la sphère de RIEMANN.

— les problématiques de la construction à la règle et au compas constituent un autre axe pertinent pour cette leçon, avec le théorème de WANTZEL, et peuvent conduire à s'intéresser à des extensions de corps.

Comme dans le cas des autres leçons, il est tout à fait bienvenu de chercher à illustrer cette leçon par des exemples issus de l'analyse, des probabilités, de la statistique (par exemple en évoquant l'interprétation géométrique de l'analyse en composantes principales), du calcul formel (par exemple avec les applications du résultant) ou du calcul scientifique (par exemple en présentant des problématiques de géométrie computationnelle, comme le calcul d'enveloppe convexe, les algorithmes de triangulation DELAUNAY, les diagrammes de VORONOI...). Les thèmes en lien avec la géométrie projective ou la géométrie algébrique peuvent permettre à certains candidats de présenter des résultats très avancés. Cette leçon nécessite une préparation très personnelle et réfléchie de la part des candidats. Les exemples et les résultats qui y sont présentés ont vocation à inciter les candidats à enrichir les autres leçons de cette épreuve d'exemples issus de la géométrie.

5.3 L'épreuve orale d'analyse et probabilités

On trouvera dans cette section des commentaires sur chaque leçon de l'oral d'Analyse et Probabilités de la session 2019. La plupart des commentaires sur les leçons sont structurés en deux parties : la première présente ce que le jury considère comme le socle de la leçon ; la seconde partie propose des suggestions pour sortir de ce socle de base, éventuellement en allant au-delà des contours stricts du programme. Il ne s'agit que de suggestions. En particulier, s'aventurer sur des notions qui ne sont pas explicitement au programme du concours est un choix qui doit être réfléchi et qui réclame, bien entendu, de maîtriser ces notions (et, cela va de soi, celles qui sont en amont). Le jury rappelle que ces excursions au delà du programme ne sont que des options ouvertes et qu'elles ne sont pas nécessaires pour briguer d'*excellentes* notes. Il vaut bien mieux présenter deux développements classiques, pertinents (et notamment en rapport très clair avec la leçon) et maîtrisés tant sur le fond que la présentation (en respectant bien les 15 minutes allouées à cette partie de l'épreuve) plutôt que de s'aventurer sur des terrains où l'on risque de manquer d'adresse et de recul.

Indépendamment du positionnement du niveau, déjà évoqué, le candidat doit sélectionner des développements pertinents relativement au thème de la leçon. Le jury peut avoir un jugement sévère lorsque l'intersection avec le titre du sujet est anecdotique. Certains développements font l'objet de réutilisations abusives, qui peuvent être sans commune mesure avec leur importance mathématique, et surtout qui se révèlent parfois hors de propos (on peut citer par exemple « ellipsoïde de JOHN », « polynômes de BERNSTEIN », « base hilbertienne de polynômes sur L^2 avec poids d'ordre exponentiel », « PROCESSUS DE GALTON-WATSON »,...) et conduisent à des hors-sujets pénalisants. Si certains thèmes peuvent naturellement être évoqués dans plusieurs leçons, il faut bien prendre garde au point de vue que l'intitulé appelle. La pertinence des développements proposés dans le cadre de la leçon, qu'il ne faut pas hésiter à défendre dans la toute première phase de l'épreuve, fait partie des éléments de notation. Enfin, trop de candidats se lancent dans des développements difficiles pour lesquels ils ne sont manifestement pas suffisament armés (« la densité des fonctions continues nulle part dérivables », « théorème de RIESZ-FISCHER »...), une approche de l'épreuve qui ne peut être que contre-productive. Ces mises en garde étant faites, il convient de souligner que nombre de candidats font des efforts visibles pour soigner leur présentation à l'oral et intègrent bien les modalités de l'épreuve.

201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.

C'est une leçon riche où le candidat doit choisir soigneusement le niveau auquel il souhaite se placer et bien délimiter le champ qu'il se propose d'explorer. Le jury attend que les candidats aient réfléchi à leur choix et les illustrent avec des applications et exemples, ce qui parfois peut manquer dans la présentation.

Les candidats peuvent se concentrer dans un premier temps sur les espaces normés composés de fonctions continues sur $\mathbf{R}$ ou une partie compacte de $\mathbf{R}$ et les propriétés de l'espace selon la norme dont il est muni. La norme $\|\cdot\|_\infty$ est naturellement associée à la convergence uniforme dont il faut avoir assimilé les bases (en particulier, le jury attend une maîtrise du fait qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue). On peut aussi envisager les variantes faisant intervenir une ou plusieurs dérivées.

Les espaces de HILBERT de fonctions comme l'espace des fonctions L^2 constituent ensuite une ouverture déjà significative. Pour aller plus loin, d'autres espaces de BANACH usuels tels que les espaces L^p ont tout à fait leur place dans cette leçon, ainsi que les espaces de SOBOLEV, certains espaces de fonctions holomorphes (HARDY, BERGMAN), ou dans une autre direction, la structure de l'espace de SCHWARTZ $\mathscr{S}(\mathbf{R})$ ou de l'espace des fonctions C^∞ à support compact sur $\mathbf{R}$ peuvent offrir des ouvertures de très bon niveau.

Il est tout à fait bienvenu, et nombre de candidats ne s'en privent pas, de discuter les relations entre ces espaces, notamment de densité et de présenter des applications de ces propriétés.

202 : Exemples de parties denses et applications.

Cette leçon ne sera pas utilisée pour la session 2020. Ses thèmes se retrouvent, entre autres, dans les leçons 201, 209, 213, ou 228.

En particulier, les exemples fondamentaux comme la densité de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$, l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathbf{C}$, la densité de fonctions régulières dans des espaces de LEBESGUE,... doivent être bien acquis. Le théorème de WEIERSTRASS, ou, pour aller plus loin, le théorème de STONE-WEIERSTRASS, a de nombreuses applications qui doivent être connues et qui peuvent être exploitées sous d'autres intitulés.

203 : Utilisation de la notion de compacité.

Cette leçon ne porte pas sur la compacité en général mais sur son *utilisation*. Il semble important de parler des théorèmes de HEINE et de ROLLE dont la démonstration doit être connue. Le candidat doit savoir que les boules fermées d'un espace vectoriel normé sont compactes si et seulement si l'espace est de dimension finie (théorème de compacité de RIESZ). Il est également souhaitable de faire figurer un énoncé du théorème d'ASCOLI dont la preuve doit être connue. Des exemples significatifs d'utilisation de la compacité comme le théorème de STONE-WEIERSTRASS, des théorèmes de point fixe, voire l'étude qualitative d'équations différentielles, sont tout à fait pertinents. Le rôle de la compacité pour des problèmes d'existence d'extrema mériterait d'être davantage étudié. S'il est important que les candidats aient une vision générale de la compacité, il est tout à fait envisageable qu'une leçon ne présente des applications que dans le cadre des espaces métriques.

Pour aller plus loin, les familles normales de fonctions holomorphes fournissent des exemples fondamentaux d'utilisation de la compacité. La caractérisation de la compacité dans les espaces L^p peut aussi tout à fait illustrer cette leçon. Les opérateurs auto-adjoints compacts sur un espace de HILBERT relèvent également de cette leçon, et il est possible développer l'analyse de leurs propriétés spectrales, éventuellement en exploitant un exemple particulier.

204 : Connexité. Exemples et applications.

L'objectif de cette leçon est de dégager clairement l'intérêt de la notion de connexité en analyse. Deux aspects sont notamment à mettre en valeur dans cette leçon : le fait que la connexité est préservée par image continue avec les théorèmes du type « valeurs intermédiaires » qui en résultent et le rôle clef de la connexité dans le passage du local au global, par exemple en calcul différentiel, voire pour les fonctions holomorphes. Il est important de présenter des résultats naturels dont la démonstration utilise la connexité. La stabilité par image continue, la structure des ouverts de $\mathbf{R}$, l'identification des connexes de $\mathbf{R}$ sont des résultats incontournables.

La caractérisation des fonctions constantes parmi les fonctions différentiables sur un ouvert connexe trouve tout à fait sa place dans cette leçon, incluant éventuellement la version « distributions » de ce résultat.

La connexité par arcs permet, lorsqu'elle se produit, de conclure immédiatement à la connexité. Toutefois, il est important de bien distinguer connexité et connexité par arcs en général (avec des exemples compris par le candidat), et il est pertinent de présenter des situations où ces deux notions coïncident. La notion de composante connexe doit également trouver sa place dans cette leçon (pouvant être illustrée par des exemples matriciels). L'illustration géométrique de la connexité est un point apprécié par le jury.

Des exemples issus d'autres champs (algèbre linéaire notamment) sont valorisés. Pour aller plus loin, le principe des zéros isolés, son lien avec le prolongement analytique, ainsi que des illustrations avec des fonctions spéciales telles que ζ, θ, Γ, ou encore le principe du maximum, fournissent des thèmes très riches pour cette leçon.

Dans une autre direction, on peut s'intéresser aux solutions d'une équation différentielle non linéaire avec le passage d'un théorème d'existence et d'unicité local à un théorème d'existence et d'unicité de solutions maximales.

Enfin, le choix des développements doit être pertinent, même s'il fait aussi appel à des thèmes différents ; on peut ainsi suggérer le théorème de Runge pour les candidats qui le souhaitent. Pour aller plus loin, on peut éventuellement évoquer certaines parties totalement discontinues remarquables telles que l'ensemble triadique Cantor et ses applications.

205 : Espaces complets. Exemples et applications.

L'un des intérêts essentiels de la complétude est de fournir des théorèmes d'existence : que ce soit tout simplement dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ mais aussi dans certains espaces de dimension infinie (par exemple dans certains espaces de fonctions). Il est important de présenter des exemples d'espaces usuels, dont on sait justifier la complétude. Un candidat à l'agrégation doit manifester une bonne maîtrise de la convergence uniforme. On peut évoquer dans cette leçon des théorèmes classiques tels que le théorème du point fixe des applications contractantes et le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Les espaces L^p sont des exemples pertinents qui ne sont pas sans danger pour des candidats aux connaissances fragiles (les $\ell^p(\mathbf{N})$, peut-être plus accessibles, fournissent déjà de beaux exemples).

On ne s'aventurera pas à parler du théorème de Baire sans applications pertinentes et maîtrisées (elles sont nombreuses). Un développement autour des fonctions continues nulle part dérivables est très souvent proposé, mais extrêmement rares sont les candidats qui arrivent avec succès jusqu'au bout. Le jury attire l'attention sur le fait qu'il existe des preuves constructives de ce résultat qui n'utilisent pas le théorème de Baire.

La construction de l'espace $H_0^1(]0,1[)$ pourra être abordée par les candidats qui le souhaitent avec des applications illustrant l'intérêt de cet espace.

207 : Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

Cette leçon de synthèse offre de très nombreuses orientations possibles et le choix du niveau auquel se place le candidat doit être bien clair.

Il ne faut pas hésiter à commencer par des exemples très simples tels que le prolongement en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ avec des exemples d'utilisations, mais il faut aller plus loin que le simple prolongement par continuité. Trop de candidats ne connaissent pas bien les résultats élémentaires autour du prolongement par continuité en un point d'une fonction d'une variable réelle, ou les résultats autour du prolongement C^1 (lorsque la dérivée a une limite par exemple).

Pour aller plus loin, le prolongement analytique relève bien sûr de cette leçon, et des exemples sur des fonctions classiques (ζ, Γ,...) seront appréciés. On peut également parler de l'extension à L^2, voire à l'espace des distributions tempérées, de la transformation de FOURIER. Le théorème de HAHN-BANACH, dans le cas séparable voire simplement en dimension finie, peut être un exemple de résultat très pertinent. La résolution d'un problème de DIRICHLET, correctement formulé, associé à une équation aux dérivées partielles classique, vu comme prolongement de la donnée au bord, peut être envisagée.

208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Le jury rappelle qu'une telle leçon doit contenir beaucoup d'illustrations et d'exemples, notamment avec quelques calculs élémentaires de normes subordonnées (notion qui met en difficulté un trop grand nombre de candidats). Le lien avec la convergence des suites du type $X_{n+1} = AX_n$ doit être connu (et éventuellement illustré, sans que cela puisse être mis au cœur de la leçon, de considérations d'analyse numérique matricielle). Lors du choix de ces exemples, le candidat veillera à ne pas mentionner des exemples pour lesquels il n'a aucune idée de leur pertinence et à ne pas se lancer dans des développements trop sophistiqués.

Il faut savoir énoncer et justifier le théorème de RIESZ sur la compacité de la boule unité fermée d'un espace vectoriel normé. Le théorème d'équivalence des normes en dimension finie, ou le caractère fermé de tout sous-espace de dimension finie d'un espace normé, sont des résultats fondamentaux à propos desquels les candidats doivent se garder des cercles vicieux. Des exemples d'espaces vectoriels normés de dimension infinie ont leur place dans cette leçon et il faut connaître quelques exemples de normes usuelles non équivalentes, notamment sur des espaces de suites ou des espaces de fonctions et également d'applications linéaires qui ne sont pas continues. On peut aussi illustrer le théorème de RIESZ sur des exemples simples dans le cas des espaces classiques de dimension infinie.

Les espaces de HILBERT ont également leur place dans cette leçon, mais le jury met en garde contre l'écueil de trop s'éloigner du cœur du sujet.

209 : Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications

Pour la session 2020, le titre de cette leçon évolue en

Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.

Ce nouvel intitulé ouvre le sujet et permet de mettre en lumière des points de vue de natures différentes, avec des points d'accès de niveaux aussi variés. Bien entendu l'approximation polynomiale ou par polynômes trigonométriques reste un des thèmes centraux de cette leçon et un certain nombre de classiques trouveront à s'exprimer, comme par exemple l'approximation par les polynômes de BERNSTEIN, éventuellement agrémentée d'une estimation de la vitesse de convergence (en termes de module de continuité).

Il n'est pas absurde de voir la formule de TAYLOR comme une approximation locale d'une fonction par des polynômes mais on veillera à ne pas trop s'attarder sur ce point. Les polynômes d'interpolation de LAGRANGE peuvent être mentionnés à condition de maîtriser la différence fondamentale entre interpolation et approximation.

L'approximation d'une fonction par des fonctions de classe C^∞ par convolution est une technique qui s'intègre parfaitement dans ce nouvel intitulé et qui doit être illustrée d'applications (approximation de fonctions indicatrices, obtention, par densité, d'inégalités ou de résultats asymptotiques, résolution de l'équation de la chaleur,...)

Dans la même veine, pour aller plus loin, le théorème de FEJÉR (versions L^1, L^p ou $C(\mathbf{T})$) offre la possibilité d'un joli développement, surtout s'il est agrémenté d'applications (polynômes trigonométriques lacunaires, injectivité de la transformée de FOURIER sur L^1,...). La convolution avec d'autres noyaux (DIRICHLET, JACKSON) est aussi une source de résultats intéressants.

213 : Espaces de HILBERT. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

Il est important de faire la différence entre base algébrique et base hilbertienne, notions qui mettent en difficulté nombre de candidats. Toutefois cette année, le jury se réjouit d'avoir pu constater de réels efforts sur ce point. La formule de la projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie d'un espace de HILBERT doit absolument être connue de même que l'interprétation géométrique de la méthode de GRAM-SCHMIDT. La leçon doit être illustrée par des exemples de bases hilbertiennes (polynômes orthogonaux, séries de FOURIER, entre autres).

Les candidats doivent s'intéresser au sens des formules

$$x = \sum_{n\geqslant 0} (x|e_n)e_n \quad \text{et} \quad ||x||^2 = \sum_{n\geqslant 0} |(x|e_n)|^2$$

en précisant les hypothèses sur la famille $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et en justifiant la convergence. La notation $\sum_{n\in\mathbf{Z}}$ doit être manipulée avec précaution : beaucoup de candidats l'introduisent mais sans en maîtriser les subtilités.

Si le théorème de projection sur les convexes fermés (ou sur un sous-espace vectoriel fermé) d'un espace de HILBERT H est régulièrement mentionné, ses conséquences les plus directes (théorème de projection de RIESZ, orthogonal de l'orthogonal et densité d'un sous-espace via la nullité de son orthogonal,...) le sont malheureusement nettement moins.

La notion d'adjoint d'un opérateur continu peut alors être introduite et, pour aller plus loin, le théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints compacts peut alors être abordé.

Pour aller plus loin dans une autre direction, le programme permet d'aborder la résolution et l'approximation de problèmes aux limites en dimension 1 par des arguments exploitant la formulation variationnelle de ces équations. La construction de l'espace de HILBERT–SOBOLEV $H_0^1(]0,1[)$ pourra donc éventuellement être abordée, ainsi que le théorème de LAX-MILGRAM avec des applications pertinentes. Plus généralement, l'optimisation de fonctionnelles convexes sur les espaces de HILBERT peut être explorée.

214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

Il s'agit d'une leçon qui exige une bonne maîtrise du calcul différentiel. Même si le candidat ne propose pas ces thèmes en développement, on est en droit d'attendre de lui des idées de démonstration des deux théorèmes fondamentaux qui donnent son intitulé à la leçon. Il est indispensable de savoir mettre en pratique le théorème des fonctions implicites au moins dans le cas de deux variables réelles. On attend des applications en géométrie différentielle notamment dans la formalisation de la méthode des multiplicateurs de LAGRANGE. En ce qui concerne la preuve du théorème des extrema liés, la présentation de la preuve par raisonnement « sous-matriciel » est souvent obscure ; on privilégiera si possible une présentation géométrique s'appuyant sur l'espace tangent. Plusieurs inégalités classiques de l'analyse peuvent se démontrer avec ce point de vue : arithmético-géométrique, HÖLDER, CARLEMAN, HADAMARD,...

Pour aller plus loin, l'introduction des sous-variétés est naturelle dans cette leçon. Il s'agit aussi d'agrémenter cette leçon d'exemples et d'applications en géométrie, sur les courbes et les surfaces.

215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

Cette leçon requiert une bonne maîtrise de la notion de différentielle première et de son lien avec les dérivées partielles, mais aussi de ce qui les distingue. Beaucoup de candidats sont mis en difficulté sur les concepts de base du calcul différentiel et ces notions sont à consolider, au-delà de cette leçon en particulier. On doit savoir trouver la différentielle d'applications classiques, comme, par exemple, $M \in GL_n(\mathbf{R}) \mapsto M^{-1}$, $M \mapsto M^2$ ou encore $M \mapsto \det(M)$ en revenant à la définition. Il est important de bien comprendre le développement sous-jacent de $f(x+h)$. La notation o est souvent source de confusions ; trop de candidats l'utilisent sans en maîtriser la signification. On doit pouvoir mettre en pratique le théorème de différentiation composée pour calculer des dérivées partielles de fonctions composées dans des situations simples (par exemple le laplacien en coordonnées polaires). La différentiation à l'ordre 2 est attendue, en lien avec la hessienne, notamment pour les applications classiques quant à l'existence d'extrema locaux. On peut aussi faire figurer dans cette leçon la différentielle d'applications issues de l'algèbre linéaire (ou multilinéaire). La méthode du gradient pour la minimisation de la fonctionnelle $\frac{1}{2}(Ax|x) - (b|x)$, où A est une matrice symétrique définie positive, conduit à des calculs de différentielles qui doivent être acquis par tout candidat.

Pour aller plus loin, l'exponentielle matricielle est une ouverture pertinente. D'autres thèmes issus de la leçon 214 trouvent aussi leur place ici.

219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Comme souvent en analyse, il est tout à fait opportun d'illustrer dans cette leçon un exemple ou un raisonnement à l'aide d'un dessin. Il faut savoir faire la distinction entre propriétés locales (caractérisation d'un extremum local) et globales (existence par compacité, par exemple). Dans le cas important des fonctions convexes, un minimum local est également global. Les applications de la minimisation des fonctions convexes, qui peuvent être introduites par des problématiques motivées par les options de modélisation, sont nombreuses et sont tout à fait à propos pour illustrer cette leçon.

L'étude des algorithmes de recherche d'extremum y a toute sa place : méthode du gradient et analyse de sa convergence, méthode à pas optimal,... Le cas particulier des fonctionnelles sur $\mathbf{R}^n$ de la forme $\frac{1}{2}(Ax|x) - (b|x)$, où A est une matrice symétrique définie positive, ne devrait pas poser de difficultés (la coercivité de la fonctionnelle pose problème à de nombreux candidats). Les problèmes de minimisation sous contrainte amènent à faire le lien avec les extrema liés et la notion de multiplicateur de Lagrange. Sur ce point, certains candidats ne font malheureusement pas la différence entre recherche d'extremum sur un ouvert ou sur un fermé. Une preuve géométrique des extrema liés sera fortement valorisée par rapport à une preuve algébrique, formelle et souvent mal maîtrisée. On peut ensuite mettre en œuvre ce théorème en justifiant une inégalité classique : arithmético-géométrique, Hölder, Carleman, etc... Enfin, la question de la résolution de l'équation d'Euler-Lagrange peut donner l'opportunité de mentionner la méthode de Newton.

Les candidats pourraient aussi être amenés à évoquer les problèmes de type moindres carrés (avec une discussion qui peut comprendre motivation, formalisation, rôle de la condition de rang maximal, jusqu'aux principes de la décomposition en valeurs singulières), ou, dans un autre registre, le principe du maximum avec des applications.

220 : Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études des solutions en dimension 1 et 2.

Pour la session 2020, l'intitulé de cette leçon devient

Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'études de solutions

en dimension 1 et 2.

Cette reformulation a pour but de mettre en garde sur le fait que la résolution explicite de certaines équations différentielles standard telles que $y' = y^2$ ou $y'' + ay' + by = \cos(\omega t)$ pose des difficultés à de trop nombreux candidats ; il est important de disposer de méthodes de résolution efficaces. Mais le jury souhaite que les candidats soient conscients que la résolution exacte de telles équations est rare et qu'ils soient donc capables de mener une étude qualitative des solutions sur des exemples et éventuellement d'envisager des stratégies d'approximation numérique des solutions.

Le jury note un effort sur la maîtrise du théorème de Cauchy-Lipschitz ; sa démonstration dans le cadre le plus général est délicate : elle est souvent mal maîtrisée. Une preuve dans le cas globalement lipschitzien constitue déjà un développement appréciable. Le jury attire l'attention sur les notions de solution maximale et de solution globale qui sont souvent confuses. Bien qu'ils ne soient pas souvent mentionnés, le lemme de Grönwall a toute sa place dans cette leçon ainsi que le théorème de sortie de tout compact.

L'utilisation du théorème de Cauchy-Lipschitz doit pouvoir être mise en œuvre sur des exemples concrets. Il est souhaitable de produire des exemples d'équations non-linéaires qui pour certaines permettent une résolution exacte et pour d'autres donnent lieu à une étude qualitative (dont on rappelle qu'elle doit être préparée et soignée). Pour les équations autonomes, la notion de point d'équilibre permet des illustrations pertinentes comme par exemple les petites oscillations du pendule. Trop peu de candidats pensent à tracer et discuter des portraits de phase alors que l'intitulé de la leçon y invite clairement.

Le nouvel intitulé est aussi une invitation plus franche à évoquer les problématiques de l'approximation numérique en présentant le point de vue du schéma d'Euler et de sa convergence notamment, voire, pour les candidats qui le souhaitent, d'autres schémas qui seraient mieux adaptés à l'exemple présenté. On peut aller jusqu'à aborder la notion de problèmes raides et la conception de schémas implicites pour autant que le candidat ait une maîtrise convenable de ces questions.

221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Le jury attend d'un candidat qu'il sache déterminer rigoureusement la dimension de l'espace vectoriel des solutions. Le cas des systèmes à coefficients constants fait appel à la réduction des matrices qui doit être connue et pratiquée. Le jury attend qu'un candidat puisse mettre en œuvre la méthode de variation des constantes pour résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 simple (à coefficients constants par exemple) avec second membre ; un trop grand nombre de candidats se trouve déstabilisés par ces questions.

L'utilisation des exponentielles de matrices a toute sa place ici et doit être maîtrisée. Les problématiques de stabilité des solutions et le lien avec l'analyse spectrale devraient être davantage exploités dans cette leçon.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire constitue un exemple de développement pertinent pour cette leçon. Les résultats autour du comportement des solutions, ou de leurs zéros, de certaines équations linéaires d'ordre 2 (Sturm, Hill-Mathieu,...) sont aussi d'autres possibilités.

Pour aller plus loin, la résolution au sens des distributions d'équations du type $T' + aT = S$ via la méthode de variation de la constante, ou des situations plus ambitieuses, trouvera sa place dans cette leçon.

222 : Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.

Cette leçon peut être abordée en faisant appel à des techniques variées et de nombreux développements pertinents peuvent être construits en exploitant judicieusement les éléments les plus classiques du programme. Le candidat ne doit pas hésiter à donner des exemples très simples (par exemple les équations de transport).

Les techniques d'équations différentielles s'expriment par exemple pour traiter $\lambda u - u'' = f$ sur $[0, 1]$ avec des conditions de DIRICHLET en $x = 0$, $x = 1$ ou pour analyser l'équation de transport par la méthode des caractéristiques.

Les séries de FOURIER trouvent dans cette leçon une mise en pratique toute désignée pour résoudre l'équation de la chaleur dans différents contextes, l'équation des ondes ou de SCHRÖDINGER dans le cadre des fonctions périodiques. Des raisonnements exploitant la transformée de FOURIER peuvent également être présentés.

Le point de vue de l'approximation numérique donne lieu à des développements originaux, notamment autour de la matrice du Laplacien et de l'analyse de convergence de la méthode des différences finies.

Pour aller plus loin, la notion de solution faible d'équations aux dérivées partielles linéaires peut également être présentée, avec des applications à la résolution des équations de LAPLACE, de la chaleur, des ondes, ou de l'équation de transport. Des développements sophistiqués se placeront sur le terrain de l'analyse hilbertienne avec par exemple l'application du théorème de LAX–MILGRAM voire la décomposition spectrale des opérateurs compacts dans un espace fonctionnel approprié.

223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications

Cette leçon permet souvent aux candidats de s'exprimer. Il ne faut pas négliger les suites de nombres complexes mais les suites vectorielles (dans $\mathbf{R}^n$) ne sont pas dans le sujet. Le jury attire l'attention sur le fait que cette leçon n'est pas uniquement à consacrer à des suites convergentes, mais tout comportement asymptotique peut être présenté. Le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS doit être cité et le candidat doit être capable d'en donner une démonstration. On attend des candidats qu'ils parlent des limites inférieure et supérieure d'une suite réelle bornée, et qu'ils en maîtrisent le concept. Les procédés de sommation peuvent être éventuellement évoqués mais le théorème de CESÀRO doit être mentionné et sa preuve maîtrisée par tout candidat à l'agrégation. Les résultats autour des sous-groupes additifs de $\mathbf{R}$ permettent d'exhiber des suites denses remarquables et l'ensemble constitue un joli thème. Des thèmes des leçons 225, 226 et 264 peuvent également se retrouver dans cette leçon.

Pour aller plus loin, un développement autour de l'équirépartition est tout à fait envisageable. La méthode de NEWTON peut aussi illustrer la notion de vitesse de convergence.

224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

Cette lecŋn ne sera pas utilisée pour la session 2020. Ses thèmes se retrouveront dans les leçons 223, 239, 265.

Ce sujet permet d'exprimer un savoir-faire sur les techniques d'analyse élémentaire que ce soit sur les suites, les séries ou les intégrales. On peut par exemple établir un développement asymptotique à quelques termes des sommes partielles de la série harmonique, ou bien la formule de STIRLING que ce soit dans sa version factorielle ou pour la fonction Γ. On peut également s'intéresser aux comportements autour des singularités de fonctions spéciales célèbres. Du côté de l'intégration, on peut évaluer la vitesse de divergence de l'intégrale de la valeur absolue du sinus cardinal, avec des applications pour les séries de FOURIER, voire présenter la méthode de LAPLACE. L'étude de suites récurrentes, plus généralement de suites ou de fonctions définies implicitement, fait aussi partie du bagage de l'agrégatif, ou encore des études asymptotiques de solutions d'équations différentielles (sans résolution explicite).

226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

Le concept de point fixe d'une fonction est évidemment au coeur de cette leçon et l'énoncé d'au moins un théorème de point fixe, qu'il faut savoir mettre en œuvre sur des exemples simples, est évidemment pertinent. Le jury est parfois surpris que des candidats évoquent un théorème de point fixe dans les espaces de BANACH... sans être capables de définir ce qu'est un espace de BANACH ou d'en donner un exemple !

Au niveau élémentaire, les questions de monotonie, les notions de points attractifs ou répulsifs peuvent structurer l'exposition et l'aspect graphique n'est pas à négliger. Le jury attend quelques exemples illustrant la variété des situations et la suite récurrente $u_{n+1} = \sin(u_n)$ n'est que l'un d'entre eux : il doit certes être maîtrisé mais ne peut être le seul exemple. L'aspect vectoriel, pourtant présent dans l'intitulé, est trop souvent négligé. Le comportement des suites vectorielles définies par une relation linéaire $X_{n+1} = AX_n$ fournit pourtant un matériel d'étude conséquent.

L'étude des suites numériques linéaires récurrentes d'ordre p est souvent mal connue, notamment le lien avec l'aspect vectoriel.

La formulation de l'intitulé de cette leçon invite résolument à évoquer les problématiques de convergence d'algorithmes (notamment savoir estimer la vitesse) d'approximation de solutions de problèmes linéaires et non linéaires : dichotomie, méthode de NEWTON (avec sa généralisation au moins dans $\mathbf{R}^2$), algorithme du gradient, méthode de la puissance, méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires, schéma d'EULER,...

228 : Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Cette leçon est reformulée pour la session 2020 sous la forme

Continuité, dérivabilité, dérivation faible des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Cette leçon permet des exposés de niveaux, et de forme, très variés. Les théorèmes de base doivent être maîtrisés et illustrés par des exemples intéressants, par exemple le théorème des valeurs intermédiaires pour la dérivée, le théorème de ROLLE... Le jury s'attend évidemment à ce que les candidats connaissent et puissent calculer la dérivée des fonctions usuelles. Les candidats doivent disposer d'un exemple de fonction dérivable de la variable réelle qui ne soit pas continûment dérivable. La stabilité par passage à la limite des notions de continuité et de dérivabilité doit être comprise par les candidats. Pour aller plus loin, les propriétés de régularité des fonctions monotones et des fonctions convexes peuvent être mentionnées. La dérivabilité presque partout des fonctions lipschitziennes peut aussi relever aussi de cette leçon. On peut enfin s'intéresser à des exemples de fonctions continues nulle part dérivables.

Le nouvel intitulé doit conduire à analyser la généralisation de la notion de dérivée d'une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ à l'aide du principe de calcul « par dualité/transposition » de la théorie des distributions. Plus qu'une analyse fonctionnelle poussée, le jury attend une certaine familiarité avec le *calcul de dérivées faibles*, dans ce cadre particulier de *fonctions* de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, qu'on n'hésitera pas à motiver par des applications (en physique, en théorie du signal,...). On peut étudier les liens entre dérivée classique et dérivée faible, calculer la dérivée faible de fonctions discontinues (formule des sauts, par exemple pour des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbf{R}\backslash\{0\}$ et C^∞ par morceaux sur $\mathbf{R}$ comme la fonction de Heaviside, la valeur absolue) ou de fonctions du type $x \mapsto \int_a^x f(y)\mathrm{d}y$, f étant intégrable. On peut aussi relier la dérivée faible et la limite du taux d'accroissement au sens des distributions et établir le lien entre fonction croissante et dérivée faible positive. Il est également possible de parler du peigne de DIRAC. Pour aller encore plus loin, des exemples de convergence au sens des distributions peuvent tout à fait illustrer cette leçon.

229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

L'énoncé et la connaissance de la preuve de l'existence de limites à gauche et à droite pour les fonctions monotones sont attendues. Ainsi on doit parler des propriétés de continuité et de dérivabilité à gauche et à droite des fonctions convexes de la variable réelle. Il est souhaitable d'illustrer la présentation de la convexité par des dessins clairs. On notera que la monotonie concerne les fonctions réelles d'une seule variable réelle, mais que la convexité concerne également les fonctions définies sur une partie convexe de $\mathbf{R}^n$, qui fournissent de beaux exemples d'utilisation. L'étude de la fonctionnelle quadratique ou la minimisation de $||Ax - b||^2$ illustrent agréablement cette leçon.

Pour aller plus loin, la dérivabilité presque partout des fonctions monotones est un résultat remarquable (dont la preuve peut être éventuellement admise). L'espace vectoriel engendré par les fonctions monotones (les fonctions à variation bornée) relève de cette leçon. Enfin, la dérivation au sens des distributions fournit les caractérisations les plus générales de la monotonie et de la convexité ; les candidats peuvent s'aventurer utilement dans cette direction.

230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

De nombreux candidats commencent leur plan par une longue exposition des conditions classiques assurant la convergence ou la divergence des séries numériques. Sans être hors sujet, cette exposition ne doit pas former l'essentiel de la matière de la leçon. Un thème important de la leçon est en effet le comportement asymptotique des restes et sommes partielles (équivalents, développements asymptotiques — par exemple pour certaines suites récurrentes — cas des séries de Riemann, comparaison séries et intégrales, ...). Trop de présentations manquent d'exemples.

On peut aussi s'intéresser à certaines sommes particulières, que ce soit pour exhiber des nombres irrationnels (voire transcendants), ou mettre en valeur des techniques de calculs non triviales (par exemple en faisant appel aux séries de Fourier ou aux séries entières). L'utilisation des calculs de séries numériques en théorie des probabilités peut fournir des exemples pertinents illustrant cette leçon.

Enfin, si le jury apprécie que le théorème des séries alternées (avec sa version sur le contrôle du reste) soit maîtrisé, il rappelle aussi que ses généralisations possibles utilisant la transformation d'Abel trouvent toute leur place dans cette leçon.

233 : Analyse numérique matricielle : résolution approchée de systèmes linéaires, recherche de vecteurs propres, exemples.

Pour la session 2020, l'intitulé de cette leçon est reformulé en

Analyse numérique matricielle. Résolution approchée de systèmes linéaires, recherche d'éléments propres, exemples.

Cette leçon de synthèse doit mettre en lumière l'exploitation de techniques d'analyse pour aborder la résolution approchée de systèmes linéaires et de leurs propriétés spectrales, la recherche de vecteurs propres et de valeurs propres, et approfondir la compréhension des algorithmes.

Les notions de norme matricielle, de rayon spectral et de conditionnement sont évidemment centrales dans cette leçon. Néanmoins, un trop grand nombre de candidats maîtrise insuffisamment ces notions et se trouve mis en difficulté. Le jury attend donc un exposé clair et mieux dominé de ces notions, qui doit être agrémenté d'exemples et d'études de la convergence de méthodes itératives. Le lien avec la convergence des suites du type $X_{n+1} = AX_n$ doit être connu et illustré. Le conditionnement d'une matrice symétrique définie positive doit être connu et un lien avec $\sup_{||x||=1} x^\top Ax$ doit être fait. Le résultat général de convergence, relié au théorème du point fixe de Banach, doit être enrichi de considérations sur la vitesse de convergence.

Le jury invite les candidats à étudier diverses méthodes issues de contextes variés : résolution de systèmes linéaires, optimisation de fonctionnelles quadratiques (du type $\frac{1}{2}(Ax,x)-(b,x)$), recherche de valeurs propres,... Parmi les points intéressants à développer, on peut citer les méthodes de type Jacobi pour la résolution de systèmes linéaires, les méthodes de gradient dans le cadre quadratique, les méthodes de la puissance, puissance inverse et QR pour la recherche d'éléments propres. Les candidats pourront illustrer leur propos sur des matrices issues de problèmes de moindres carrés ou de schémas numériques pour les équations différentielles ou aux dérivées partielles linéaires.

234 : Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

Cette leçon porte sur les fonctions intégrables au sens de la théorie générale de l'intégration de Lebesgue ainsi que les suites et les espaces de telles fonctions. Elle ne se restreint donc pas au seul cas des fonctions intégrables pour la mesure de Lebesgue mais peut concerner d'autres mesures telles que la mesure de comptage, les mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, etc., ou encore les mesures de probabilités, qui entrent tout à fait dans le cadre de la leçon.

Le candidat est invité à étudier le comportement de suites de fonctions Lebesgue-intégrables. Il est souhaitable que soient mentionnés l'approximation par des fonctions étagées ainsi que les principaux théorèmes de convergence sous l'intégrale de cette théorie (le lemme de Fatou, le théorème de la convergence monotone et le théorème de convergence dominée) en les illustrant par des exemples et des contre-exemples judicieux. Il faut avoir compris que l'intégrale d'une fonction continue contre la mesure de Lebesgue coïncide avec la notion usuelle d'intégrale dite de Riemann, et connaître l'interprétation d'une série absolument convergente comme une intégrale. Cette leçon nécessite de maîtriser la notion de fonction mesurable et la notion de « presque partout » (et les opérations sur les ensembles négligeables qui sont associées) ainsi que la définition des espaces L^1, L^2. Toutefois, une connaissance des questions fines de la théorie de la mesure n'est pas exigée.

Une partie de cette leçon peut éventuellement être consacrée aux espaces L^p, mais il n'est pas requis d'en faire le cœur de la présentation. Évoquer la convolution entre fonctions L^1, et éventuellement entre fonctions de L^1 et de L^p ainsi que les propriétés de régularisation et de densité qui en résultent, font partie des attendus (on prendra garde toutefois d'éviter les raisonnements circulaires entre continuité des translations et approximation par convolution). Un développement original, mais techniquement exigeant, peut consister à étudier les conditions assurant la compacité de suites bornées dans L^p. Enfin, le cas particulier de l'espace hilbertien L^2 mérite attention mais il faut alors se concentrer sur les spécificités d'un espace de fonctions L^2 et éviter de faire un catalogue de propriétés vraies pour n'importe quel espace de Hilbert.

235 : Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

Cette leçon s'intéresse aux problèmes d'interversion limite-limite, limite-intégrale et intégrale-intégrale. Il ne s'agit pas de refaire un cours d'intégration. On pourra toutefois mettre en évidence le rôle important joué par des théorèmes cruciaux de ce cours. À un niveau élémentaire, on peut insister sur le rôle de la convergence uniforme (et donc, dans le cas de séries de fonctions bornées, de la convergence normale.)

Les théorèmes de convergence monotone, de convergence dominée et les théorèmes d'interversion de Fubini-Tonelli et Fubini sont des attendus de cette leçon. On choisira des exemples pertinents pour illustrer l'intérêt de chacun de ces résultats, mais on pourra aussi exhiber des contre-exemples montrant que des hypothèses trop faibles ne permettent pas en général d'effectuer l'interversion voulue. Le jury note que ces différents points posent problème à de nombreux candidats, qui sont mis en difficulté sur des exemples assez simples. Ils sont donc invités à consolider ces notions avant de s'aventurer plus loin.

Pour les candidats qui le souhaitent, on pourra parler de la transformée de FOURIER et/ou de la transformée de LAPLACE avec des exemples et des applications.

236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Cette leçon doit être très riche en exemples, que ce soit l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ ou bien d'autres encore. Il est tout à fait pertinent de commencer par les différentes techniques élémentaires (intégration par parties, changement de variables, décomposition en éléments simples, intégrale à paramètres,...). Trop de candidats manquent d'aisance avec le calcul d'intégrales multiples. Le calcul de l'intégrale d'une gaussienne sur $\mathbf{R}^n$ ou le calcul du volume de la boule unité de $\mathbf{R}^n$ ne devraient pas poser de problèmes insurmontables. Le programme du concours indique que la formule d'intégration par parties multi-dimensionnelle qui relie intégrale de volume et intégrale de surface est admise ; il ne faut pas hésiter à l'exploiter et à l'illustrer par des exemples. On peut également présenter des utilisations du théorème des résidus.

On peut aussi penser à l'utilisation du théorème d'inversion de FOURIER ou du théorème de PLANCHEREL. Certains éléments de la leçon précédente, comme par exemple l'utilisation des théorèmes de convergence monotone, de convergence dominée et/ou de FUBINI, sont aussi des outils permettant le calcul de certaines intégrales.

Enfin, il est tout à fait pertinent d'évoquer les méthodes de calcul approché d'intégrales (méthodes des rectangles, méthode de Monte-Carlo, etc.), une piste qui mériterait d'être davantage explorée.

239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Les candidats incluent les théorèmes de régularité (version segment — a minima — mais aussi version « convergence dominée ») ce qui est pertinent mais la leçon ne doit pas se réduire seulement à cela. Cette leçon doit être riche en exemples, ce qui parfois n'est pas suffisamment le cas. Elle peut être encore enrichie par des études et méthodes de comportements asymptotiques. Les propriétés de la fonction Γ d'EULER fournissent un développement standard, mais non sans risque (on pourra y inclure le comportement asymptotique, voire son prolongement analytique) ; certains candidats sont trop ambitieux pour le temps dont ils disposent. Le jury invite donc à bien préciser ce que le candidat souhaite montrer pendant son développement. Les différentes transformations classiques (FOURIER, LAPLACE,...) relèvent aussi naturellement de cette leçon. On peut en donner des applications pour obtenir la valeur d'intégrales classiques (celle de l'intégrale de DIRICHLET par exemple). Le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale est trop peu souvent cité.

Pour aller encore plus loin, on peut par exemple développer les propriétés des transformations mentionnées (notamment la transformée de FOURIER, par exemple en s'attardant sur le lien entre régularité de la fonction et décroissance de sa transformée de FOURIER), ainsi que de la convolution.

241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Les résultats généraux sur les différents types de convergence doivent être présentés et maîtrisés. Le jury attend du candidat qu'il évoque les séries de fonctions particulières classiques : séries entières, séries génératrices, séries de FOURIER, avec des exemples et des applications. On pourra également s'intéresser à la fonction zêta de RIEMANN, ou plus généralement aux séries de DIRICHLET.

Par ailleurs, la leçon n'exclut pas du tout de s'intéresser au comportement des suites et séries de fonctions dans les espaces de type L^p (notamment pour $p = 1$), ou encore aux séries de variables aléatoires indépendantes.

Pour aller plus loin, on pourra présenter comment identifier la limite au sens des distributions d'une famille qui régularise la masse de Dirac ou encore aborder des exemples de construction de parties finies de Hadamard.

243 : Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Cette leçon est réformulée pour la session 2020 en

Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Cette reformulation a pour objectif de clarifier les attendus, dont font partie les propriétés élémentaires des séries entières. Trop de candidats hésitent sur les différentes notions de convergence, les notions de disque de convergence et des domaines où il y a convergence normale ; un effort de préparation doit être fait sur ces notions afin de lever toute imprécision.

Les candidats évoquent souvent des critères (Cauchy, D'Alembert) permettant d'estimer le rayon de convergence mais oublient souvent la formule de Cauchy-Hadamard ou toute technique utilisant une majoration ou un équivalent. Des faiblesses importantes ont été observées quant à ces techniques. Le jury attend bien sûr que le candidat puisse donner des arguments justifiant qu'une série entière en 0 dont le rayon de convergence est R est développable en série entière en un point z_0 intérieur au disque de convergence et de minorer le rayon de convergence de cette série. Sans tomber dans un catalogue excessif, on peut indiquer les formules de développement de fonctions usuelles importantes (exp, log, $1/(1-z)$, sin,...). S'agissant d'exemples fondamentaux et classiques, le jury attend que le candidat puisse les donner sans consulter ses notes. En ce qui concerne la fonction exponentielle, le candidat doit avoir réfléchi au point de vue adopté sur sa définition et donc sur l'articulation entre l'obtention du développement en série entière et les propriétés de la fonction. À ce propos, les résultats sur l'existence du développement en série entière pour les fonctions dont on contrôle toutes les dérivées successives sur un voisinage de 0 sont souvent méconnus. Le comportement de la série entière dans le disque de convergence en relation avec les différents modes de convergence (convergence absolue, convergence uniforme, convergence normale) doit être maîtrisé.

La présentation des fonctions génératrices d'une variable aléatoire discrète peut tout à fait illustrer cette leçon. Le théorème d'Abel (radial ou sectoriel) trouve toute sa place mais doit être agrémenté d'exercices pertinents. Réciproquement, les théorèmes taubériens offrent aussi de jolis développements. On peut aller plus loin en abordant quelques propriétés importantes liées à l'analyticité de la somme d'une série entière ou encore la résolution de certaines équations différentielles ordinaires par la méthode du développement en série entière.

245 : Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$. Exemples et applications.

Cet intitulé ne sera pas utilisé pour la session 2020 où il sera remplacé par

Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications.

Cette reformulation a pour objectif d'offrir des points d'entrée plus variés à cette leçon. Ainsi, il est possible, dans un premier temps et si le candidat le souhaite, de parler de polynômes de la variable complexe, de fractions rationnelles, de séries entières, sans immédiatement exposer la théorie des fonctions holomorphes. Le jury attend des exemples illustrant ces notions et montrant la maîtrise des candidats sur ces points.

Concernant les questions d'holomorphie, outre la définition, la signification géométrique des équations de Cauchy-Riemann, la formule de Cauchy et les résultats concernant l'analyticité, le principe des zéros isolés, ou encore le principe du maximum, sont des attendus de cette leçon. Le lemme de Schwarz est un joli résultat permettant de faire un développement élémentaire s'il est agrémenté d'applications pertinentes, comme par exemple déterminer les automorphismes du disque unité. La notation $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ a un sens précis, qu'il faut savoir expliquer. La leçon invite également à présenter le théorème d'holomorphie sous le signe intégral et des exemples de fonctions célèbres (par exemple la fonction Gamma, la fonction zêta,...).

Même si cela ne constitue pas le cœur de la leçon, la définition d'une fonction méromorphe (l'ensemble des pôles doit être une partie fermée discrète) peut être présentée à condition que cette notion soit maîtrisée et accompagnée d'exemples. Le jury attire l'attention sur le fait que le prolongement de la fonction Gamma en fonction méromorphe est très souvent proposé mais insuffisamment maîtrisé. Proposer un développement moins ambitieux mais maîtrisé est une stratégie plus payante, qui ouvre la discussion avec le jury de manière plus positive.

Pour les candidats qui le souhaitent, cette leçon offre des possibilités d'ouverture en lien avec la topologie du plan. La preuve du théorème de l'application conforme de Riemann est par exemple un développement de très bon niveau qui ne doit pas être abordé sans une bonne maîtrise des questions en jeu.

246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.

Les différents résultats autour de la convergence (L^2, Fejér, Dirichlet,...) doivent être connus. On prendra garde au sens de la notation $\sum_{n\in\mathbf{Z}}$ (qu'il est plus prudent d'éviter car elle est souvent inadaptée). Il faut avoir les idées claires sur la notion de fonctions de classe C^1 par morceaux (elles ne sont pas forcément continues). Le théorème d'isométrie bijective entre espaces L^2 et ℓ^2 doit apparaître. Dans le cas d'une fonction continue et C^1 par morceaux on peut conclure sur la convergence normale de la série Fourier sans utiliser le théorème de Dirichlet. Il est classique d'obtenir des sommes de séries remarquables comme conséquence de ces théorèmes.

On peut aussi s'intéresser à la formule de Poisson et à ses conséquences. L'existence d'exemples de séries de Fourier divergentes, associées à des fonctions continues (qu'ils soient explicites ou obtenus par des techniques d'analyse fonctionnelle) peuvent aussi compléter le contenu.

Il est souhaitable que cette leçon ne se réduise pas à un cours abstrait sur les coefficients de Fourier. La résolution d'équations aux dérivées partielles (par exemple l'équation de la chaleur ou l'équation des ondes avec une estimation de la vitesse de convergence) peut illustrer de manière pertinente cette leçon, mais on peut penser à bien d'autres applications (inégalité isopérimétrique, comportements remarquables des fonctions à spectre lacunaire,...).

250 : Transformation de Fourier. Applications.

Cette leçon offre de multiples facettes. Les candidats peuvent adopter différents points de vue : L^1, L^2 et/ou distributions. L'aspect « séries de Fourier » n'est toutefois pas dans l'esprit de cette leçon ; il ne s'agit pas de faire de l'analyse de Fourier sur n'importe quel groupe localement compact mais sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}^d$.

La leçon nécessite une bonne maîtrise de questions de base telles que la définition du produit de convolution de deux fonctions de L^1. On ne doit pas se limiter à une analyse algébrique de la transformation de Fourier. C'est bien une leçon d'analyse, qui nécessite une étude soigneuse des hypothèses, des définitions et de la nature des objets manipulés. Le lien entre la régularité de la fonction et la décroissance de sa transformée de Fourier doit être fait, même sous des hypothèses qui ne sont pas minimales. Les candidats doivent savoir démontrer le lemme de Riemann-Lebesgue pour une fonction intégrable.

La formule d'inversion de Fourier pour une fonction L^1 dont la transformée de Fourier est aussi L^1 est attendue ainsi que l'extension de la transformée de Fourier à l'espace L^2 par Fourier-Plancherel. Des exemples explicites de calculs de transformations de Fourier classiques comme la gaussienne ou $(1+x^2)^{-1}$ paraissent nécessaires.

Pour aller plus loin, la transformation de Fourier des distributions tempérées ainsi que la convolution dans le cadre des distributions tempérées peuvent être abordées. Les attentes du jury sur ces questions restent modestes, au niveau de ce qu'un cours de première année de master sur le sujet peut contenir. Le fait que la transformée de FOURIER envoie $\mathscr{S}(\mathbf{R}^d)$ dans lui même avec de bonnes estimations des semi-normes doit alors être compris et la formule d'inversion de FOURIER maîtrisée dans ce cadre. Des exemples de calcul de transformée de FOURIER peuvent être donnés dans des contextes liés à la théorie des distributions comme par exemple la transformée de FOURIER de la valeur principale de $\frac{1}{x}$. Dans un autre registre, il est aussi possible d'orienter la leçon vers l'étude de propriétés des fonctions caractéristiques de variables aléatoires.

La résolution de certaines équations aux dérivées partielles telles que, par exemple, l'équation de la chaleur sur $\mathbf{R}$, peut être abordée, avec une discussion sur les propriétés qualitatives des solutions.

253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Il s'agit d'une leçon de synthèse, très riche, qui mérite une préparation soigneuse. Même si localement (notamment lors de la phase de présentation orale) des rappels sur la convexité peuvent être énoncés, ceci n'est pas nécessairement attendu dans le plan. Il s'agit d'aborder différents champs des mathématiques où la convexité intervient. On pensera bien sûr, sans que ce soit exhaustif, aux problèmes d'optimisation (par exemple de la fonctionnelle quadratique), au théorème de projection sur un convexe fermé, au rôle joué par la convexité dans les espaces vectoriels normés (convexité de la norme, jauge d'un convexe,...). Les fonctions convexes élémentaires permettent aussi d'obtenir des inégalités célèbres. On retrouve aussi ce type d'argument pour justifier des inégalités de type BRUNN-MINKOWSKI ou HADAMARD. Par ailleurs, l'inégalité de JENSEN a aussi des applications en intégration et en probabilités.

Pour aller plus loin, on peut mettre en évidence le rôle joué par la convexité dans le théorème de séparation de HAHN-BANACH. On peut aussi parler des propriétés d'uniforme convexité dans certains espaces, les espaces L^p pour $p > 1$, par exemple, et de leurs conséquences.

260 : Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

Cette leçon ne sera pas utilisée pour la session 2020 ; les notions qui s'y rapportent peuvent être exploitées dans les leçons 261, 262, 264, 266.

Les candidats doivent connaître la définition des moments centrés et les implications d'existence de moments (décroissance des L^p). Les connaissances sur les variables aléatoires à densité sont parfois fragiles. Le candidat doit pouvoir citer — mais doit surtout savoir retrouver rapidement — les espérances et variances de lois usuelles, notamment BERNOULLI, binomiale, géométrique, POISSON, exponentielle, normale. La variance de la somme de variables aléatoires indépendantes suscite souvent des hésitations. Les inégalités classiques (de MARKOV, de BIENAYMÉ-CHEBYSHEV, de JENSEN et de CAUCHY-SCHWARZ) pourront être données, ainsi que les théorèmes de convergence (lois des grands nombres et théorème central limite). La notion de fonction génératrice des moments est importante ainsi que les liens entre moments et fonction caractéristique.

261 : Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.

Cette leçon est l'occasion de présenter clairement la notion de loi d'une variable aléatoire et de l'illustrer par de nombreux exemples et calculs. On distinguera bien la probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω de la probabilité μ_X définie sur l'ensemble des valeurs de X par $\mu_X(A) = \mathbf{P}(X \in A) = \mathbf{P}(X^{-1}(A))$. Le théorème de transfert qui calcule $\mathbf{E}[f(X)]$ peut alors être donné comme une extension fonctionnelle de cette définition ensembliste. Inversement, on peut s'intéresser à des classes $\mathcal{C}$ de fonctions telles que la connaissance de $\mathbf{E}[f(X)]$ pour $f \in \mathcal{C}$ détermine la loi de X. Ceci mène aux outils usuels de caractérisation de la loi (fonction de répartition, fonction caractéristique, densité éventuelle, mais aussi la fonction génératrice pour des variables entières ou la transformée de LAPLACE de variables positives, ou encore les moments lorsque cela est pertinent). Les principales propriétés des fonctions de répartition des variables réelles doivent être connues. Il est important de savoir qu'il y a une bijection entre les lois sur $\mathbf{R}$ et les fonctions croissantes continues à droite tendant vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$. Il faut savoir interpréter les sauts d'une fonction de répartition, et, lorsque la fonction de répartition est C^1, savoir que la variable admet alors une densité qui est la dérivée de la fonction de répartition. Le jury s'attend à ce que le candidat puisse tracer la fonction de répartition de lois simples. Les principales propriétés des fonctions caractéristiques doivent être également connues : continuité, limite à l'infini, régularité plus forte en fonction de l'existence de moments. Des résultats analogues (et plus élémentaires) portant sur les fonctions génératrices de variables entières ou les transformées de Laplace de variables positives ont également toute leur place ici. La caractérisation de l'indépendance de n variables en termes de produit de lois entre dans le cadre de cette leçon. Les variables aléatoires à valeurs vectorielles (en restant dans le cadre de la dimension finie) font aussi partie de la leçon et on évoquera la loi conjointe et les lois marginales. La notion d'indépendance pourra alors être décrite. Cette leçon devra être illustrée par de nombreux exemples de calculs de lois : présentation de lois usuelles en lien avec ce qu'elles modélisent, calculs de fonctions caractéristiques ou de densités selon pertinence, loi de $\phi(X)$ à partir de la loi de X, loi de $\max(X_1, \ldots, X_n)$, $\min(X_1, \ldots, X_n)$, $X_1 + \ldots + X_n$, etc.

262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

Les théorèmes limite sont au cœur de cette leçon. La maîtrise des différentes définitions des modes de convergence est attendue mais doit être completée par leur mise en pratique dans les différents théorèmes limites. Les différences entre ces théorèmes doivent être abordées avec des exemples et contre-exemples.

Les implications entre les divers modes de convergence, ainsi que les réciproques partielles doivent être connues. Des contre-exemples aux réciproques sont attendus par le jury. Les théorèmes de convergence (lois des grands nombres et théorème central limite) doivent être énoncés et il faut au moins en connaître l'architecture des preuves.

Pour aller plus loin, les candidats pourront s'intéresser au comportement asymptotique de marches aléatoires (en utilisant par exemple le lemme de Borel-Cantelli, les fonctions génératrices,...). Enfin, les résultats autour des séries de variables aléatoires indépendantes comme le théorème de Kolmogorov peuvent tout à fait se placer dans cette leçon.

On peut aussi s'intéresser aux temps de retour pour une marche aléatoire simple. Pour aller plus loin, et pour les candidats maîtrisant ces notions, on peut suggérer aussi l'étude asymptotique de(s) chaînes de Markov, ou encore d'aborder les lois infiniment divisibles, les lois stables, les processus de renouvellement (qui donnent de beaux théorèmes de convergence).

264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Le jury attend des candidats qu'ils rappellent la définition d'une variable aléatoire discrète et que des lois usuelles soient présentées, en lien avec des exemples classiques de modélisation. Le lien entre variables aléatoires de Bernoulli, binomiale et de Poisson doit être discuté. Il peut être d'ailleurs intéressant de mettre en avant le rôle central joué par les variables aléatoires de Bernoulli.

Les techniques spécifiques aux variables discrètes, notamment à valeurs entières, devront être mises en évidence, comme par exemple la caractérisation de la convergence en loi, la notion de fonction génératrice.

Pour aller plus loin, le processus de Galton-Watson peut se traiter intégralement à l'aide des fonctions génératrices et cette voie a été choisie par plusieurs candidats : cela donne un développement de très bon niveau pour ceux qui savent justifier les étapes délicates.

Pour aller beaucoup plus loin, les candidats pourront étudier les marches aléatoires, les chaînes de Markov à espaces d'états finis ou dénombrables, les sommes ou séries de variables aléatoires indépendantes.

265 : Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

Cette leçon de synthèse doit permettre d'explorer de nombreux pans du programme. Les candidats se sont bien emparés de ce nouveau titre et en ont proposé des contenus et points de vue variés. Évidemment, la leçon ne doit pas se cantonner au seul champ des fonctions usuelles (logarithme, exponentielle, trigonométriques, hyperboliques et réciproques). Le jury attend surtout d'un agrégé qu'il soit en mesure de présenter rapidement les définitions et les propriétés fondamentales de ces fonctions, qu'il sache les tracer sans difficultés, qu'il puisse mener l'étude aux bornes de leur domaine, ainsi que discuter leurs prolongements éventuels, leurs développements de Taylor ou en série entière, leurs applications au calcul intégral, les équations fonctionnelles associées ou formules particulières, etc. Le jury n'attend pas un catalogue mais plutôt un choix pertinent et réfléchi, avec des applications en probabilité, convexité, études de courbes, ou autour des développements asymptotiques. Les déterminations du logarithme complexe peuvent tout à fait mériter une discussion approfondie dans cette leçon et donner lieu à des développements de bon niveau, pouvant aller jusqu'à leur interprétation géométrique.

Le domaine des fonctions spéciales est très vaste. Il faut absolument éviter l'écueil d'une taxonomie fastidieuse et dépourvue de motivation ; il vaut bien mieux se concentrer sur des exemples restreints, mais fouillés, par exemple une étude approfondie (d'une) des fonctions Γ, ζ ou θ, leurs propriétés fonctionnelles, leurs prolongements, leur étude asymptotique aux bornes et les domaines d'application de ces fonctions.

Il y a donc bien des manières, très différentes, de construire valablement cette leçon. Par exemple, on peut bâtir un exposé organisé selon des problématiques et des techniques mathématiques : suites et séries de fonctions, fonctions holomorphes et méromorphes, problèmes de prolongement, développements asymptotiques, calculs d'intégrales et intégrales à paramètres, transformées de Fourier ou de Laplace, etc. Mais on pourrait tout aussi bien suivre un fil conducteur motivé par un domaine d'application :

- en arithmétique pour évoquer, par exemple, la fonction ζ et la distribution des nombres premiers,
- en probabilités où la loi normale et la fonction erreur sont évidemment incontournables mais on peut aussi évoquer les lois Gamma et Bêta, les fonctions de Bessel et leurs liens avec la densité du χ^2 non centrée et celle de la distribution de Von Mises-Fisher ou plus simplement comme la loi du produit de variables aléatoires normales et indépendantes, la loi ζ et ses liens avec la théorie des nombres,...
- en analyse des équations aux dérivées partielles où les fonctions spéciales interviennent notamment pour étudier le problème de Dirichlet pour le Laplacien ou l'équation des ondes,
- il est aussi possible d'évoquer les polynômes orthogonaux, leurs propriétés et leurs diverses applications, en physique (oscillateur harmonique et polynômes de Hermite), en probabilités (polynômes de Hermite pour les lois normales, de Laguerre pour les lois Gamma, de Jacobi pour les lois Bêta...), pour l'étude d'équations aux dérivées partielles ou pour l'analyse de méthodes numériques,
- en théorie des représentations de groupes avec les fonctions de Bessel,
- en algèbre en abordant les fonctions elliptiques et la fonction $\wp$ de Weierstrass.

Là encore, le jury renouvelle sa mise en garde d'éviter de faire un catalogue qui s'avérerait stérile, il s'agit bien plutôt de se tenir à détailler l'un ou l'autre de ces points de vue. Cette leçon doit être l'occasion de montrer un véritable investissement personnel, adossé aux goûts du candidat.

Pour la session 2020, deux nouvelles leçons seront proposées :

266 : Illustration de la notion d'indépendance en probabilités.

L'indépendance est centrale en probabilités et démarque cette théorie de celle de l'intégration. La motivation de cette leçon est de présenter cette notion de façon cohérente et de l'illustrer par des énoncés fondamentaux et des modèles importants.

À partir de la notion élémentaire de probabilité conditionnelle, on pourra introduire l'indépendance de deux événements, l'indépendance mutuelle d'une suite d'événements, voire celle d'une suite de tribus, puis l'indépendance de familles de variables aléatoires. Ces notions doivent être illustrées par des exemples et des énoncés simples (indépendance deux à deux et indépendance mutuelle, indépendance et opérations ensemblistes, etc). Il est important de pouvoir présenter un espace de probabilité sur lequel sont définies n variables aléatoires indépendantes, au moins à un niveau élémentaire pour des variables discrètes ou à densité. De façon plus sophistiquée, on peut envisager de donner une construction d'un espace de probabilité sur lequel est définie une suite de variables aléatoires réelles indépendantes ayant des lois prescrites.

Au delà des définitions, il est nécessaire de décliner quelques propriétés simples de l'indépendance, notamment celles en lien avec l'espérance et, plus spécifiquement, les notions de variance et de covariance, ce qui peut s'illustrer par exemple par l'obtention de lois faibles des grands nombres. Une autre illustration possible consiste en la représentation des variables usuelles (binomiales, géométriques, hypergéométriques ...) à l'aide d'expériences indépendantes élémentaires. Grâce aux divers critères utilisant les fonctions ou transformées caractérisant les lois (densité, fonction génératrice, fonction de répartition à n variables, fonction caractéristique, etc) il est possible de présenter les propriétés d'indépendance remarquables dont jouissent les lois usuelles (lois de POISSON, lois normales, lois exponentielles, lois de CAUCHY ou, pour aller plus loin, par exemple, la traduction de l'indépendance des vecteurs gaussiens en termes d'algèbre bilinéaire).

Les réciproques du lemme de BOREL-CANTELLI et la loi du 0-1 de KOLMOGOROV, plus sophistiquée, tiennent une place de choix dans cette leçon ; elles permettent notamment d'obtenir des convergences presque sûres. De manière générale, il est important d'illustrer cette leçon par des exemples tels que l'étude des records ou les propriétés du minimum de variables exponentielles indépendantes ou bien les statistiques d'ordre, ou encore le principe du « singe tapant à la machine », etc. Enfin, la promenade aléatoire simple symétrique sur $\mathbf{Z}$ est une riche source d'exemples.

267 : Exemples d'utilisations de courbes en dimension 2 ou supérieure.

Cette leçon de synthèse doit permettre de montrer la variété d'utilisation des courbes dans le plan (ou, dans une perspective plus ambitieuse, de courbes tracées sur un objet géométrique plus élaboré), que celles-ci soient définies sous une forme paramétrique ou une sous forme implicite. Plutôt qu'une théorie générale ou un catalogue de formules relatives à divers systèmes de coordonnées qui seraient donnés sans motivation, le jury attend plutôt une illustration des applications des courbes planes en topologie, en calcul différentiel, en géométrie ou en analyse complexe à partir d'exemples et de résultats pertinents. Il s'agit d'un sujet suffisamment riche qui permet d'aborder des points de géométrie intéressants tout en restant à un niveau mathématique raisonnable. Cette leçon doit présenter différents aspects de l'utilisation des courbes : on ne pourra se contenter d'un seul. La liste qui suit, qui n'est pas exhaustive, présente plusieurs pistes.

Les propriétés métriques des courbes planes (longueur d'arc, voire courbure) font naturellement partie de cette leçon. Un axe de cette leçon pourrait concerner l'obtention du tracé des courbes et l'étude de mouvements ponctuels dans le plan, qu'ils soient donnés sous forme de lieux (coniques, cycloïdes diverses, etc) ou de solutions d'équations différentielles (par exemple inspirés de problème de mécanique du point, comme le mouvement à deux corps et les lois de KEPLER). On peut également penser à l'utilisation d'intégrales premières en vue de l'analyse des solutions de systèmes d'équations différentielles ordinaires (périodicité du mouvement d'un pendule pesant, de solutions du système de LOTKA–VOLTERRA, méthode des caractéristiques pour la résolution d'équations de transport, etc.). Il est important que les exemples de tracés de courbes soient motivés.

L'application des courbes planes à la topologie est un point qui peut illustrer naturellement cette leçon : le concept de connexité par arcs, le théorème du relèvement ainsi que la notion d'indice d'un lacet par rapport à un point en lien avec le théorème intégral de CAUCHY en analyse complexe... sont des sujets d'investigation pertinents pour cette leçon. Pour aller plus loin, cette leçon peut être l'occasion de s'attarder sur ces techniques d'analyse complexe ainsi que sur les divers résultats qui y sont liés comme par exemple, la formule des résidus, l'existence d'une primitive complexe, voire la méthode du col pour l'obtention de développements asymptotiques, l'étude de certaines transformations conformes (comme la transformation de JOUKOVSKI) et leurs applications... Pour les candidats qui le souhaitent, il est enfin possible de développer quelques aspects de géométrie des surfaces en parlant par exemple de vecteurs tangents, de géodésiques sur la sphère ou encore d'extrema liés.

5.4 Épreuves orales Option D

5.4.1 L'épreuve de leçon de mathématiques de l'option D

Dans cette épreuve, le candidat tire au sort un couple de sujets au sein d'une sélection d'une quarantaine de leçons d'algèbre-géométrie et d'analyse-probabilités extraite de la liste générale des autres options du concours. La sélection qui sera utilisée en 2020 est publiée en annexe du présent document. *Il n'y a pas nécessairement un sujet d'algèbre et un sujet d'analyse* : les couples de leçons proposés au tirage au sort peuvent comprendre deux sujets d'algèbre ou deux sujets d'analyse, par exemple : *Variables aléatoires discrètes* et *Fonctions monotones*. Le jury met donc les candidats en garde contre toute tentation de faire l'impasse sur une partie du programme. Les candidats de cette option préfèrent souvent, lorsque ce choix leur est donné, les sujets relevant de l'algèbre. Toutefois les modalités de formation des couplages de leçons rendent hasardeuse toute stratégie de préparation qui négligerait les connaissances en analyse et probabilités.

Le jury interroge les candidats dans le même esprit que dans les autres options ; la grille de notation et les critères d'évaluation sont strictement identiques. Les remarques détaillées concernant cette épreuve ne sont pas différentes des remarques concernant les épreuves de leçon des autres options et le lecteur est invité à se reporter aux sections précédentes de ce rapport.

5.4.2 L'épreuve orale de leçon d'informatique fondamentale de l'option D

De manière générale, le jury a apprécié la qualité de nombreuses leçons présentées, dans les différents domaines, fruit du sérieux travail de fond mené dans les préparations spécifiques en amont du concours. La qualité des plans proposés mérite d'être soulignée. Beaucoup de candidats cernent bien le sujet de leurs leçons et proposent des développements intéressants. Le jury a noté une amélioration dans la diversité des développements proposés, mais regrette que parfois au moins un des développements proposés ne soit pas central dans la leçon.

Le jury a constaté que, cette année encore, quelques candidats ont choisi l'option D apparemment sans avoir identifié les connaissances attendues. L'épreuve de la leçon est une épreuve difficile, qui couvre des domaines variés du champ de la science informatique. Elle ne peut être réussie que si elle est préparée sérieusement et sur une période suffisamment longue, adossée à une formation initiale avancée en informatique ; il serait illusoire de choisir cette option par défaut, sans préparation.

Le niveau constaté est assez hétérogène, ce qui conduit à une grande dispersion des notes. Le jury n'hésite pas à utiliser toute l'étendue de la plage de notation.

Organisation de la leçon. Le jury rappelle qu'il s'agit bien d'une épreuve d'informatique, et non pas d'outils mathématiques pour l'informatique. Il appartient au candidat de montrer la pertinence des outils mathématiques qu'il développe vis-à-vis des objectifs du thème informatique développé dans la leçon. Les titres de nombreuses leçons mentionnent explicitement exemples ou/et applications, ce qui doit être pris en compte dans la leçon. En particulier, le candidat doit argumenter sur l'utilisation en informatique des notions introduites et proposer des exemples pertinents de leur application concrète. Le jury regrette que certains candidats fassent l'impasse sur cet aspect. Quand des algorithmes ou des structures de données sont présentées, la question de la complexité est centrale.

Le jury invite les candidats à mettre en perspective les approches développées afin d'argumenter sur leurs bénéfices.

Enfin, il faut rappeler que lors de la présentation de son plan, le candidat doit proposer au moins deux développements : le jury est attentif d'une part à ce que les deux développements entrent strictement dans le cadre de la leçon, et que d'autre part ils ne se réduisent pas à des exemples triviaux. Tout hors sujet est sévèrement pénalisé.

Interaction avec le jury. Une large partie de l'épreuve est consacrée à l'interaction avec le jury. Ici, il s'agit plutôt d'explorer de manière plus approfondie les notions qui ont été présentées, les domaines connexes, et surtout les exemples d'application de ces notions.

L'interaction est conduite sous la forme d'un dialogue avec le candidat. Le jury respecte le niveau choisi par le candidat : les questions s'ajustent à ce niveau. De même, toute digression du candidat sur un domaine connexe à celui de la leçon condut le jury à tester les connaissances du candidat sur ce domaine : les connaissances solides sont récompensées, mais un manque de maîtrise sur des notions mises en avant par le candidat lui-même est pénalisé. Ce long temps d'interaction doit être considéré comme une occasion privilégiée pour le candidat de montrer ses connaissances. Il est indispensable que les candidats s'entraînent à ce type d'exercice avec leurs préparateurs.

5.4.3 Commentaires sur les leçons d'informatique

Les leçons proposées en 2020 sont identiques à celles utilisées en 2019.

901 Structures de données. Exemples et applications.

Le mot algorithme ne figure pas dans l'intitulé de cette leçon, même si l'utilisation des structures de données est évidemment fortement liée à des questions algorithmiques. La leçon doit donc être orientée plutôt sur la question du choix d'une structure de données. Le jury attend du candidat qu'il présente différents types abstraits de structures de données en donnant quelques exemples de leur usage avant de s'intéresser au choix de la structure concrète. Le candidat ne peut se limiter à des structures linéaires simples comme des tableaux ou des listes, mais doit présenter également quelques structures plus complexes, reposant par exemple sur des implantations à l'aide d'arbres. Les notions de complexité des opérations usuelles sur la structure de données sont bien sûr essentielles dans cette leçon.

903 Exemples d'algorithmes de tri. Correction et complexité.

Sur un thème aussi classique, le jury attend des candidats la plus grande précision et la plus grande rigueur.

Ainsi, sur l'exemple du tri rapide, il est attendu du candidat qu'il sache décrire avec soin l'algorithme de partition et en prouver la correction en exhibant un invariant adapté. L'évaluation des complexités dans le cas le pire et en moyenne devra être menée avec rigueur : si on utilise le langage des probabilités, il importe que le candidat sache sur quel espace probabilisé il travaille.

On attend également du candidat qu'il évoque la question du tri en place, des tris stables, des tris externes ainsi que la représentation en machine des collections triées.

907 Algorithmique du texte. Exemples et applications.

Cette leçon devrait permettre au candidat de présenter une grande variété d'algorithmes et de paradigmes de programmation, et ne devrait pas se limiter au seul problème de la recherche d'un motif dans un texte, surtout si le candidat ne sait présenter que la méthode naïve.

De même, des structures de données plus riches que les tableaux de caractères peuvent montrer leur utilité dans certains algorithmes, qu'il s'agisse d'automates ou d'arbres par exemple.

Cependant, cette leçon ne doit pas être confondue avec la 909, « *Langages rationnels et Automates finis. Exemples et applications.* ». La compression de texte peut faire partie de cette leçon si les algorithmes présentés contiennent effectivement des opérations comme les comparaisons de chaînes : la compression LZW, par exemple, est plus pertinente dans cette leçon que la compression de Huffman.

909 Langages rationnels et automates finis. Exemples et applications.

Pour cette leçon très classique, il importe de ne pas oublier de donner exemples et applications, ainsi que le demande l'intitulé.

Une approche algorithmique doit être privilégiée dans la présentation des résultats classiques (déterminisation, théorème de Kleene, etc.) qui pourra utilement être illustrée par des exemples. Le jury est naturellement amené à poser des questions telles que : « connaissez-vous un algorithme pour décider de l'égalité des langages reconnus par deux automates ? quelle est sa complexité ? »

Des applications dans le domaine de l'analyse lexicale et de la compilation entrent naturellement dans le cadre de cette leçon.

912 Fonctions récursives primitives et non primitives. Exemples.

Il s'agit de présenter un modèle de calcul : les fonctions récursives. S'il est bien sûr important de faire le lien avec d'autres modèles de calcul, par exemple les machines de Turing, la leçon doit traiter des spécificités de l'approche. Le candidat doit motiver l'intérêt de ces classes de fonctions sur les entiers et pourra aborder la hiérarchie des fonctions récursives primitives. Enfin, la variété des exemples proposés sera appréciée.

913 Machines de Turing. Applications.

Il s'agit de présenter un modèle de calcul. Le candidat doit expliquer l'intérêt de disposer d'un modèle formel de calcul et discuter le choix des machines de Turing. La leçon ne peut se réduire à la leçon 914 ou à la leçon 915, même si, bien sûr, la complexité et l'indécidabilité sont des exemples d'applications. Plusieurs développements peuvent être communs avec une des leçons 914, 915, mais il est apprécié qu'un développement spécifique soit proposé.

914 Décidabilité et indécidabilité. Exemples.

Le programme de l'option offre de très nombreuses possibilités d'exemples. Si les exemples classiques de problèmes sur les machines de Turing figurent naturellement dans la leçon, le jury apprécie des exemples issus d'autres parties du programme : théorie des langages, logique,...

Le jury porte une attention particulière à une formalisation propre des réductions, qui sont parfois très approximatives.

915 Classes de complexité. Exemples.

Le jury attend que le candidat aborde à la fois la complexité en temps et en espace. Il faut naturellement exhiber des exemples de problèmes appartenant aux classes de complexité introduites, et montrer les relations d'inclusion existantes entre ces classes, en abordant le caractère strict ou non de ces inclusions. Le jury s'attend à ce que les notions de réduction polynomiale, de problème complet pour une classe, de robustesse d'une classe vis à vis des modèles de calcul soient abordées.

Se focaliser sur la décidabilité dans cette leçon serait hors sujet.

916 Formules du calcul propositionnel : représentation, formes normales, satisfiabilité. Applications.

Le jury attend des candidats qu'ils abordent les questions de la complexité de la satisfiabilité. Pour autant, les applications ne sauraient se réduire à la réduction de problèmes NP-complets à SAT. Une partie significative du plan doit être consacrée à la représentation des formules et à leurs formes normales.

918 Systèmes formels de preuve en logique du premier ordre. Exemples.

Le jury attend du candidat qu'il présente au moins la déduction naturelle ou un calcul de séquents et qu'il soit capable de développer des preuves dans ce système sur des exemples classiques simples. La présentation des liens entre syntaxe et sémantique, en développant en particulier les questions de correction et complétude, et de l'apport des systèmes de preuves pour l'automatisation des preuves est également attendue.

Le jury apprécie naturellement si des candidats présentent des notions plus élaborées comme la stratégie d'élimination des coupures mais est bien conscient que la maîtrise de leurs subtilités va au-delà du programme.

921 Algorithmes de recherche et structures de données associées.

Le sujet de la leçon concerne essentiellement les algorithmes de recherche pour trouver un élément dans un ensemble : l'intérêt des structures de données proposées et de leur utilisation doivent être argumentés dans ce contexte.

Par exemple, la recherche d'une clé dans un dictionnaire donne ainsi l'occasion de définir la structure de données abstraite « dictionnaire », et d'en proposer plusieurs implantations concrètes. De la même façon, on peut évoquer la recherche d'un mot dans un lexique : les arbres préfixes (ou digital tries) peuvent alors être présentés. Mais on peut aussi s'intéresser à des domaines plus variés, comme la recherche d'un point dans un nuage (et les quad-trees), et bien d'autres encore.

923 Analyses lexicale et syntaxique. Applications.

Cette leçon ne doit pas être confondue avec la 909, qui s'intéresse aux seuls langages rationnels, ni avec la 907, sur l'algorithmique du texte.

Si les notions d'automates finis et de langages rationnels et de grammaires algébriques sont au cœur de cette leçon, l'accent doit être mis sur leur utilisation comme outils pour les analyses lexicale et syntaxique. Il s'agit donc d'insister sur la différence entre langages rationnels et algébriques, sans perdre de vue l'aspect applicatif : on pensera bien sûr à la compilation. Le programme permet également des développements pour cette leçon avec une ouverture sur des aspects élémentaires d'analyse sémantique.

924 Théories et modèles en logique du premier ordre. Exemples.

Le jury s'attend à ce que la leçon soit abordée dans l'esprit de l'option informatique, en insistant plus sur la décidabilité/indécidabilité des théories du premier ordre que sur la théorie des modèles.

Il est attendu que le candidat donne au moins un exemple de théorie décidable (resp. complète) et un exemple de théorie indécidable.

Le jury apprécie naturellement si des candidats connaissent l'existence du premier théorème d'incomplétude mais est bien conscient que la démonstration va au-delà du programme. De même, même si la théorie des modèles finis n'est pas au programme, une réflexion sur la restriction aux modèles finis est valorisée.

925 Graphes : représentations et algorithmes.

Cette leçon offre une grande liberté de choix au candidat, qui peut choisir de présenter des algorithmes sur des problèmes variés : connexité, diamètre, arbre couvrant, flot maximal, plus court chemin, cycle eulérien, etc. mais aussi des problèmes plus difficiles, comme la couverture de sommets ou la recherche d'un cycle hamiltonien, pour lesquels il pourra proposer des algorithmes d'approximation ou des heuristiques usuelles. Une preuve de correction des algorithmes proposés est évidemment appréciée. Il est attendu que diverses représentations des graphes soient présentées et comparées, en particulier en termes de complexité.

926 Analyse des algorithmes : complexité. Exemples.

Il s'agit ici d'une leçon d'exemples. Le candidat doit prendre soin de proposer l'analyse d'algorithmes portant sur des domaines variés, avec des méthodes d'analyse également variées : approche combinatoire ou probabiliste, analyse en moyenne ou dans le pire cas.

Si la complexité en temps est centrale dans la leçon, la complexité en espace ne doit pas être négligée. La notion de complexité amortie a également toute sa place dans cette leçon, sur un exemple bien choisi, comme *union find* (ce n'est qu'un exemple).

927 Exemples de preuve d'algorithme : correction, terminaison.

Le jury attend du candidat qu'il traite des exemples d'algorithmes récursifs et des exemples d'algorithmes itératifs.

En particulier, le candidat doit présenter des exemples mettant en évidence l'intérêt de la notion d'invariant pour la correction partielle et celle de variant pour la terminaison des segments itératifs.

Une formalisation comme la logique de Hoare peut utilement être introduite dans cette leçon, à condition toutefois que le candidat en maîtrise le langage. Des exemples non triviaux de correction d'algorithmes doivent être proposés. Un exemple de raisonnement type pour prouver la correction des algorithmes gloutons peut éventuellement faire l'objet d'un développement.

928 Problèmes NP-complets : exemples et réductions.

L'objectif ne doit pas être de dresser un catalogue le plus exhaustif possible ; en revanche, pour chaque exemple, il est attendu que le candidat puisse au moins expliquer clairement le problème considéré, et indiquer de quel autre problème une réduction permet de prouver sa NP-complétude.

Les exemples de réduction polynomiale seront autant que possible choisis dans des domaines variés : graphes, arithmétique, logique, etc. Si les dessins sont les bienvenus lors du développement, le jury attend une définition claire et concise de la fonction associant, à toute instance du premier problème, une instance du second ainsi que la preuve rigoureuse que cette fonction permet la réduction choisie et que les candidats sachent préciser comment sont représentées les données.

Il peut être bienvenu de présenter un exemple de problème NP-complet dans sa généralité qui devient P si on contraint davantage les hypothèses, ou encore un algorithme P approximant un problème NP-complet.

929 Lambda-calcul pur comme modèle de calcul. Exemples.

Il s'agit de présenter un modèle de calcul : le lambda-calcul pur. Il est important de faire le lien avec au moins un autre modèle de calcul, par exemple les machines de TURING ou les fonctions récursives. Néanmoins, la leçon doit traiter des spécificités du lambda-calcul. Ainsi le candidat doit motiver l'intérêt du lambda-calcul pur sur les entiers et aborder la façon dont il permet de définir et d'utiliser des types de données (booléens, couples, listes, arbres).

930 Sémantique des langages de programmation. Exemples.

L'objectif est de formaliser ce qu'est un programme : introduction des sémantiques opérationnelle et dénotationnelle, dans le but de pouvoir faire des preuves de programmes, des preuves d'équivalence, des preuves de correction de traduction.

Ces notions sont typiquement introduites sur un langage de programmation (impératif) jouet. On peut tout à fait se limiter à un langage qui ne nécessite pas l'introduction des CPOs et des théorèmes de point fixe généraux. En revanche, on s'attend ici à ce que les liens entre sémantique opérationnelle et dénotationnelle soient étudiés (toujours dans le cas d'un langage jouet). Il est aussi important que la leçon présente des exemples d'utilisation des notions introduites, comme des preuves d'équivalence de programmes ou des preuves de correction de programmes.

931 Schémas algorithmiques. Exemples et applications.

Cette leçon permet au candidat de présenter différents schémas algorithmiques, en particulier « diviser pour régner », programmation dynamique et approche gloutonne. Le candidat pourra choisir de se concentrer plus particulièrement sur un ou deux de ces paradigmes. Le jury attend du candidat qu'il illustre sa leçon par des exemples variés, touchant des domaines différents et qu'il puisse discuter les intérêts et limites respectifs des méthodes. Le jury ne manque pas d'interroger plus particulièrement le candidat sur la question de la correction des algorithmes proposés et sur la question de leur complexité, en temps comme en espace.

932 Fondements des bases de données relationnelles.

Le cœur de cette nouvelle leçon concerne les fondements théoriques des bases de données relationnelles : présentation du modèle relationnel, approches logique et algébrique des langages de requêtes, liens entre ces deux approches.

Le candidat peut ensuite orienter la leçon et proposer des développements dans des directions diverses : complexité de l'évaluation des requêtes, expressivité des langages de requête, requêtes récursives, contraintes d'intégrité, aspects concernant la conception et l'implémentation, optimisation de requêtes...

Chapitre 6

Épreuves orales de modélisation

6.1 Déroulement des épreuves de Modélisation

Lors de l'inscription au concours, quatre options sont proposées :

A. Probabilités et Statistiques,
B. Calcul scientifique,
C. Algèbre et Calcul formel,
D. Informatique.

L'épreuve de modélisation comporte une période de préparation de quatre heures et une interrogation dont la durée est d'une heure, modalités qui s'appliqueront encore pour la session 2020.

Le jury rappelle que, même s'il s'agit d'une épreuve plus appliquée ou moins académique que les deux autres épreuves orales, cela ne dispense en aucun cas les candidats de faire preuve de la rigueur mathématique requise : quand on utilise un théorème, il faut impérativement être capable d'en restituer un jeu d'hypothèses. Par jeu d'hypothèses correct, on entend que le théorème soit vrai et qu'il s'applique effectivement au contexte considéré. Le jury n'attend pas nécessairement un énoncé avec les hypothèses les plus générales possibles.

L'épreuve de modélisation permet aux candidats de mettre en avant diverses qualités : les connaissances mathématiques / informatiques (pour l'option D), la réflexion et la mise en perspective des connaissances, l'aptitude à les appliquer à des problèmes concrets de modélisation, la pertinence des illustrations informatiques, les qualités pédagogiques de mise en forme d'un exposé construit et cohérent, la capacité à faire preuve d'initiative pour s'exprimer et manifester des qualités pédagogiques et de synthèse. La capacité des candidats à répondre aux questions fait partie intégrante de l'évaluation de cette épreuve. Comme pour l'ensemble des oraux, le caractère vivant de l'exposé est un atout.

Le texte fourni est la base pour construire et exposer un traitement mathématique / informatique (pour l'option D) d'un problème « concret » en s'appuyant sur les éléments, généralement partiels, disséminés dans le texte. La présentation doit s'appuyer sur un dosage cohérent et harmonieux entre introduction motivée de modèles, preuves mathématiques, illustrations informatiques, critiques éventuelles du texte, réponses aux questions, mise en lumière des connaissances. Les candidats doivent utiliser leurs connaissances mathématiques et informatiques pour justifier les points de leur choix parmi ceux évoqués dans le texte, proposer un retour sur le modèle ainsi qu'une conclusion.

6.1.1 Texte

L'épreuve de modélisation repose sur l'exploitation d'un texte d'environ 5 à 6 pages que les candidats choisissent parmi les deux qui leur sont proposés lors du tirage. *Pour la session 2020, l'épreuve de modélisation de l'option D ne comprendra plus d'« exercice de programmation » ;* voir pour plus de détails la section consacrée à l'option D.

En 2020, ces textes seront surmontés, pour les options A, B, C des bandeaux :

> *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte, dont il dispose d'une copie pendant l'interrogation, sans toutefois être censé le connaître. La présentation, bien que totalement libre, doit être organisée et le jury recommande qu'un plan soit annoncé en préliminaire. L'exposé doit être construit en évitant la paraphrase et doit mettre en lumière vos connaissances, à partir des éléments du texte. Il doit contenir des illustrations informatiques réalisées sur ordinateur, ou, à défaut, des propositions de telles illustrations. Des pistes de réflexion, indicatives et largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte.*

Pour l'option D, le bandeau sera :

> *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte, dont il dispose d'une copie pendant l'interrogation, sans toutefois être censé le connaître. La présentation, bien que totalement libre, doit être organisée et le jury recommande qu'un plan soit annoncé en préliminaire. L'exposé doit être construit en évitant la paraphrase et mettant en lumière vos connaissances, à partir des éléments du texte. Il doit contenir des illustrations informatiques réalisées sur ordinateur, comportant une part significative de programmation dans un ou plusieurs des langages C, CAML, Java ou Python. Des pistes de réflexion, indicatives et largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte.*

Les textes se termineront par les recommandations suivantes pour les options A, B, C, D :

> *Les pistes de réflexion suivantes ne sont qu'indicatives et il n'est pas obligatoire de les suivre. Vous pouvez choisir d'étudier, ou non, certains des points proposés, de façon plus ou moins approfondie, mais aussi toute autre question à votre initiative. Vos investigations comporteront une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats. À défaut, si vos illustrations informatiques n'ont pas abouti, il est conseillé d'expliquer ce que vous auriez souhaité mettre en œuvre.*

Les textes sont souvent motivés par des problèmes concrets. Ils peuvent présenter des arguments rapides, voire heuristiques, qui sont dans ce cas signalés comme tels, mais ils ne contiennent pas d'assertion délibérément trompeuse et se concluent par une liste de suggestions.

Même si la plupart des textes s'appuient sur des problématiques issues de sciences autres que les mathématiques, aucune connaissance dans ces domaines n'est exigée par le jury. Discuter la modélisation proposée par un texte consiste donc avant tout à dégager les comportements qualitatifs du modèle, la manière dont il dépend d'éventuels paramètres et s'il semble apte à rendre compte des phénomènes qu'il est censé représenter. Toutefois, le jury s'attend à ce que les candidats ne se contentent pas d'un exposé intégralement qualitatif et démontrent certains résultats évoqués dans le texte ; il apprécie particulièrement, sans toutefois l'exiger, qu'un candidat montre sa compréhension du modèle en exhibant par exemple les conséquences d'une variation de paramètres ou de données, notamment dans l'illustration informatique. *A contrario*, des interprétations qualitatives du comportement des modèles sont trop souvent absentes des exposés. Pourtant, montrer que l'on comprend un modèle ne se réduit pas à prouver un théorème, et nécessite d'exposer des expérimentations informatiques à fin d'illustration.

Chaque année, des textes sont rendus publics et sont disponibles sur le site de l'agrégation de mathématiques http://agreg.org. Ces textes sont représentatifs de l'épreuve et permettent aux candidats de se familiariser avec le format des textes, de se faire une idée des attentes du jury, de réfléchir à des illustrations numériques pertinentes dans le cadre du texte, ou, pour l'option D, d'évaluer les exigences de programmation de l'épreuve.

6.1.2 Préparation

Durant les quatre heures de préparation, les candidats ont accès à la bibliothèque et disposent d'un ordinateur dont la configuration est décrite sur le site de l'agrégation de mathématiques, à l'adresse http://agreg.org. Les candidats retrouveront le même environnement sur l'ordinateur de la salle d'interrogation. Il n'est évidemment pas réaliste de découvrir les logiciels à disposition des candidats le jour de l'épreuve : la configuration informatique utilisée pour le concours et sa documentation sont accessibles et téléchargeables sur le site http://clefagreg.dnsalias.org/ et permettent de se familiariser avec l'environnement offert lors de l'épreuve.

Il est instamment demandé aux candidats de pas écrire sur les textes imprimés qui leur sont distribués car ils sont destinés à être utilisés à nouveau pendant la session.

Il est recommandé aux candidats de consacrer une partie de leur temps de préparation à s'interroger sur le discours qu'ils tiendront, la stratégie d'exploitation du tableau et d'utilisation de l'outil informatique et le temps qu'ils vont consacrer à chacune des parties de leur plan, ce qui leur permettra de mettre au mieux en valeur leurs connaissances et leur compréhension du texte ou d'une partie de celui-ci. Proposer un exposé structuré et cohérent ne peut s'improviser au moment de l'oral et doit faire l'objet d'une réflexion préalable durant la préparation. Il est conseillé aux candidats de consacrer quelques minutes à la fin de leur préparation à une prise de recul sur leur plan. Le plan est un élément important pour le jury, qui pourra, en s'y référant, aider les candidats dans leur gestion du temps de l'exposé, notamment en leur rappelant, si ce n'est fait avant les dernières minutes, que l'illustration informatique doit être présentée au cours de la présentation et non pendant le temps d'échange.

6.1.3 Oral

Au début de l'interrogation, le jury rappelle les modalités de l'épreuve, puis invite les candidats à vérifier que les fichiers qu'ils ont créés lors de la préparation ont bien été transférés sur la machine servant pour l'épreuve (dont l'environnement est identique à celui de la salle de préparation). L'épreuve est scindée en deux temps : un exposé de 35 minutes suivi de 25 minutes d'échanges avec le jury. Les candidats ont la recommandation de commencer par donner la structure de leur présentation sous forme d'un plan et le déroulement de l'exposé doit être en cohérence avec cette structure. Grâce à ce plan, le jury pourra ainsi avoir une vision globale de l'exposé et aider, si besoin, les candidats à gérer leur temps. Comme les candidats se le voient rappeler en début d'épreuve, l'exposé doit être accessible à un public qui découvre les problématiques du texte et doit permettre d'en faire comprendre les enjeux à un public qui ne le connaîtrait pas. Le jury, tout en étant conscient des difficultés du concours, attend un minimum d'aisance au tableau, la manifestation d'une certaine volonté de capter l'attention de l'auditoire et un discours clair et précis.

L'exercice de l'exposé en temps limité n'est pas simple et nécessite un certain entraînement. Il est malheureusement fréquent de voir des exposés un peu trop lents pendant les 20 à 25 premières minutes qui accélerent brutalement dans les 10 dernières minutes et que les candidats peinent à conclure dans le temps imparti. Par ailleurs, si le jury sanctionne un exposé significativement trop bref, la démarche consistant à « jouer la montre » est encore plus sévèrement pénalisée.

Durant l'exposé, les candidats disposent de leurs notes, d'un tableau et d'un ordinateur. Ils peuvent alterner, quand bon leur semble, entre un exposé oral, quelques éléments rédigés au tableau de façon propre et lisible et la présentation de ce qui a été préparé à l'aide de l'outil informatique. Les candidats doivent gérer correctement le tableau et demander, si besoin, au jury les parties qu'ils peuvent effacer, le jury pouvant souhaiter conserver certains passages et y revenir lors des échanges avec les candidats. Le jury n'est pas censé connaître le texte présenté par le candidat, mais chaque membre dispose néanmoins d'un exemplaire papier, afin que les candidats puissent y faire référence pour éviter de recopier les notations, les énoncés complets ou certaines formules. Même si les programmes ne fonctionnent pas comme ils l'auraient souhaité ou si les simulations numériques n'ont pas abouti, les candidats sont invités à expliquer ce qu'ils voulaient mettre en œuvre, illustrer ou programmer. Si, lors de la phase d'exposé, les candidats n'ont pas du tout utilisé l'ordinateur dix minutes avant la fin du temps qui leur est imparti, le jury les en alertera.

Il n'y a pas de « format type » pour cette épreuve. Sur un même texte, des prestations très différentes, tant dans leur forme que dans leur contenu, peuvent conduire également à des notes élevées. Comme dans tout oral, la construction de l'exposé doit être une préoccupation importante des candidats. Une réflexion s'impose afin de produire un tout cohérent et intelligible par un public qui, dans l'esprit de l'épreuve, découvre le texte à travers l'exposé des candidats. Une brève introduction à la problématique avant de s'engager dans une longue digression (succession de définitions, théorèmes,...) sans lien avec le problème de départ ne peut conduire à une prestation jugée comme satisfaisante et sera sanctionné par le jury.

De même, un exposé se réduisant à la présentation de la problématique du texte et à des illustrations informatiques, ou à l'énumération linéaire des pistes de réflexion proposées par le texte, sans contribution des candidats, ne peut conduire au mieux qu'à un résultat médiocre. Un texte traité de façon partielle mais substantielle et en profondeur peut au contraire donner une note élevée. Plutôt qu'un survol superficiel de l'intégralité du texte sans apport mathématique / informatique ou critique scientifique, les candidats doivent préférer une discussion fouillée d'une portion du texte, bâtie sur des arguments mathématiques / informatiques solides, des simulations pertinentes accompagnées de commentaires de bon aloi. Néanmoins, dans l'ensemble, les candidats semblent avoir perçu la nécessité d'utiliser, au mieux, le temps qui leur est dédié. Le jury apprécie de voir de plus en plus de candidats qui se sont approprié le texte et en donnent une présentation pertinente et autre qu'une paraphrase linéaire.

Pour enrichir leur propos, les candidats sont invités à mobiliser leurs connaissances sur des aspects variés du programme, en étayant les arguments seulement esquissés dans le texte par des énoncés précis. Il est totalement illusoire de chercher à impressionner le jury par une logorrhée de mots savants : les textes proposés peuvent être discutés en exploitant un bagage technique qui n'utilise pas les éléments les plus sophistiqués du programme. En particulier, le jury ne manque pas de s'attarder sur toute notion amenée par les candidats durant leur présentation et il est toujours dommageable de s'aventurer sur des terrains méconnus. Bien plus qu'une démonstration de virtuosité technique, le jury attend que les candidats montrent leur maîtrise d'énoncés relativement simples « en situation » : c'est là que réside une des difficultés principales de l'épreuve. Nombre de candidats peinent à formaliser précisément des notions de base du programme ou à mettre en œuvre certaines de leurs connaissances. De plus, même si le jury ne se formalise pas de petites erreurs de calcul lors des questions, il apprécie particulièrement que, lors de l'exposé, les résultats présentés soient justes.

A contrario, utiliser une portion excessive du temps de parole pour recycler un chapitre de cours ou un développement d'une leçon d'Analyse et Probabilités, d'Algèbre et Géométrie ou d'Informatique, en s'éloignant des enjeux du texte, est considéré comme un hors sujet et est sévèrement sanctionné. La paraphrase pure et simple d'amples portions du texte ne constitue en aucun cas un exposé satisfaisant. Les textes fournissent souvent des esquisses de démonstrations qui sont précisément destinées à être complétées et commentées. Les candidats ne doivent pas se contenter de ces esquisses de démonstration. S'ils en font mention, le jury s'assurera que les candidats ont compris en profondeur et qu'ils maîtrisent la démonstration dans sa totalité.

Le jury n'est pas dupe lorsque des candidats font semblant de connaître une notion ou d'avoir compris un point du texte ou une démonstration. Il ne se laisse pas tromper non plus par les candidats qui font d'extraits du texte un argument d'autorité, tentative maladroite de masquer des insuffisances techniques. Un regard critique (« il faudrait prouver que... mais je n'ai pas réussi à le faire », « les hypothèses du théorème de XXX que je connais pour aborder des problèmes similaires ne sont pas satisfaites dans le cas présent » ...) est une attitude bien plus payante.

Les candidats sont libres de la gestion de leur exposé ; ils sont encouragés à réfléchir à l'organisation qu'ils vont adopter et qui peut constituer une réelle plus-value. Des formats très différents de prestation ont été valorisés : certains s'éloignant du découpage opéré par le texte et arrangeant les éléments autrement ; d'autres présentant un survol du problème, de la méthode et des résultats obtenus avant de détailler des aspects plus mathématiques ; d'autres au contraire suivant de près la progression du texte mais en y apportant les éclairages et les illustrations nécessaires. De bons exposés ont parfois choisi d'aller loin dans le texte pour en décrire la dynamique globale et l'aboutissement (quitte à ne pas traiter toutes les démonstrations) ; d'autres exposés, tout aussi bons, ont traité un passage plus limité du texte mais de manière détaillée et en fournissant tous les arguments pertinents. L'essentiel est d'*éviter la paraphrase sans plus-value mathématique*. En particulier, *de nombreuses affirmations des textes ne sont pas justifiées et le jury s'attend à ce que le candidat les identifie pendant sa préparation et fournisse les explications manquantes* (ou, à défaut, des pistes). A titre d'exemple, si une preuve très détaillée du texte omet délibérément un point important, le jury déplorera que cette preuve soit intégralement recopiée sans que le point en question ne soit même relevé. Au contraire, le jury valorisera les « lacunes » que le candidat aura repérées et comblées par lui-même. En début d'épreuve, le jury rappelle qu'il a le texte sous les yeux. Ainsi, la réécriture à l'identique et au tableau de longs passages du texte ne présente qu'un intérêt très limité si elle n'est pas accompagnée d'apports du candidat.

6.1.4 Echanges avec le jury

Durant 25 minutes, le jury revient sur certains propos des candidats qui méritent précision. Il peut demander un énoncé précis de théorèmes utilisés pour démontrer une assertion ou des éléments de démonstration d'un théorème énoncé par les candidats.

Les échanges peuvent également porter sur la modélisation, les illustrations informatiques ou la programmation pour l'option D.

6.2 Recommandations du jury, communes aux options A, B, C

Le jury tient à souligner les attentes partagées entre les trois options A (Probabilités et Statistiques), B (Calcul scientifique) et C (Algèbre et Calcul formel).

Le jury regrette de ne pas voir davantage de dessins (soignés) ou schémas explicatifs qui peuvent rendre l'argumentation plus claire et convaincante. La capacité à revenir sur le problème de départ et à conclure quant à l'efficacité de l'approche mathématique proposée pour y répondre est une qualité très appréciée. La rigueur et la clarté de l'organisation, la gestion du temps, la pertinence des choix opérés parmi les différentes questions soulevées par le texte sont des éléments de l'évaluation. Les qualités de synthèse sont aussi appelées à s'exprimer : il vaut mieux indiquer les étapes cruciales d'un raisonnement que de se lancer dans un long calcul fastidieux qu'on aura du mal à mener à bien et à mettre en valeur. Les candidats doivent être attentifs au fait que les arguments présents dans les textes, notamment au cours des démonstrations, peuvent être partiels. Il est très important que les affirmations des candidats soient étayées et que les preuves exposées soient entièrement reprises et *complètes*. L'évaluation repose pour une grande part sur la capacité des candidats à identifier les lacunes et ellipses volontaires des textes. Enfin, l'aspect pédagogique de l'exposé, même si le texte n'est restitué que partiellement mènera à une note bien plus élevée qu'un catalogue de type paraphrase.

Illustration informatique

Le jury rappelle son fort attachement à cet aspect de l'épreuve, dont les ambitions sont clairement délimitées. Il ne s'agit en aucun cas, et pour aucune des trois options, d'un exercice de programmation. L'objectif est d'être capable d'utiliser l'outil informatique pour illustrer, de façon pertinente, le contenu du texte. Il ne s'agit pas d'éblouir le jury par une virtuosité en programmation, au détriment d'un temps raisonnable accord'e à la discussion et l'analyse du modèle.

La réalisation de cet objectif constitue une part incompressible de la note finale attribuée à l'épreuve. Une très bonne évaluation peut résulter d'une exploitation judicieuse de programmes simples, reposant largement sur les routines standards des logiciels fournis. La forme et la nature des illustrations proposées n'obéissent à aucun format préétabli. En revanche, elles doivent faire la preuve d'une véritable réflexion scientifique et être agrémentées de commentaires, sur les résultats et les méthodes. Une analyse sommaire de la complexité des algorithmes est attendue. Une analyse de l'ordre numérique des méthodes, notamment à l'aide de régressions linéaires, peut être demandée aux candidats. Les illustrations informatiques devraient plus souvent permettre de faire un retour sur la problématique du texte et il convient de commenter les résultats obtenus dans le cadre du modèle proposé par le texte. Des illustrations peuvent mettre en valeur les limites du modèle étudié et le jury apprécie particulièrement que les candidats aient un regard critique sur le texte et ne prennent pas celui-ci pour vérité absolue.

Si un bel effort est produit par la majorité des candidats, un nombre très limité d'entre eux rechignent encore à toucher à l'outil informatique. Cette stratégie, dont on pourrait naïvement penser qu'elle permet de consacrer plus de temps à l'analyse du texte et à la préparation de l'exposé oral, est fortement sanctionnée.

Il est important de se rappeler qu'il s'agit d'une illustration. Les candidats peuvent choisir de présenter leur code, s'ils le souhaitent, mais ils doivent réfléchir à en extraire les points clés ; une présentation exhaustive et linéaire est préjudiciable à l'exposé, car elle risque d'empiéter sur le temps à consacrer à la restitution du texte. Cependant, le jury peut demander des précisions sur un point du code. Dans le cas d'une représentation graphique, il est important de préciser, au moins oralement, ce qui est représenté en abscisses et ordonnées.

Pour finir, le jury est tout à fait conscient de la difficulté de de l'utilisation de l'outil informatique en temps limité et en situation de stress. Il reste bienveillant face aux candidats dont les illustrations informatiques n'ont pas abouti au résultat souhaité. Dans une telle situation les candidats sont encouragés à expliquer ce qu'ils ont fait et quel type de résultats ils espéraient obtenir. Le jury sait prendre en compte dans sa notation la démarche suivie lorsqu'elle est clairement argumentée et permettrait, avec des aménagements mineurs, de mettre en évidence des aspects intéressants du texte.

Liens avec les épreuves d'Analyse-Probabilités et Algèbre-Géométrie

Les candidats ne doivent pas hésiter à s'appuyer sur leurs connaissances spécifiques pour proposer des développements originaux dans les leçons d'Analyse et Probabilités ou d'Algèbre et Géométrie. Par exemple,

A. les candidats de l'option A peuvent nourrir leurs leçons de thèmes et d'exemples probabilistes (la fonction caractéristique d'une variable aléatoire est une transformée de Fourier, le produit de convolution a un sens probabiliste, les espaces L^p d'une mesure de probabilité sont intéressants, l'étude de certaines séries aléatoires est possible, la fonction de répartition est une fonction monotone digne d'intérêt, le calcul intégral est en lien étroit avec les probabilités,...).

B. les candidats de l'option B peuvent centrer leur propos sur des problématiques motivées par les préoccupations du calcul scientifique (approximation de solutions d'équations linéaires ou non linéaires, d'équations différentielles, convergence d'algorithmes, analyse matricielle, calcul effectif d'exponentielle de matrice,...).

C. les candidats de l'option C peuvent s'appuyer sur leurs connaissances spécifiques en algèbre effective. En revanche, comme rappelé plus haut, l'exposé oral en modélisation ne doit pas donner lieu au recyclage d'un développement de leçon du fait que le texte parle d'un sujet similaire.

6.3 Option A : Probabilités et Statistiques

6.3.1 Commentaires généraux

Les textes proposés à l'option A peuvent indifféremment visiter des thématiques probabilistes ou statistiques, et peuvent même aborder les deux avec une pondération plus ou moins grande selon les textes. Les candidats doivent donc se préparer à l'ensemble du programme de l'option, en particulier sans négliger les statistiques. L'exercice 2019 semble montrer que cette maîtrise est globalement en amélioration, et que la restitution des résultats classiques (loi forte des grands nombres, théorème central limite) et leurs applications posent moins de problèmes que par le passé, notamment en statistiques (notion d'estimateur, de biais par exemple).

D'une manière générale, il semble que les rapports des années précédentes aient été bien lus et intégrés par les candidats : le jury ne peut que les en féliciter et encourager les futurs candidats à faire de même.

6.3.2 Recommandations spécifiques

Le jury signale ici quelques points du programme sur lesquels des progrès ont été notables sur la session 2019, ou *a contrario*, pour lesquels des problèmes sont récurrents. Des suggestions d'illustrations informatiques de ces notions figurent dans la section suivante.

— **La loi des grands nombres et le théorème central limite** sont des résultats essentiels qui, comme dit précédemment, semblent mieux maîtrisés (hypothèses et modes de convergence). L'articulation entre le théorème central limite et l'obtention d'intervalles de confiance asymptotique est plus souple que par le passé.

— **Convergences de suites de variables aléatoires.** Le jury rappelle qu'il en existe différents modes (presque-sûre, dans L^p, en probabilité, en loi). Leurs définitions, caractérisations et implications sont des questions fréquemment soulevées et qui posent toujours quelques problèmes. Il est ainsi difficile de faire écrire proprement qu'une suite de couples (X_n, Y_n) converge en loi, ou alors d'obtenir une preuve du fait que la convergence presque-sûre implique par exemple la convergence en probabilité. Si un objet aléatoire est construit comme une limite de variables aléatoires, on veillera à ce que l'existence de la limite soit justifiée.

— **Intervalles de confiance.** Cette notion est maintenant mieux maîtrisée, tout comme son lien avec le lemme de Slutsky. Toutefois, l'emploi de ce dernier ne doit pas devenir systématique : on peut obtenir des intervalles de confiance exacts dans certains contextes (lois gaussiennes de variance connue ou lois exponentielles par exemple). L'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff peut aussi rapidement fournir un intervalle de confiance si la variance de l'estimateur est connue ou majorée. Le lien entre la variance des variables observées et la largeur des intervalles de confiance obtenus ne semble pas aller de soi pour de nombreux candidats. Enfin, comme les années passées, il arrive tout de même que les candidats proposent des intervalles de confiance qui dépendent du paramètre qu'ils veulent estimer.

— **Chaînes de Markov.** La compréhension globale et intuitive de ce qu'est une chaîne de Markov est assez répandue, notamment grâce à sa présentation récursive $X_{n+1} = h(X_n, \varepsilon_{n+1})$. En revanche, il est difficile d'obtenir des définitions correctes de concepts associés, bien qu'ils figurent explicitement dans le programme : états récurrents, chaîne irréductible ou apériodicité, par exemple. Les hypothèses permettant d'aboutir à l'existence ou l'unicité d'une mesure de probabilité invariante sont très aléatoires et les candidats ont tendance à partir de trop d'hypothèses pour ne pas prendre de risque ; mieux vaut clarifier les connaissances sur le sujet.

— **Espérance conditionnelle.** C'est l'une des notions les moins bien maîtrisées de programme. Le jury demande souvent d'en formuler la définition précise : le principe d'une projection dans L^2 est souvent évoqué mais le point crucial de la tribu sous-jacente est ignoré ou bien la propriété

$\mathbf{E}(X\mathbf{1}_A) = \mathbf{E}(Y\mathbf{1}_A)$ est mentionnée sans que la mesurabilité de Y ou l'appartenance de A soit précisée. Il faut avoir compris qu'une variable X-mesurable est de la forme $f(X)$ et avoir réfléchi au sens de l'expression $\mathbf{E}(Y|X = x)$: si X est à densité, elle ne correspond pas au conditionnement par un événement de probabilité nulle ! Les candidats gagneront à maîtriser quelques calculs classiques sur cette notion, par exemple celui de $\mathbf{E}(g(X,Y)|Y)$ lorsque X, Y sont indépendantes, ou encore le calcul de $\mathbf{E}(X|Y)$ si (X,Y) est un vecteur gaussien.

— **Modèle linéaire.** C'est un domaine qui semble difficile d'accès. Il faut comprendre qu'une droite de régression résulte de la minimisation d'une distance euclidienne. Sa caractérisation peut s'obtenir en termes de projection orthogonale ou par la minimisation d'une fonction de deux variables quand elle est simple.

— **Vecteurs gaussiens.** Des lacunes étonnantes ont été relevées sur les vecteurs gaussiens, surtout dans le cas d'une dimension $\geqslant 2$. La définition de la matrice de covariance d'un vecteur gaussien doit être connue ainsi que sa loi par une transformation affine $X \mapsto AX + b$. Le théorème de Cochran, problématique pour de nombreux candidats, s'en déduit immédiatement car des projections orthogonales Π_V, Π_W sur des espaces orthogonaux vérifient $\Pi_V \Pi_V^T = \Pi_V$ et $\Pi_V \Pi_W = 0$.

— **Processus de Poisson.** Ce point du programme n'est pas le plus volumineux, et pourtant c'est un des plus méconnus. Les propriétés de ce processus, l'allure de ses trajectoires, une idée de sa construction à partir de variables exponentielles sont autant de questions qui pourraient être moins difficiles avec un peu de préparation spécifique.

— **Tests statistiques.** Ce point du programme est toujours mal connu. Le jury rappelle qu'un test fixe deux hypothèses H_0, H_1 et un niveau α, qu'il majore par α la probabilité sous H_0 de rejeter H_0 et qu'il évalue aussi la puissance (probabilité sous H_1 d'accepter H_1). Mais beaucoup de candidats n'ont pas une idée très claire sur la notion de quantile. La construction d'une région critique (ou de rejet) est alors très confuse et les inégalités parfois dans le sens contraire. Les deux tests au programme (χ^2 et Kolmogorov-Smirnov) doivent être soigneusement étudiés et il est conseillé de s'exercer à les mettre en pratique sur des exemples simples.

6.3.3 Modélisation et mise en œuvre informatique

Les textes de l'option A analysent des phénomènes concrets à l'aide d'outils probabilistes. Il faut garder en tête que toute analyse mathématique d'une situation réelle passe par une étape de modélisation, qui va faire appel à un certain nombre d'hypothèses implicites. Par exemple, un modèle impliquant des chaînes de Markov ou des lois exponentielles ou géométriques présuppose une absence de vieillissement du système considéré ; supposer qu'une certaine variable aléatoire suit une loi gaussienne revient à supposer qu'elle résulte de l'accumulation de nombreux effets aléatoires de petite envergure. Le jury apprécie que les candidats explicitent la démarche menant au modèle du texte, plutôt qu'ils listent une suite d'hypothèses mathématiques sans questionnement sur leur pertinence.

Tout choix de modélisation peut être commenté, mais une critique gratuite et systématique de toutes les hypothèses est rarement pertinente. Si une hypothèse semble restrictive, il sera judicieux d'expliquer en quoi elle simplifie les calculs. Si une généralisation est suggérée, il pourra être intéressant de signaler les complications techniques qu'elle entraînerait. Proposer de relaxer toutes les hypothèses simplificatrices d'un modèle n'a pas grand intérêt si le nouveau modèle obtenu est hors de portée de tout traitement mathématique.

Une fois le modèle décrit et des résultats mathématiques énoncés, il est important de réinterpréter la signification de ces derniers sur le phénomène étudié : la convergence probabiliste d'une suite de variables correspond à une stabilisation du système, dans un sens à préciser ; expliciter les propriétés d'une loi de probabilité permet de justifier les fréquences de certaines observations, etc.

Les possibilités d'utilisation de l'outil informatique pour une illustration pertinente de résultats probabilistes ou statistiques sont nombreuses. Voici quelques exemples parmi les plus importants.

— Les convergences en loi peuvent être facilement illustrées par des tracés d'histogrammes ou de fonctions de répartition empiriques. Les candidats peuvent également prendre l'initiative de les valider par des tests statistiques (χ^2 ou KOLMOGOROV-SMIRNOV) s'ils en ont le temps. On notera que la ressemblance entre l'histogramme d'un échantillon et la densité de sa loi, si elle est visuelle, n'est pas évidente sur le plan théorique.

— Une convergence presque-sûre peut se voir sur une trajectoire, de même que l'estimation d'un paramètre avec un estimateur fortement consistant. L'illustration peut être complétée par le tracé d'un intervalle de confiance.

— Les chaînes de MARKOV donnent lieu à d'intéressantes possibilités de simulation : simulation de trajectoires et analyse asymptotique. Dans des cas simples (marche aléatoire sur trois sites par exemple), on peut se voir demander comment programmer des itérations d'une chaîne à partir de variables aléatoires uniformes sur $[0,1]$. La convergence presque-sûre de moyennes $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i)$, la vérification de convergence en loi (ou pas) vers une mesure stationnaire donnent lieu à des illustrations informatiques de choix.

S'il est parfaitement légitime d'utiliser les routines préprogrammées dans les logiciels disponibles, il pourra être pertinent d'avoir un peu réfléchi à leurs fonctionnements (calcul d'une fonction de répartition ou d'un quantile, simulation de lois usuelles, simulation de chaînes de MARKOV, calcul de mesures stationnaires).

Le jury rappelle que de nombreux textes sont assortis d'un jeu de données numériques sur lequel les candidats sont invités à mettre en œuvre des illustrations. Le jury se réjouit de l'augmentation du nombre de candidats traitant effectivement ces données. Cela constitue une réelle plus-value pour l'exposé. Ces textes sont accompagnés d'une notice expliquant comment ouvrir les fichiers de données avec les logiciels `Python, Scilab, Octave` et `R`, logiciels que le jury estime les mieux adaptés à l'option A.

6.4 Option B : Calcul scientifique

6.4.1 Commentaires généraux

Si les modalités et les attentes de cette épreuve semblent connues par une fraction croissante des candidats admissibles, une part d'entre eux ne maîtrisent pas suffisamment les rudiments du programme général intervenant dans les textes. Quelques notions sont centrales pour cette option et reviennent, sous une forme ou une autre, dans un grand nombre de textes. S'exercer à les manipuler et à énoncer les principaux résultats afférents permet d'aborder sereinement les textes proposés. Le jury attend des candidats de :

- connaître le théorème de Cauchy-Lipschitz et être en mesure de l'appliquer pour des systèmes différentiels simples en citant correctement toutes les hypothèses nécessaires à son utilisation.
- construire, analyser et mettre en œuvre la méthode d'Euler explicite.
- connaître les principes des méthodes directes de résolution de systèmes linéaires (pivot de Gauss, LU), la notion de conditionnement, la recherche d'éléments propres de matrices, analyser et mettre en œuvre la méthode de la puissance.
- analyser et mettre en œuvre la méthode de Newton (cas vectoriel).
- construire la matrice correspondant à la discrétisation par différences finies de $(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2})$ et connaître ses propriétés.
- être capable d'énoncer et appliquer le théorème des extrema liés (typiquement pour des problèmes de minimisation de fonctionnelles convexes sur $\mathbb{R}^N$ avec contraintes linéaires), analyser et mettre en œuvre un algorithme du gradient.
- maîtriser les outils d'analyse de Fourier.
- connaître les méthodes de quadratures classiques.

Le jury souligne que les textes exploitent ces notions dans leurs versions les plus élémentaires et ne requièrent aucun raffinement technique. Un énoncé précis des théorèmes utilisés est exigible.

6.4.2 Recommandations spécifiques

Le jury émet les recommandations plus spécifiques suivantes :

- **Quadratures numériques.** L'erreur commise par la méthode des rectangles doit être connue et une preuve élémentaire est exigible des candidats.
- **Analyse des équations différentielles ordinaires et calcul différentiel.** La dérivation de fonctions de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$, et notamment le calcul de la différentielle des applications linéaires, bilinéaires et des applications composées, ne devrait pas poser de difficulté au niveau de l'agrégation. Les formules de développements de Taylor contiennent généralement un terme de reste, dont l'analyse est un point souvent crucial. La lecture de la moindre équation différentielle ordinaire devrait déclencher des automatismes. Par exemple, un texte indiquant « la solution de l'équation différentielle [...] est définie pour tout temps et reste positive » doit amener à :
  1. énoncer de façon précise le théorème de Cauchy-Lipschitz le plus adapté au problème (version linéaire si le problème est linéaire, version globale quand elle s'applique,...) et donner une définition claire de la notion de solution utilisée.
  2. expliquer comment il s'applique dans le contexte présent (détailler explicitement la fonction $(t, X) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \mapsto f(t, X) \in \mathbb{R}^n$ qui permet de mettre le problème sous la forme $X'(t) = f(t, X(t))$, distinguer la variable vectorielle X et la fonction $X : t \mapsto X(t)$ sont malheureusement des obstacles majeurs pour certains candidats).
  3. exploiter les critères classiques garantissant la positivité de la solution et sa globalité en temps. Le jury attend des candidats une bonne maîtrise de la notion de solution maximale.
- **Schémas numériques pour les équations différentielles.** Le jury considère la description des schémas d'Euler comme un élément central du programme de l'option B. Les candidats

doivent être capables de présenter clairement les principes guidant l'écriture de ces schémas et l'analyse de leurs propriétés de convergence, ainsi que les avantages et inconvénients des méthodes explicites et implicites. Certains candidats peinent à formaliser correctement une définition de la convergence d'un schéma numérique et la confondent avec la notion de consistance du schéma. La confusion entre l'approximation X_n et l'évaluation $X(t_n)$ de la solution exacte au temps t_n, l'incapacité à relier le nombre de points de discrétisation et le pas Δt témoignent d'une compréhension déficiente du sujet. La mise en œuvre de ces méthodes peut être l'occasion de discuter des difficultés potentielles liées à la stabilité et aux contraintes portant sur le pas de temps.

— **Equations aux dérivées partielles.** Le jury précise que les textes qui évoquent des problèmes d'équations aux dérivées partielles peuvent être abordés avec des outils rudimentaires et ne nécessitent *a priori* aucune connaissance sur la théorie des distributions, bien que ces notions figurent programme commun, ni ne réclament de dextérité particulière d'analyse fonctionnelle. Il est néanmoins important de savoir faire la différence entre un problème aux limites et un problème de CAUCHY, et d'utiliser la discrétisation adaptée au type de problème considéré. Le jury s'attend à ce que les matrices associées à la discrétisation de $(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2})$ par différences finies pour des conditions aux limites classiques (DIRICHLET, NEUMANN, périodiques) soient connues.

— **Algèbre linéaire.** Des lacunes profondes et inquiétantes sont relevées chez certains candidats. Au grand étonnement du jury, les candidats ne font pas toujours le lien entre matrices symétriques et formes quadratiques. Les raisonnements liés à la réduction des matrices peuvent être extrêmement laborieux et les méthodes pratiques de calcul (résolution de systèmes, calcul de puissance, inverse d'une matrice,...) méconnues. La notion de conditionnement est bien souvent trop imprécise et les liens entre rayon spectral et normes matricielles doivent être maîtrisés.

— **Optimisation.** Les théorèmes de base se rapportant aux extrema doivent être connus. On s'attend à ce que les candidats soient capables de préciser les hypothèses requises pour :

1. obtenir l'existence d'un extremum,
2. obtenir l'unicité,
3. caractériser l'extremum (sans contrainte ou avec contraintes d'égalité).

— **Analyse de** FOURIER**.** Le jury s'étonne que de nombreux candidats aient du mal à préciser les hypothèses de régularité assurant la convergence de la série de FOURIER. Le lien entre la régularité de la fonction et le comportement asymptotique de ses coefficients de FOURIER doit être connu.

6.4.3 Modélisation et mise en œuvre informatique

Le jury de l'option B rappelle qu'une illustration réalisée avec les routines de base des logiciels fournis est tout à fait satisfaisante si elle est clairement présentée, motivée et discutée. Si `Scilab` ou `Python` sont certainement les langages les mieux adaptés, le jury relève que quelques candidats ont pu fournir des résultats très convaincants avec un logiciel comme `Octave`, `XCas` ou `Sage`. Le jury insiste sur le fait qu'il est important de commenter les résultats informatiques (courbes, solutions, erreurs...) obtenus et de les relier au problème de modélisation traité par le texte ou à des résultats mathématiques sous-jacents. Une présentation `libreoffice` ne pourra pas être considérée comme une illustration informatique.

6.5 Option C : Algèbre et Calcul formel

6.5.1 Commentaires généraux

La ligne directrice de l'option C est dans un premier temps la recherche de l'*effectivité*, puis de l'*efficacité* (souvent en temps, parfois en espace) du calcul algébrique. Cela va des aspects les plus élémentaires (algèbre linéaire, groupes, calcul avec les entiers, les polynômes, les entiers modulo) aux aspects plus avancés (élimination, géométrie effective, codes correcteurs d'erreur). Si l'option dispose d'un programme spécifique, les textes peuvent traiter de toute notion au programme, en particulier au programme d'algèbre. De fait, il est tout à fait possible qu'un texte parle de réduction d'endomorphismes ou de groupes, même si ces notions ne sont pas mentionnées dans le programme spécifique de l'option.

6.5.2 Recommandations spécifiques

Le programme de l'option est résolument orienté sur les problématiques du calcul algébrique effectif. Lorsqu'un énoncé du texte affirme l'existence d'un objet (scalaire, vecteur, matrice, élément d'un groupe, entier, polynôme, etc...), le jury apprécie que le candidat mène la réflexion suivante :
— peut-on calculer cet objet ?
— si oui, par quelle(s) méthodes ?
— ces méthodes sont-elles efficaces ? quel est leur coût ?

Si la démarche reste rare, le jury observe une progression du nombre de candidats se saisissant spontanément d'une question de complexité. Cette démarche est perçue très positivement par le jury. Pour prendre un exemple, quand le texte parle de cryptographie, comparer le coût des opérations de chiffrement et déchiffrement du système proposé avec le coût d'une attaque, même naïve, est une initiative intéressante et valorisée. Une telle étude est beaucoup plus à sa place qu'un exposé détaillé de RSA plaqué sur un texte qui n'en parle pas – la mention rapide de RSA dans un texte introduisant un système de chiffrement pour comparer des complexités restant bien sûr pertinente.

Sur les aspects mathématiques et la maîtrise des éléments du programme, les principales observations du jury sont les suivantes.

— **Résultant.** Le jury regrette de constater que cette notion est de plus en plus souvent boudée par les candidats. Rappelons que si le résultant ne fait plus partie du programme de mathématiques générales, il continue à figurer parmi les notions au programme de l'option.
Si les candidats interrogés sur le résultant sont en général capables d'en donner une définition, ses propriétés élémentaires et surtout son utilisation pour éliminer des variables dans un système d'équations polynomiales semblent très floues pour un trop grand nombre d'entre eux. Beaucoup le voient comme un critère d'existence d'un facteur commun et ne pensent plus (surtout dans le cas des polynômes à une variable) au PGCD qui est un objet bien plus simple à appréhender.

— **Corps finis.** Sur cette notion, les connaissances des candidats sont très inégales. Tout d'abord, il n'est pas acceptable de n'avoir pas d'autres exemples de corps finis en tête que $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. La construction d'extensions de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ doit être connue ainsi que la manière dont les opérations de corps s'effectuent. Par ailleurs, il est important de savoir différentier les structures algébriques sous-jacentes : par exemple, savoir que $\mathbf{F}_{p^n}$ est isomorphe en tant que groupe (et même en tant que $\mathbf{F}_p$-espace-vectoriel) à $(\mathbf{F}_p)^n$ mais pas en tant que corps.

— **Codes correcteurs d'erreurs.** Depuis quelques années, le jury constate une sensible progression des connaissances des candidats sur le sujet. Les codes correcteurs sont une partie limitée du programme et très peu de connaissances sont exigibles (et exigées). Toutefois, il est nécessaire de s'y être confronté pour se familiariser avec les problématiques sous-jacentes. À savoir,

typiquement qu'un bon code correcteur a une grande dimension et grande distance minimale (par rapport à sa longueur).
Si les définitions de base (codes, distance de HAMMING, distance minimale) sont souvent connues, les candidats peinent toujours à en donner une interprétation pratique. Par exemple, peu de candidats sont capables d'interpréter le ratio k/n pour un code de dimension k dans $(\mathbf{F}_q)^n$ comme un rendement ou un taux d'information. Certains candidats ne savent même pas expliquer comment utiliser concrètement un code donné. Enfin il faut être conscient que la méconnaissance des corps finis est souvent rédhibitoire pour ce sujet.

— **Algorithmes et complexité.** Il s'agit d'un point fondamental de l'option C que les candidats ne peuvent négliger. Il est malheureusement encore trop rare de voir des candidats prendre spontanément l'initiative d'analyser la complexité d'un algorithme pendant leur exposé. Le jury observe toutefois une progression des connaissances dans ce domaine même si les bases restent trop souvent fragiles :
  — beaucoup de candidats savent dire que la complexité du pivot de GAUSS est en $O(n^3)$ mais peinent à expliquer pourquoi.
  — de même, la plupart des candidats connaissent la notion d'exponentiation rapide et savent en donner la complexité, mais peu d'entre eux sont capables de la justifier.
  — si l'algorithme d'EUCLIDE est bien connu des candidats, la plupart d'entre eux ne savent obtenir des relations de BÉZOUT qu'en effectuant l'algorithme d'EUCLIDE classique puis en procédant à une laborieuse « remontée ». Rappelons que l'algorithme d'EUCLIDE *étendu* est explicitement au programme de l'option.
  — pour analyser une complexité en temps, il faut compter des opérations et il est donc nécessaire dans un premier temps de bien identifier l'anneau dont on compte les opérations. Pour donner un exemple simple, le produit de deux polynômes de degré n dans $\mathbf{K}[X]$ coûte une seule opération dans $\mathbf{K}[X]$, mais en coûte $O(n^2)$ dans $\mathbf{K}$.

6.5.3 Modélisation et mise en œuvre informatique

Le jury apprécie de constater qu'à quelques rares exceptions, tous les candidats ont utilisé l'outil informatique durant leur présentation pendant la session 2019.

Il est important que les programmes et les calculs effectués avec l'outil informatique s'intègrent de façon pertinente dans l'exposé. L'aptitude à présenter, discuter et mettre en valeur les résultats d'exécution d'un programme puis à les relier à certains énoncés du texte est une démarche qui sera bien plus valorisée que la dextérité en programmation.

Le jury attire particulièrement l'attention sur les points suivants :

— les candidats sont libres de leur choix en ce qui concerne le logiciel parmi ceux présents dans la `ClefAgreg`. Cependant, le jury constate que les candidats ayant utilisé le logiciel `Python` ont rencontré de nombreuses difficultés pour manipuler informatiquement certaines notions (comme les corps finis et les groupes par exemple). Le jury invite les futurs candidats à réfléchir sur le choix du logiciel qu'ils utiliseront pour l'épreuve, certains étant plus adaptés que d'autres.

— le jury ne note pas les compétences en programmation mais bien la pertinence de l'illustration. Utiliser les routines fournies par le logiciel est tout à fait normal et encouragé par le jury, mais les candidats doivent être en mesure d'expliquer dans les grandes lignes de ce que fait cette routine et comment elle le fait. Par exemple, les candidats faisant appel à une fonction calculant le PCGD de deux polynômes doivent pouvoir détailler le déroulement des algorithmes d'EUCLIDE et EUCLIDE étendu si le jury le leur demande.

— reprendre un extrait de code d'un livre est une démarche tout à fait acceptable à condition que les candidats comprennent exactement ce que fait ce code et que son utilisation fasse sens dans le cadre du texte.

— le jury est parfois surpris de voir des candidats développer de longs et fastidieux calculs au tableau alors que l'utilisation de l'outil informatique leur aurait permis de gagner en temps et en clarté.

— certains logiciels de calcul formel ne calculent pas le résultant de deux polynômes dans $\mathbf{K}[X, Y]$ si le corps $\mathbf{K}$ est composé de flottants. Des solutions existent pour contourner ce problème mais, pour les connaître, il est nécessaire de s'être déjà confronté à cette situation avant de passer l'oral.

6.6 Option D : Informatique

Commentaires généraux

Pour les candidats de l'option D, la session 2019 a été d'excellent niveau. Une très grande majorité des candidats étaient remarquablement préparés et le jury tient à saluer la qualité de ce travail des candidats et de leurs préparateurs.

Le jury interroge les candidats dans le même esprit que dans les autres options et les critères d'évaluation sont largement identiques sauf en ce qui concerne l'exercice de programmation. Ce point particulier et ses évolutions pour le concours 2020 sont commentés plus loin.

6.6.1 Attentes du jury

Les textes présentent généralement une problématique concrète, informatique ou de la vie de tous les jours, avant d'en proposer une formalisation plus ou moins complète et une analyse informatique plus ou moins détaillée. Ils sont souvent plutôt de nature descriptive et volontairement allusifs.

Exposé des motivations. Beaucoup de candidats omettent la phase indispensable d'introduction et de motivation. C'est aux candidats d'introduire le sujet du texte et de motiver la présentation qui va suivre. Cette motivation sera le plus souvent l'évocation de situations concrètes dans lesquelles on a besoin d'outils informatiques spécifiques. Ces situations peuvent être proposées par le texte lui-même, mais elles peuvent également être tirées de l'expérience personnelle des candidats. Toute contribution personnelle à ce niveau est toujours très appréciée !

Présentation du texte. Il est attendu des candidats une restitution argumentée d'une partie cohérente du texte, ainsi qu'un effort de formalisation sur les parties descriptives et allusives du texte.

Il est bon d'essayer de donner une ou des preuves complètes d'énoncés du texte, ou de compléter les arguments parfois lapidaires fournis par ce dernier. Les énoncés considérés comme vraiment trop difficiles pour être prouvés dans le cadre d'une préparation en temps limité en partant des connaissances du programme sont systématiquement pointés comme devant être admis. À l'inverse, les textes indiquent quand un énoncé est classique et que sa preuve n'intéresse pas le jury.

Il est attendu des candidats qu'ils soient fidèles à l'esprit du texte. Il ne s'agit pas de traiter l'intégralité des points du texte, mais que le traitement choisi soit cohérent : les candidats doivent par exemple pouvoir expliquer pourquoi ils ont choisi de développer certains points, et pas certains autres.

Enfin, il est attendu que l'exposé exploite judicieusement le tableau, sur un mode qui gagnerait à se rapprocher beaucoup plus du cours (structure, cohérence de ce qui est écrit au tableau indépendamment du discours) que de l'exposé de séminaire de recherche.

Exercice de programmation informatique. La description de cet aspect de l'épreuve est volontairement réduite puisqu'elle devient obsolète pour ce qui concerne la session 2020.

Questions du jury. Le jury revient toujours sur l'exercice de programmation, de manière plus ou moins approfondie. Il demande aux candidats

— d'argumenter leurs choix s'ils ne l'ont pas fait au préalable,

— d'indiquer les bibliothèques et les fonctions avancées utilisées et d'expliquer leur comportement (voire de demander comment les candidats auraient pu faire sans) – et éventuellement, leur complexité en temps et en espace (cette dernière étant souvent mal comprise / connue). Cela est particulièrement vrai des nombreuses constructions avancées de `Python`.
— de préciser les hypothèses implicites faites sur les données.
— éventuellement, d'expliquer les messages d'erreurs observés à la compilation / l'interprétation / l'exécution.

Ensuite le jury revient sur la partie du texte présentée par les candidats. L'interrogation s'adapte toujours au niveau des candidats. Les questions du jury portent au moins autant sur la démarche globale de modélisation et la compréhension des différentes approches du texte que sur l'étude technique des diverses propositions.

Il pose des questions destinées à affiner sa perception de la compréhension du texte par les candidats, à comprendre leur capacité à formaliser une question ou expliciter une preuve s'ils ne l'ont pas montrée d'eux-mêmes, ou encore à tester leur regard critique sur le texte. Enfin, il est fréquent que des questions d'informatique fondamentale soient posées en rapport avec le texte, pour percevoir la capacité à faire le lien entre connaissances théoriques et informatique souvent plus concrète ; les questions de calculabilité et complexité (tant analyse de complexité d'un algorithme que preuve de NP-complétude d'un problème (aidée par le jury)), sont en particulier naturelles et fréquentes.

6.6.2 Bilan de la session 2019

Exposé. Comme indiqué plus haut, l'année 2019 a été marquée par une très grande majorité d'exposés d'excellente tenue, bien équilibrés entre les différentes attentes du jury (modélisation, formalisation, place de l'exercice de programmation, preuves, etc.). Tout juste peut-on regretter une forme d'absence d'audace chez les candidats qui tendent à se réfugier dans la sécurité d'un traitement linéaire se limitant à la première partie du texte, là où un certain nombre de candidats auraient amplement les moyens, quitte à sauter des parties médianes, d'avancer davantage dans les textes.

Exercice de programmation. Comme l'an passé, l'exercice de programmation a été bien traité par la quasi-totalité des candidats. Une écrasante majorité des programmes fonctionne et fait, de manière plus ou moins efficace ou élégante, ce qui est demandé. On note néanmoins encore trop de lectures trop rapides de la spécification conduisant à des hors-sujet ou des imprécisions – et souvent le candidat s'est compliqué la vie. En particulier, les arguments des fonctions sont toujours supposés passés lors de l'appel – les seules entrées-sorties demandées au candidat sont, éventuellement, des affichages de message.

La présentation orale de l'exercice de programmation est, globalement, en progrès – elle reste néanmoins souvent un peu trop verbeuse et près du code.

Les candidats se sont partagés de manière assez équilibrée entre `Python` et `CAML`, avec une légère prédominance du premier.

Le jury souhaite rappeler que, si l'utilisation de constructions complexes ou de bibliothèques est possible, le jury pose systématiquement des questions : comment aurait-on pu faire sans ? quel est le coût de cette opération et comment impacte-t-il le coût de l'ensemble de la fonction écrite ? Et, éventuellement, comment est-ce réalisé ? En particulier, les analyses de complexité présentées *doivent* prendre en compte le coût de ces opérations. Cela est vrai plus largement de constructions moins complexes, mais non atomiques a priori, comme par exemple la concaténation de listes. Seule une minorité de candidats a, en particulier, les idées claires sur le mécanisme de gestion des tableaux/listes de `Python` et sait expliquer pourquoi, de ce fait, la concaténation s'effectue en temps *amorti* constant.

Dans l'ensemble, le style de programmation `Python` s'est cette année plutôt rapproché du « noyau impératif standard » que le jury souhaite voir prioritairement utilisé.

Enfin, toujours sur le versant stylistique, il n'est bien entendu pas interdit d'utiliser un style de programmation orienté objet ; mais comme tout choix, ce dernier doit pouvoir être argumenté par le candidat autrement que par son goût ou son confort de programmation personnel. Même si le jury conçoit que le choix d'un style de programmation inclut toujours une part de subjectivité, il est important de s'être interrogé sur ces questions de style et de pouvoir défendre ses choix.

Connaissances en informatique. Les réponses des candidats aux questions montrent, de manière générale, de très bonnes connaissances en informatique fondamentale et une vraie capacité à les mobiliser. Ces connaissances semblent toutefois plus solides sur le versant calculabilité et complexité que sur le versant algorithmique où la compréhension des algorithmes (et plus largement la culture des candidats dans ce domaine) est parfois rudimentaire ; citons par exemple les questions d'arbres couvrants, voire parfois simplement de plus courts chemins...

Le jury apprécie également, comme l'an passé, de constater que certains candidats ont des notions sérieuses sur des sujets plus « concrets » que le programme – architecture, compilation, hiérarchie mémoire, aspects système plus généralement, etc. et savent motiver les problématiques des textes et éclairer les solutions proposées. Le jury rappelle son attachement à une vision de l'informatique « incarnée », qui sache faire le lien, chaque fois que faire se peut, entre les outils d'informatique fondamentale et leur impact concret.

6.6.3 Évolution pour le concours 2020

Le jury fait évoluer le format des textes pour le concours 2020, de manière à rapprocher le fonctionnement de l'option D de celles des autres options. Les textes n'incluront dorénavant plus de rubrique spécifique « Exercice de programmation ». Comme dans les options A, B et C, se substitue à cet exercice une attente forte du jury sur l'utilisation de l'outil informatique pour illustrer le texte. Toutefois, pour l'option D, il est *spécifiquement attendu* que l'illustration contienne une part *significative* de programmation.

Cela laisse le candidat beaucoup plus libre du choix du ou des points du texte qu'il souhaite illustrer. Pour permettre une transition progressive, les textes proposeront dans les suggestions de développement une possibilité d'un niveau correspondant à l'actuel exercice de programmation – cela permet aux candidats de se faire une idée des attentes minimales du jury sur le texte.

Annexe A

Liste des leçons d'oral qui seront proposées en 2020

A.1 Leçons d'algèbre et géométrie

101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

102 Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

103 Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

104 Groupes abéliens et non abéliens finis. Exemples et applications.

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

107 Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel. Exemples.

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

120 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

121 Nombres premiers. Applications.

122 Anneaux principaux. Applications.

123 Corps finis. Applications.

125 Extensions de corps. Exemples et applications.

126 Exemples d'équations en arithmétique.

141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

142 PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

144 Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.

150 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

152 Déterminant. Exemples et applications.

153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

154 Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

155 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

156 Exponentielle de matrices. Applications.

157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

158 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

160 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

161 Distances et isométries d'un espace affine euclidien.

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

171 Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

181 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

191 Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.

A.2 Leçons d'analyse et probabilités

201 Espaces de fonctions. Exemples et applications.

203 Utilisation de la notion de compacité.

204 Connexité. Exemples et applications.

205 Espaces complets. Exemples et applications.

207 Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

209 Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.

213 Espaces de HILBERT. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

220 Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'études de solutions en dimension 1 et 2.

221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

222 Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.

223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

228 Continuité, dérivabilité, dérivation faible des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

233 Analyse numérique matricielle. Résolution approchée de systèmes linéaires, recherche d'éléments propres, exemples.

234 Fonctions et espaces de fonctions LEBESGUE-intégrables.

235 Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

243 Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

245 Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications.

246 Séries de FOURIER. Exemples et applications.

250 Transformation de FOURIER. Applications.

253 Utilisation de la notion de convexité en analyse.

261 Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.

262 Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

265 Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

266 Illustration de la notion d'indépendance en probabilités.

267 Exemples d'utilisation de courbes en dimension 2 ou supérieure.

A.3 Leçons de mathématiques pour l'informatique (option D)

101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

104 Groupes abéliens et non abéliens finis. Exemples et applications.

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

120 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

121 Nombres premiers. Applications.

123 Corps finis. Applications.

126 Exemples d'équations en arithmétique.

141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

152 Déterminant. Exemples et applications.

153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

156 Exponentielle de matrices. Applications.

157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

158 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

191 Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.

203 Utilisation de la notion de compacité.

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

220 Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'études de solutions en dimension 1 et 2.

221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

228 Continuité, dérivabilité, dérivation faible des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

233 Analyse numérique matricielle. Résolution approchée de systèmes linéaires, recherche d'éléments propres, exemples.

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

243 Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

246 Séries de FOURIER. Exemples et applications.

250 Transformation de FOURIER. Applications.

262 Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

265 Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

A.4 Leçons d'informatique fondamentale (option D)

901 Structures de données. Exemples et applications.

903 Exemples d'algorithmes de tri. Correction et complexité.

907 Algorithmique du texte. Exemples et applications.

909 Langages rationnels et automates finis. Exemples et applications.

912 Fonctions récursives primitives et non primitives. Exemples.

913 Machines de Turing. Applications.

914 Décidabilité et indécidabilité. Exemples.

915 Classes de complexité. Exemples.

916 Formules du calcul propositionnel : représentation, formes normales, satisfiabilité. Applications.

918 Systèmes formels de preuve en logique du premier ordre. Exemples.

921 Algorithmes de recherche et structures de données associées.

923 Analyses lexicale et syntaxique. Applications.

924 Théories et modèles en logique du premier ordre. Exemples.

925 Graphes : représentations et algorithmes.

926 Analyse des algorithmes : complexité. Exemples.

927 Exemples de preuve d'algorithme : correction, terminaison.

928 Problèmes NP-complets : exemples et réduction.

929 Lambda-calcul pur comme modèle de calcul. Exemples.

930 Sémantique des langages de programmation. Exemples.

931 Schémas algorithmiques. Exemples et applications.

932 Fondements des bases de données relationnelles.

A.5 Sélection de leçons de mathématiques pour le concours spécial docteurs

101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

107 Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel. Exemples.

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

120 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

121 Nombres premiers. Applications.

123 Corps finis. Applications.

126 Exemples d'équations en arithmétique.

141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

142 PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

152 Déterminant. Exemples et applications.

153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

156 Exponentielle de matrices. Applications.

157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

158 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

191 Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.

203 Utilisation de la notion de compacité.

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

213 Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

220 Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'études de solutions en dimension 1 et 2.

222 Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

228 Continuité, dérivabilité, dérivation faible des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

233 Analyse numérique matricielle. Résolution approchée de systèmes linéaires, recherche d'éléments propres, exemples.

234 Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

235 Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

245 Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications.

246 Séries de Fourier. Exemples et applications.

250 Transformation de Fourier. Applications.

262 Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

265 Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

266 Illustration de la notion d'indépendance en probabilités.

Annexe B

La bibliothèque de l'agrégation

Le jury attire l'attention des candidats sur le fait que l'organisation du concours met à leur disposition une bibliothèque complète, bien ordonnée, avec des livres faciles à trouver. Cette bibliothèque fait l'objet d'achats réguliers qui permettent de proposer des ouvrages de référence modernes et adaptés.

ABELSON H. **SUSSMAN G. J.** **SUSSMAN J.**	Structure and interpretation of computer programs – **1 ex.** –	MIT Press
AEBISCHER B.	L2 Analyse fonctions de plusieurs variables et géométrie analytique – **1 ex.** –	Vuibert
AEBISCHER B.	L3 Géometrie – **1 ex.** –	Vuibert
AHUÉS M. **CHATELIN F.**	Exercices de valeurs propres de matrices – **2 ex.** –	Masson
ALBERT L. **Collectif**	Cours et exercices d'informatique – **1 ex.** –	Vuibert
ALDON G.	Mathématiques dynamiques – **2 ex.** –	Hachette
ALESSANDRI M.	Thèmes de géométrie – **2 ex.** –	Dunod
ALLAIRE G.	Analyse numérique et optimisation – **2 ex.** –	Editions de l'école polytechnique
ALLANO-CHEVALIER M. **OUDOT X.**	Analyse et géométrie différentielle – **1 ex.** –	Hachette

ALLOUCHE J. P. **SHALLIT J.**	Automatic sequences theory, applications, generalizations – **1 ex.** –	CAMBRIDGE
AMAR E. **MATHERON É.**	Analyse complexe – **2 ex.** –	CASSINI
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques — Tome 1A - Topologie – **4 ex.** – — Tome 1B - Fonctions numériques – **6 ex.** – — Tome 2 - Suites et séries numériques – **7 ex.** – — Tome 3 - Analyse fonctionnelle – **6 ex.** – — Tome 5 - Algèbre générale, polynômes – **4 ex.** – — Tome 6 - Algèbre linéaire, première partie – **6 ex.** – — Tome 7 - Algèbre linéaire, deuxième partie – **7 ex.** –	ELLIPSES
ANDREWS G.	Number Theory – **1 ex.** –	DOVER
APPLE A.W.	Modern compiler implementation — in C – **1 ex.** – — in Java – **1 ex.** – — in ML – **1 ex.** –	CAMBRIGDE
ARIBAUD F. **VAUTHIER J.**	Mathématiques. Première année de DEUG – **1 ex.** –	ESKA
ARNAUDIÈS J-M. **BERTIN J.**	Groupes, Algèbres et Géométrie — Tome I – **9 ex.** – — Tome II – **5 ex.** –	ELLIPSES
ARNAUDIÈS J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'analyse – **1 ex.** –	DUNOD
ARNAUDIÈS J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie du cours de Mathématiques tome 4 – **5 ex.** –	DUNOD
ARNAUDIÈS J-M. **FRAYSSE H.**	Cours de Mathématiques — 1. Algèbre – **9 ex.** – — 2. Analyse – **5 ex.** – — 3. Compléments d'analyse – **8 ex.** – — 4. Algèbre bilinéaire et géométrie – **5 ex.** –	DUNOD

ARNAUDIÈS J.-M. **LELONG-FERRAND J.**	Cours de Mathématiques — Tome 1 pour M-M' : Algèbre – **4 ex.** – — Tome 1 pour A-A' : Algèbre – **4 ex.** – — Tome 2 : Analyse – **9 ex.** – — Tome 3 : Géométrie et cinématique – **5 ex.** – — Tome 4 : Equations différentielles, intégrales multiples – **4 ex.** –	DUNOD
ARNOLD V.	Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires – **2 ex.** –	MIR
ARNOLD V.	Équations différentielles ordinaires – **3 ex.** –	MIR
ARNOLD V.	Lectures on partial differential equations – **1 ex.** –	SPRINGER
ARNOLD A. **GUESSARIAN I.**	Mathématiques pour l'informatique – **1 ex.** –	EDISCIENCES
ARTIN E.	Algèbre géométrique – **1 ex.** –	GAUTHIER-VILLARS
ARTIN E.	Algèbre géométrique – **4 ex.** –	GABAY
ARTIN M.	Algebra – **2 ex.** –	PRENTICE HALL
AUBIN J.P.	Analyse fonctionnelle appliquée — Tome 1 – **1 ex.** – — Tome 2 – **1 ex.** –	PUF
AUDIN M.	Géométrie de la licence à l'agrégation – **1 ex.** –	BELIN
AUTEBERT J. M.	Calculabilité et décidabilité – **1 ex.** –	MASSON
AUTEBERT J. M.	Théorie des langages et des automates – **1 ex.** –	MASSON
AVEZ A.	Calcul différentiel – **1 ex.** –	MASSON

AVEZ A.	La leçon d'analyse à l'oral de l'agrégation	Masson
BAASE S. **VAN GELDER A.**	Computer algorithms Introduction to design & analysis – **1 ex.** –	Addison Wesley
BADOUEL E. **BOUCHERON S.** **DICKY A., PETIT A.** **SANTHA M., WEIL P., ZEITOUN M.**	Problèmes d'informatique fondamentale – **1 ex.** –	Springer
BAJARD J.C.	Exercices d'Algorithmique – **1 ex.** –	ITP
BAKHVALOV N.	Méthodes numériques – **2 ex.** –	MIR
BARANGER J.	Analyse numérique – **1 ex.** –	Hermann
BARBE Ph. **LEDOUX M.**	Probabilité (De la licence à l'agrégation) – **1 ex.** –	Belin
BARRET M. **BENIDIR M.**	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires – **1 ex.** –	Dunod
BASILI B. **PESKINE C.**	Algèbre – **1 ex.** –	Diderot, Éditeur Arts et Sciences
BASS J.	Cours de Mathématiques — Tome 1 – **2 ex.** – — Tome 2 – **2 ex.** –	Masson
BAUER F. L.	Decrypted secrets. Methods and maxims of cryptology – **1 ex.** –	Springer
BECK V. **MALICK J.** **PEYRÉ G.**	Objectif Agregation – **3 ex.** –	HK
BELGHITI I. **MANSUY R.** **VIE J.J.**	Les clefs pour l'info – **1 ex.** –	Calvage & Mounet
BENAÏM M. **EL KAROUI N.**	Promenade aléatoire – **1 ex.** –	Les éditions de l'X

BENDER C. **ORSZAG S.**	Advanced mathematical methods for scientists and engineers – **3 ex.** –	Mc Graw Hill
BENIDIR M. **BARRET M.**	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires – **1 ex.** –	Dunod
BENOIST J. *et al*	Math L2, Cours complet avec 700 tests et exercices corrigés – **1 ex.** –	Pearson Education
BENOIST J. **SALINIER A.**	Exercices de calcul intégral – **2 ex.** –	Dunod
BENZONI-GAVAGE S.	Calcul différentiel et équations différentielles – **2 ex.** –	Dunod
BERCU B. **CHAFAÏ D.**	Modélisation stochastique et simulation – **1 ex.** –	Dunod
BERGER M.	Géométrie — Index – **3 ex.** – — 1. Action de groupes, espaces affines et projectifs – **3 ex.** – — 2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères – **2 ex.** – — 3. Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes – **2 ex.** – — 4. Formes quadratiques, quadriques et coniques – **2 ex.** – — 5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères – **2 ex.** –	Cédic/Nathan
BERGER M.	Géométrie tome 2 – **1 ex.** –	Nathan
BERGER M.	Géométrie vivante – **2 ex.** –	Cassini
BERGER M. **BERRY J-P.** **PANSU P.** **SAINT RAYMOND X.**	Problèmes de géométrie commentés et rédigés – **3 ex.** –	Cédic/Nathan
BERGER M. **GOSTIAUX B.**	Géométrie différentielle – **2 ex.** –	Armand Colin
BERHUY G.	Algèbre, le grand combat – **1 ex.** –	Calvage & Mounet

BERLINE N. **SABBAH C.**	Groupes finis, journées X-UPS 2000 – **1 ex.** –	EDITIONS DE L'X
BERTHELIN F.	Equations différentielles – **3 ex.** –	CASSINI
BHATIA R.	Matrix Analysis – **1 ex.** –	SPRINGER
BICKEL P.J. **DOKSUM K.A.**	Mathematical statistics – **1 ex.** –	PRENTICE HALL
BIGGS N. L.	Discrete mathematics – **1 ex.** –	OXFORD SCIENCE PUBLICATIONS
BINET G.	Traitement du signal – **2 ex.** –	ELLIPSE
BILLINGSLEY P.	Probability and measure – **2 ex.** –	WILEY
BLANCHARD A.	Les corps non commutatifs – **5 ex.** –	PUF
BLOMME T. **GASSOT L.** **GUIGNARD Q.** **RANDÉ B.**	Les clefs pour l'oral – **1 ex.** –	CALVAGE& MOUNET
BOAS R.	A primer of real functions – **1 ex.** –	MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA
BOCCARA N.	Distributions – **2 ex.** –	ELLIPSES
BOISSONAT J.-D. **YVINEC M.**	Géométrie algébrique – **1 ex.** –	EDISCIENCE
BON J.-L.	Fiabilité des systèmes – **1 ex.** –	MASSON
BONNANS J.-F. **GILBERT J.C.** **LEMARÉCHAL C.** **SAGASTIZABAL C.** **PENNEQUIN D.**	Optimisation numérique – **2 ex.** –	SPRINGER

BONY J.-M.	Cours d'analyse – **5 ex.** –	Editions de l'École polytechnique
BONY J.-M.	Méthodes mathématiques pour les sciences physiques – **3 ex.** –	Editions de l'École polytechnique
BORIES-LONGUET F.	Graphes et combinatoire	Ellipse
BOSTAN A. **CHYZAK F.** **GIUSTI M.** **LEBTRETON R.** **LECERF G.** **SALVY B.** **SCHOST E.**	Algorithmes efficaces en calcul formel – **2 ex.** –	Chyzak F. ed.
BOUALEM H. **BROUZET J.C.** **ELSNER B.** **KACZMAREK L.**	Mathématique L1 – **1 ex.** –	Pearson Education
BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique — Topologie générale, chapitres V à X – **2 ex.** – — Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à VII – **2 ex.** – — Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à III – **1 ex.** – — Fascicule XIII Intégration, chapitres I à IV – **2 ex.** –	Hermann
BOURGADE P.	Annales des Olympiades internationales de mathématiques 1976-2005 – **1 ex.** –	Cassini
BOUVIER A. **RICHARD D.**	Groupes – **3 ex.** –	Hermann
BRÉMAUD P.	Introduction aux probabilités – **1 ex.** –	Springer
BRÉZIS H.	Analyse fonctionnelle, théorie et applications – **3 ex.** –	Masson
BRIANE M. **PAGÈS G.**	Théorie de l'intégration Cours et exercices, 3ème édition – **1 ex.** –	Vuibert

BROUSSE P.	Mécanique MP - PC.- Spéciales A. A'. B. B'. – **2 ex.** –	Armand Colin
BRUCE J.W. **GIBLIN P.J.** **RIPPON P.J.**	Microcomputers and Mathematics – **1 ex.** –	Cambridge
CABANE R. **LEBOEUF C.**	Algèbre linéaire — 1. Espaces vectoriels , Polynômes – **4 ex.** – — 2. Matrices et réduction – **4 ex.** –	Ellipses
CABANNES H.	Cours de Mécanique générale – **2 ex.** –	Dunod
CALAIS J.	Éléments de théorie des anneaux – **1 ex.** –	PUF
CALAIS J.	Éléments de théorie des groupes – **1 ex.** –	PUF
CALDERO P. **GERMONI J.**	Histoires hédonistes de groupes et de géométries – **7 ex.** –	Calvage et Mounet
CALVO B.	Cours d'analyse II – **1 ex.** –	Armand Colin
CANDELPERGHER B.	Calcul intégral – **1 ex.** –	Cassini
CANDELPERGHER B.	Théorie des probabilités – **2 ex.** –	Calvage et Mounet
CARREGA J.C.	Théorie des corps – **1 ex.** –	Hermann
CARRIEU H.	Probabilités : exercices corrigés – **1 ex.** –	EDP Sciences
CARTAN H.	Calcul différentiel (1971) – **5 ex.** –	Hermann
CARTAN H.	Cours de calcul différentiel (1977) – **1 ex.** –	Hermann
CARTAN H.	Formes différentielles – **4 ex.** –	Hermann

CARTAN H.	Théorie élémentaire des fonctions analytiques – **6 ex.** –	HERMANN
CARTON O.	Langages formels, calculabilité et complexité – **3 ex.** –	VUIBERT
CASAMAYOU A. et al.	Calcul mathématique avec SAGE – **1 ex.** –	COPYRIGHTED MATERIAL
CASAMAYOU A. **CHAUVIN P.** **CONNAN G.**	Programmation en Python pour les mathématiques – **2 ex.** –	DUNOD
CASTI J.L.	Realty Rules : Picturing the world in mathematics I – **1 ex.** –	WILEY INTERSCIENCE
CASTI J.L.	Realty Rules : Picturing the world in mathematics II – **1 ex.** –	WILEY INTERSCIENCE
CASTLEMAN K.R.	Digital image processing – **1 ex.** –	PRENTICE HALL
CHABANOL M.-L. **RUCH J.-J.**	Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques – **2 ex.** –	ELLIPSE
CHABAT B.	Introduction à l'analyse complexe – **1 ex.** –	MIR
CHAMBERT-LOIR A.	Algèbre corporelle – **1 ex.** –	EDITIONS DE L'X
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation — Analyse 2 – **1 ex.** – — Analyse 3 – **2 ex.** –	MASSON
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.** **MAILLOT V.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Analyse 1 (seconde édition revue et corrigée) – **3 ex.** –	MASSON
CHARLES J. **MBEKHTA M.** **QUEFFÉLEC H.**	Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs – **5 ex.** –	DUNOD
CHARLES J. **MBEKHTA M.** **QUEFFÉLEC H.**	Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs – **4 ex.** –	ELLIPSES

CHARPENTIER E. **NIKOLSKI N.**	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui — Vol 1 – **1 ex.** – — Vol 2 – **1 ex.** – — Vol 3 – **2 ex.** – — Vol 4 – **1 ex.** –	Ellipses
CHILDS L.	A concrete introduction to Higher Algebra – **2 ex.** –	Springer Verlag
CHOIMET D. **QUEFFÉLEC H.**	Analyse mathématique – **2 ex.** –	Cassini
CHOQUET G.	Cours d'analyse Tome II : Topologie – **6 ex.** –	Masson
CHOQUET G.	L'enseignement de la géométrie – **4 ex.** –	Hermann
CHOQUET-BRUHAT Y.	Distributions. Théories et problèmes – **1 ex.** –	Masson
CHRISTOL G. **PILIBOSSIAN P.** **YAMMINE S.**	— Algèbre 1 – **1 ex.** – — Algèbre 2 – **2 ex.** –	Ellipses
CIARLET P.G.	Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation – **2 ex.** –	Masson
CIARLET P.G.	Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation – **1 ex.** –	Dunod
COGIS O. **ROBERT C.**	Au-delà des ponts de Könisberg. Théorie des graphes. Problèmes, théorie, algorithmes – **1 ex.** –	Vuibert
COHN P.M.	Algebra Volume 1 – **1 ex.** –	John Wiley
COLLET H. **GIRARD B.** **PERRIER C.**	Mathématique BTS industriel – **1 ex.** –	Nathan
COLLET P.	Modeling binary data – **1 ex.** –	Chapman and Hall
COLLET J.-F.	Discrete stochastic processes and applications – **2 ex.** –	Springer

COLMEZ P.	Éléments d'analyse et d'algèbre – **2 ex.** –	Editions de l'X
COMBROUZE A.	Probabilités et statistiques – **1 ex.** –	PUF
CORI R. **LASCAR D.**	Logique mathématique — 1. Calcul propositionnel, algèbre de Boole, calcul des prédicats – **1 ex.** – — 2. Fonctions récursives, théorème de Gödel, théorie des ensembles, théorie des modèles – **1 ex.** –	Dunod
CORMEN T. H. **LEISERSON C. E.** **RIVEST R. L.** **STEIN C.**	Introduction à l'algorithmique – **2 ex.** –	Dunod
CORTELLA A.	Théorie des groupes – **2 ex.** –	Vuibert
COTRELL M. **GENON-CATALOT V.** **DUHAMEL C.** **MEYRE T.**	Exercices de probabilités – **2 ex.** –	Cassini
COURANT R. **HILBERT D.**	Methods of Mathematical Physics — Volume 1 – **1 ex.** – — Volume 2 – **1 ex.** –	John Wiley
COUSINEAU G. **MAUNY M.**	Approche fonctionnelle de la programmation – **2 ex.** –	Ediscience
COX D.A.	Galois Theory – **1 ex.** –	Wiley Interscience
COXETER H.S.M.	Introduction to Geometry – **1 ex.** –	John Wiley
CVITANOVIĆ P.	Universality in Chaos – **1 ex.** –	Institute of Physics Publishing
DACUNHA-CASTELLE D. **DUFLO M.**	— Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe – **3 ex.** – — Exercices de Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe – **1 ex.** –	Masson

DACUNHA-CASTELLE D. **REVUZ D.** **SCHREIBER M.**	Recueil de problèmes de calcul des probabilités – **1 ex.** –	MASSON
DAMPHOUSSE P.	Petite introduction à l'algorithmique – **1 ex.** –	ELLIPSES
DANTZER J.F.	Mathématiques pour l'agrégation interne – **3 ex.** –	VUIBERT
DAVID R. **NOUR K.** **RAFFALI C.**	Introduction à la logique Théorie de la démonstration – **1 ex.** –	DUNOD
DEBREIL A.	Groupes finis et treillis de leurs sous-groupes – **1 ex.** –	CALVAGE & MOUNET
DEBREIL A. **EIDEN J.-D.** **MNEIMNÉ R.** **NGUYEN T.-H.**	Formes quadratiques et géométrie : Une introduction, et un peu plus – **1 ex.** –	CALVAGE & MOUNET
DE BIÈVRE S.	Face au jury du CAPES : Préparer les leçons d'Analyse, l'oral du CAPES de mathématiques – **1 ex.** –	ELLIPSES
DEHEUVELS P.	L'intégrale – **2 ex.** –	PUF
DEHEUVELS R.	Formes quadratiques et groupes classiques – **3 ex.** –	PUF
DEHORNOY P.	Complexité et décidabilité – **1 ex.** –	SPRINGER
DE KONNINCK J.M. **MERCIER A.**	Introduction à la théorie des nombres – **1 ex.** –	MODULO
DELCOURT J.	Théorie des groupes – **2 ex.** –	DUNOD
DELTHEIL R. **CAIRE D.**	Géométrie et compléments – **2 ex.** –	JACQUES GABAY
DEMAILLY J.P.	Analyse numérique et équations différentielles – **2 ex.** –	PU GRENOBLE
DEMAZURE M.	Catastrophes et bifurcations – **1 ex.** –	ELLIPSES

DEMAZURE M.	Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes – **2 ex.** –	CASSINI
DEMAZURE M.	Cours d'algèbre – **2 ex.** –	CASSINI
DEMBO A. **ZEITOUNI O.**	Large deviations techniques and applications – **1 ex.** –	SPRINGER
DESCHAMPS C. **WARUSFEL A.** *et al.*	Mathématiques, cours et exercices corrigés — 1ère année MPSI, PCSI, PTSI – **2 ex.** – — 2ème année MP, PC, PSI – **1 ex.** –	DUNOD
DESCOMBES R.	Éléments de théorie des nombres – **2 ex.** –	PUF
DE SEGUINS PAZZIS C.	Invitation aux formes quadratiques – **3 ex.** –	CALVAGE & MOUNET
DESPRÉS B.	Lois de conservations euleriennes, lagrangiennes et méthodes numériques – **2 ex.** –	SPRINGER
DEVANZ C. **ELHODAIBI M.**	Exercices corrigés de Mathématiques posés à l'oral des Ensi, Tome 2 – **4 ex.** –	ELLIPSES
DI MENZA L.	Analyse numérique des équations aux dérivées partielles – **2 ex.** –	CASSINI
DIEUDONNÉ J.	Algèbre linéaire et géométrie élémentaire – **4 ex.** –	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Calcul infinitésimal – **2 ex.** –	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Sur les groupes classiques – **1 ex.** –	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Éléments d'Analyse. — Fondements de l'analyse moderne – **5 ex.** – — Éléments d'Analyse Tome 2. – **4 ex.** –	GAUTHIER-VILLARS
DIXMIER J.	Cours de Mathématiques du premier cycle — Première année – **3 ex.** – — Deuxième année – **3 ex.** –	GAUTHIER-VILLARS

DOUCHET J.	Analyse complexe – **2 ex.** –	Presses polytechniques et univ. romandes
DOUCHET J.	Analyse : recueil d'exercices et aide-mémoire, volume 1 – **2 ex.** –	Presses polytechniques et univ. romandes
DOUCHET J.	Analyse : recueil d'exercices et aide-mémoire, volume 2 – **2 ex.** –	Presses polytechniques et univ. romandes
DOUCHET J. **ZWALHEN B.**	Calcul différentiel et intégral – **2 ex.** –	Presses polytechniques et univ. romandes
DOWEK G. **LÉVY J.-J**	Introduction à la théorie des langages de programmation – **1 ex.** –	Editions de l'X
DRAPPER N. **SCHMITH H.**	Applied regression analysis – **1 ex.** –	Wiley
DUBUC S.	Géométrie plane – **4 ex.** –	PUF
DUGAC P.	Histoire de l'analyse. Autour de la notion de limite et de ses voisinages – **1 ex.** –	Vuibert
DUTERTRET G.	Initiation à la cryptographie – **1 ex.** –	PUF
DYM H. **McKEAN H.P.**	Fouriers series and integrals – **1 ex.** –	Academics Press
EBBINGHAUS H. *et al.*	Les Nombres – **2 ex.** –	Vuibert
EIDEN J.D.	Géométrie analytique classique – **3 ex.** –	Calvage et Mounet
EIDEN J.D.	Le jardin d'Eiden – **1 ex.** –	Calvage et Mounet

EL KACIMI ALAOUI A. **QUEFFÉLEC H.** **SACRÉ C.** **VASSALLO V.**	Quelques aspects des mathématiques actuelles – **3 ex.** –	Ellipses
ENGEL A.	Solutions d'expert — Vol 1 – **1 ex.** – — Vol 2 – **1 ex.** –	Cassini
ÉPISTEMON L. **(OVAERT J.L.** **VERLEY J.L.)**	Exercices et problèmes — Analyse. Volume 1 – **1 ex.** – — Algèbre. – **3 ex.** –	Cédic/Nathan
ESCOFIER J.-P.	Théorie de Galois : Cours et exercices corrigés – **2 ex.** –	Dunod
ESKIN G.	Lectures on linear partial differential equations – **2 ex.** –	AMS
EXBRAYAT J.M. **MAZET P.**	Notions modernes de mathématiques — Algèbre 1 : Notions fondamentales de la théorie des ensembles – **3 ex.** – — Analyse 1 : Construction des espaces fondamentaux de l'analyse – **3 ex.** – — Analyse 2 : Éléments de topologie générale – **3 ex.** –	Hatier
FADDEEV D. **SOMINSKI I.**	Recueil d'exercices d'Algèbre Supérieure – **3 ex.** –	MIR
FAIRBANK X. **BEEF C.**	POX - Exercices posés au petit oral de l'X – **7 ex.** –	Ellipses
FARAUT J.	Analyse sur les groupes de Lie – **3 ex.** –	Calvage et Mounet
FARAUT J. **KHALILI E.**	Arithmétique Cours, Exercices et Travaux Pratiques sur Micro-Ordinateur – **1 ex.** –	Ellipses
FELLER W.	An introduction to probability theory and its applications — Volume 1 – **2 ex.** – — Volume 2 – **2 ex.** –	John Wiley
FERRIER J.P.	Mathématiques pour la licence – **2 ex.** –	Masson

FILBET F.	Analyse numérique – **1 ex.** –	DUNOD
FLORY G.	Exercices de topologie et analyse avec solutions — Tome 1 - Topologie – **10 ex.** – — Tome 2 - Fonctions d'une variable réelle – **6 ex.** – — Tome 3 - Fonctions différentiables, intégrales multiples – **7 ex.** – — Tome 4 - Séries, équations différentielles – **7 ex.** –	VUIBERT
FONTANEZ F. **RANDÉ B.**	Les clefs pour les Mines – **2 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
FRANCHINI J. **JACQUENS J-C.**	Mathématiques Spéciales — Algèbre – **1 ex.** – — Analyse 1 – **1 ex.** – — Analyse 2 – **1 ex.** –	ELLIPSES
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 1 – **5 ex.** –	CASSINI
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 2 – **1 ex.** –	CASSINI
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 3 – **4 ex.** –	CASSINI
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 1 – **6 ex.** –	CASSINI
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 2 – **2 ex.** –	CASSINI
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 3 – **5 ex.** –	CASSINI
FRANCINOU S. **GIANELLA H.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 1 – **6 ex.** –	MASSON
FRENKEL J.	Géométrie pour l'élève-professeur – **1 ex.** –	HERMANN

FRESNEL J.	Groupes – **1 ex.** –	HERMANN
FRESNEL J.	Méthodes modernes en géométrie – **1 ex.** –	HERMANN
FRESNEL J. **MATIGNON M.**	Algèbre et géométrie – **1 ex.** –	HERMANN
FUHRMANN P.	A polynomial approach to linear algebra – **1 ex.** –	SPRINGER
FULTON W.	Algebraic Topology A first course – **1 ex.** –	SPRINGER
GABRIEL P.	Matrices, géométrie, algèbre linéaire – **3 ex.** –	CASSINI
GANTMACHER F.R.	Théorie des matrices — Tome 1 – **1 ex.** – — Tome 2 – **1 ex.** –	DUNOD
GARET O.	Probabilités et processus stochastiques – **3 ex.** –	COPYRIGHTED MATERIAL
GARET O. **KURTZMANN A.**	De l'intégration aux probabilités – **5 ex.** –	ELLIPSES
GAREY M. **JOHNSON D.**	Computers and intractability – **1 ex.** –	FREEMAN
GARLING D.J.H.	Inequalities : a journey into linear analysis – **1 ex.** –	CAMBRIDGE
GARNIER J.-M.	Groupes et géométrie pour l'agrégation – **4 ex.** –	ELLIPSES
GATHEN (von zur) J. **GERHARD .J**	Modern computer algebra – **1 ex.** –	CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS
GENET J.	Mesure et intégration. Théorie élémentaire. Cours et exercices résolus – **2 ex.** –	VUIBERT
GHIDAGLIA J.M.	Petits problèmes d'analyse – **1 ex.** –	SPRINGER
GINDIKIN S.	Histoires de mathématiciens et de physiciens – **1 ex.** –	CASSINI

GOBLOT R.	Algèbre commutative – **2 ex.** –	Masson
GOBLOT R.	Thèmes de géométrie – **1 ex.** –	Masson
GODEMENT R.	Analyse — Tome 1 – **1 ex.** – — Tome 2 – **4 ex.** – — Tome 3 – **1 ex.** –	Springer
GODEMENT R.	Cours d'Algèbre – **4 ex.** –	Hermann
GOLUB G.H. **VAN LOAN C.F.**	Matrix computations – **1 ex.** –	Wiley
GONNORD S. **TOSEL N.**	Thèmes d'Analyse pour l'agrégation — Topologie et Analyse fonctionnelle – **2 ex.** – — Calcul différentiel – **1 ex.** –	Ellipses
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales — Tome 1 - Algèbre – **1 ex.** – — Tome 2 - Topologie et analyse réelle – **1 ex.** – — Tome 3 - Analyse fonctionnelle et calcul différentiel – **1 ex.** – — Tome 4 - Géométrie affine et métrique – **1 ex.** – — Tome 5 - Géométrie : arcs et nappes – **1 ex.** –	PUF
GOUDON T.	Mathématiques pour la modélisation et le calcul scientifique – **2 ex.** –	Iste
GOUDON T.	Intégration – **2 ex.** –	Ellipses
GOURDON X.	Les maths en tête, mathématiques pour M' — Algèbre – **2 ex.** – — Analyse – **1 ex.** –	Ellipses
GRAHAM R. **KNUTH D.** **PATASHNIK O.**	Concrete mathematics – **1 ex.** –	Adison-Wesley
GRAMAIN A.	Géométrie élémentaire – **2 ex.** –	Hermann

GRAMAIN A.	Intégration – **1 ex.** –	Hermann
GRANJON Y.	Informatique, algorithmes en pascal et en C – **2 ex.** –	Dunod
GRENIER J.-P.	Débuter en algorithmique avec Matlab et Scilab – **1 ex.** –	Ellipses
GREUB W.	Linear Algebra – **1 ex.** –	Springer Verlag
GRIFONE J.	Algèbre linéaire – **3 ex.** –	Cepadues
GRIMMET G. **WELSH D.**	Probability (an introduction) – **1 ex.** –	Oxford
GUJARATI D. N.	Basic Econometrics – **1 ex.** –	Wiley
GUSFIELD D.	Algorithms on strings, trees and sequences – **1 ex.** –	Cambridge university press
HABSIEGER L. **MARTEL V.**	Exercices corrigés posés à l'oral des ENSI Tome 1 Analyse – **7 ex.** –	Ellipses
HALMOS P.	Problèmes de mathématiciens petits et grands – **1 ex.** –	Cassini
HAMMAD P.	Cours de probabilités – **3 ex.** –	Cujas
HAMMAD P. **TARANCO A.**	Exercices de probabilités – **2 ex.** –	Cujas
HAMMER R. **HOCKS M.** **KULISH U.** **RATZ D.**	C++ toolbox for verified computing – **1 ex.** –	Springer
HARDY G.H. **WRIGHT E.M.**	An introduction to the theory of numbers – **2 ex.** –	Oxford
HAREL D.	Computer LTD. What they really can't do – **1 ex.** –	Oxford

HAREL D. **FELDMAN Y.**	Algorithmics. The spirit of computing – **1 ex.** –	ADDISON WESLEY
HAUCHECORNE B.	Les contre-exemples en mathématiques – **2 ex.** –	ELLIPSES
HENNEQUIN P.L. **TORTRAT A.**	Théorie des probabilités et quelques applications – **2 ex.** –	MASSON
HENRICI P.	Applied and Computational Complex Analysis — Volume 1 – **1 ex.** – — Volume 2 – **1 ex.** – — Volume 3 – **2 ex.** –	WILEY-INTERSCIENCE
HERBIN R. **GALLOUËT T.**	Mesures, intégration, probabilités – **3 ex.** –	ELLIPSES
HERVÉ M.	Les fonctions analytiques – **4 ex.** –	PUF
HINDRY M.	Arithmétique – **2 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
HIRSCH F. **LACOMBE G.**	Eléments d'analyse fonctionnelle – **3 ex.** –	MASSON
HOCHART M. **SCIUTO G.**	Algèbre Analyse Géométrie (MPSI/PCSI) – **1 ex.** –	VUIBERT
HOPCROFT J.E. **MOTWANI R.** **ULLMAN J. D.**	Introduction to automata theory, Languages and Computation – **1 ex.** –	ADDISON WESLEY
HOUZEL C.	Analyse mathématique : cours et exercices – **1 ex.** –	BELIN
HUBBARD J. **HUBERT F.**	Calcul scientifique T1 – **3 ex.** –	VUIBERT
HUBBARD J. **HUBERT F.**	Calcul scientifique T2 – **3 ex.** –	VUIBERT
INGRAO B.	Coniques projectives, affines et métriques – **2 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
IRELAND K. **ROSEN M.**	A Classical Introduction to Modern Numbers Theory – **2 ex.** –	SPRINGER VERLAG

ISAAC R.	Une initiation aux probabilités (Trad. R. Mansuy) – **1 ex.** –	VUIBERT-SPRINGER
ITARD J.	Les nombres premiers – **1 ex.** –	QUE SAIS-JE ? PUF
JACOBSON N.	Basic Algebra — Tome I – **2 ex.** – — Tome II – **2 ex.** –	FREEMAN AND CO
JACOD J. **PROTTER P.**	L'essentiel en théorie des probabilités – **1 ex.** –	CASSINI
JAUME M.	Éléments de mathématiques discrètes – **2 ex.** –	ELLIPSES
KAHANE J.P. **GILLES P.**	Séries de Fourier et ondelettes – **4 ex.** –	CASSINI
KATZNELSON Y.	An Introduction to Harmonic Analysis – **1 ex.** –	DOVER
KERBRAT Y. **BRAEMER J.-M.**	Géometrie des courbes et des surfaces – **1 ex.** –	HERMANN
KERNIGHAN B. **RITCHIE D.**	Le langage C – **1 ex.** –	DUNOD
KLOECKNER B.	Un bref aperçu de la géométrie projective – **1 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
KNUTH D.E.	The art of computer programming — Volume 1 : Fundamental algorithms – **1 ex.** – — Volume 2 : Seminumerical algorithms – **1 ex.** – — Volume 3 : Sorting and Searching – **1 ex.** –	ADDISON-WESLEY
KOBLITZ N.	A course in number theory and cryptography – **1 ex.** –	SPRINGER
KOLMOGOROV A. **FOMINE S.**	Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle – **1 ex.** –	ELLIPSES
de KONNINCK J.M. **MERCIER A.**	Introduction à la théorie des nombres – **1 ex.** –	MODULO

KÖRNER T.W.	Fourier analysis – **2 ex.** –	CAMBRIDGE
KÖRNER T.W.	Exercises for Fourier analysis – **1 ex.** –	CAMBRIDGE
KOURIS E.	Une année de colle en maths en MPSI – **1 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
KREE P.	Introduction aux Mathématiques et à leurs applications fondamentales M.P.2 – **1 ex.** –	DUNOD
KRIVINE H.	Exercices de Mathématiques pour physiciens – **1 ex.** –	CASSSINI
KRIVINE J.-L.	Théorie axiomatique des ensembles – **2 ex.** –	PUF
KRIVINE J.-L.	Théorie des ensembles – **2 ex.** –	CASSINI
KUNG J.P.S. **ROTA G-C.** **YAN C.H.**	Combinatorics : the Rota way – **1 ex.** –	CAMBRIDGE
LAAMRI E. H.	Mesures, intégration et transformée de Fourier des fonctions – **1 ex.** –	DUNOD
LACOMME P. **PRINS C.** **SEVAUX M.**	Algorithmes de graphes – **1 ex.** –	EYROLLES
LAFONTAINE J.	Introduction aux variétés différentielles – **1 ex.** –	PUF
LALEMENT R.	Logique, réduction, résolution – **1 ex.** –	MASSON
LANG S.	Algèbre linéaire — Tome 1 – **2 ex.** – — Tome 2 – **2 ex.** –	INTEREDITIONS
LANG S.	Algebra – **5 ex.** –	ADDISON-WESLEY
LANG S.	Linear Algebra – **6 ex.** –	ADDISON-WESLEY

LAROCHE F.	Escapades arithmétiques – **1 ex.** –	Ellipses
LASCAR D.	La théorie des modèles en peu de maux – **1 ex.** –	Cassini
LASCAUX T. **THÉODOR R.**	Analyse matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, tomes 1 & 2 – **2 ex.** –	Dunod
LAVILLE G.	Courbes et surfaces – **1 ex.** –	Ellipses
LAVILLE G.	Géométrie pour le CAPES et l'Agrégation – **2 ex.** –	Ellipses
LAX P. D.	Functional analysis – **1 ex.** –	Wiley
LAX P. D.	Linear Algebra – **1 ex.** –	Wiley
LE BRIS G.	Maple Sugar : une initiation progressive à Maple – **1 ex.** –	Cassini
LEBOEUF C. **GUÉGAND J.** **ROQUE J.L.** **LANDRY P.**	Exercices corrigés de probabilités – **1 ex.** –	Ellipses
LEBORGNE D.	Calcul différentiel et géométrie – **3 ex.** –	PUF
LEBOSSÉ C. **HÉMERY C.**	Géométrie. Classe de Mathématiques – **1 ex.** –	Jacques Gabay
LEHMANN D. **SACRÉ C.**	Géométrie et topologie des surfaces – **1 ex.** –	PUF
LEHNING H. **JAKUBOWICZ D.**	Mathématiques supérieures et spéciales 2 : Dérivation – **8 ex.** –	Masson
LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales — Tome 1 : Topologie – **8 ex.** – — Tome 3 : Intégration et sommation – **5 ex.** – — Tome 4 : Analyse en dimension finie – **8 ex.** – — Tome 5 : Analyse fonctionnelle – **5 ex.** –	Masson

LEICHTNAM E. **SCHAUER X.**	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS — Tome I - Algèbre 1 – **2 ex.** – — Tome 2 - Algèbre et géométrie – **5 ex.** – — Tome 3 - Analyse 1 – **4 ex.** – — Tome 4 - Analyse 2 – **9 ex.** –	Ellipses
LELONG-FERRAND J.	Géométrie différentielle – **3 ex.** –	Masson
LELONG-FERRAND J.	Les fondements de la géométrie – **2 ex.** –	PUF
LESIEUR L. **MEYER Y.** **JOULAIN C.** **LEFEBVRE J.**	Algèbre linéaire, géométrie – **1 ex.** –	Armand Colin
LIRET F.	Maths en pratiques – **1 ex.** –	Dunot
LION G.	Algèbre pour la licence Cours et exercices (2ème édition) – **1 ex.** –	Vuibert
LION G.	Géométrie du plan Cours complet avec 600 exercices résolus – **1 ex.** –	Vuibert
LOTHAIRE M.	Algebraic combinatorics on words – **1 ex.** –	Cambridge
MAC LANE S. **BIRKHOFF G.**	Algèbre — 1 : Structures fondamentales – **4 ex.** – — 2 : Les grands théorèmes – **4 ex.** –	Gauthier-Villars
MACKI J. **STRAUSS A.**	Introduction to optimal control theory – **1 ex.** –	Springer
MADÈRE K.	Leçons d'analyse – **1 ex.** –	Ellipse
MADÈRE K.	Leçons d'algèbre – **1 ex.** –	Ellipse
MAKAROV B.M. **GOLUZINA M.G.** **LODKIN A.A.** **PODKORYTOV A.N.**	Problèmes d'analyse réelle – **1 ex.** –	Cassini

MALLIAVIN M. P.	Les groupes finis et leurs représentations complexes – **2 ex.** –	Masson
MALLIAVIN P.	Géométrie différentielle intrinsèque – **2 ex.** –	Hermann
MALLIAVIN M. P. **WARUSFEL A.**	Algèbre linéaire et géométrie classique. Exercices – **3 ex.** –	Masson
MANIVEL L.	Cours spécialisé – **1 ex.** –	SMF
MANSUY R. **MNEIMNÉ R.**	Algèbre linéaire réduction des endomorphismes – **1 ex.** –	Vuibert
MANSUY R. **RANDÉ B.**	Les clefs pour l' X – **1 ex.** –	Calvage et Mounet
Manuels Matlab	— Using Matlab version 5 – **1 ex.** – — Using Matlab version 6 – **11 ex.** – — Statistics Toolbox – **5 ex.** – — Using Matlab Graphics – **3 ex.** –	
MARCO J.P. *et al.*	Analyse L3 – **2 ex.** –	Pearson
MASCART H. **STOKA M.**	Fonctions d'une variable réelle — Tome 2 : Exercices et corrigés – **1 ex.** – — Tome 3 : Exercices et corrigés – **1 ex.** – — Tome 4 : Exercices et corrigés – **1 ex.** –	PUF
MAURY B.	Analyse fonctionnelle, Exercices et problèmes corrigés – **15 ex.** –	Ellipses
MAWHIN J.	Analyse : fondements, technique, évolutions – **2 ex.** –	De Boeck Université
MAZET P.	Algèbre et géométrie pour le CAPES et l'Agrégation – **1 ex.** –	Ellipses
MENEZES A.J. **van OORSCHOT P.C.** **VANSTONE S.A.**	Handbook of applied cryptography – **1 ex.** –	CRC Press
MERINDOL J.-Y.	Nombres et algèbre – **2 ex.** –	EDP Sciences

MERKIN D.	Introduction to the theory of stability – **1 ex.** –	SPRINGER
MÉTIVIER M.	Probabilités : dix leçons d'introduction. École Polytechnique – **2 ex.** –	ELLIPSES
MEUNIER P.	Agrégation interne de Mathématiques Exercices d'oral corrigés et commentés — Tome 2 – **1 ex.** –	PUF
MEUNIER P.	Algèbre avec applications à l'algorithmique et à la cryptographie – **1 ex.** –	ELLIPSES
MEYRE T.	Probabilités, cours et exercices corrigés – **2 ex.** –	CALVAGE & MOURET
MIGNOTTE M.	Mathématiques pour le calcul formel – **1 ex.** –	PUF
MILHAU X.	Statistique – **1 ex.** –	BELIN
MITCHELL J. C.	Concepts in programming languages – **1 ex.** –	CAMBRIDGE
MNEIMNÉ R.	Eléments de géométrie : action de groupes – **3 ex.** –	CASSINI
MNEIMNÉ R.	Réduction des endomorphismes – **2 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
MNEIMNÉ R. **TESTARD F.**	Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques – **5 ex.** –	HERMANN
MOISAN J. **VERNOTTE A.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : topologie et séries – **3 ex.** –	ELLIPSES
MOISAN J. **VERNOTTE A.** **TOSEL N.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : suites et séries de fonctions – **2 ex.** –	ELLIPSES

MONIER J.M.	Cours de mathématiques — Analyse 2 MPSI, PCSI, PTSI – **1 ex.** – — Analyse 3 MP, PSI, PC, PT – **1 ex.** – — Analyse 4 MP, PSI, PC, PT – **1 ex.** – — Algèbre 1 MPSI, PCSI, PTSI – **3 ex.** – — Algèbre 2 MP, PSI, PC, PT – **2 ex.** – — Exercices d'analyse MPSI – **1 ex.** – — Exercice d'algèbre et géométrie MP – **2 ex.** –	DUNOD
MUTAFIAN C.	Le défi algébrique — Tome 1 – **3 ex.** – — Tome 2 – **3 ex.** –	VUIBERT
NAGEL E. **NEWMAN J. R.** **GÖDEL K.** **GIRARD J. Y.**	Le théorème de Gödel – **1 ex.** –	SEUIL
NAUDIN P. **QUITTE C.**	Algorithmique algébrique avec exercices corrigés – **1 ex.** –	MASSON
NEVEU J.	Base mathématique du calcul des probabilités – **1 ex.** –	MASSON
NEVEU J.	Martingales à temps discret – **1 ex.** –	MASSON
NIVEN I.	Irrational numbers – **2 ex.** –	MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA
NORRIS J.R.	Markov chains – **1 ex.** –	CAMBRIDGE
NOURDIN Y.	Leçons d'analyse, probabilités, algèbre et géométrie – **1 ex.** –	DUNOD
O'ROURKE J.	Computational geometry in C (second edition) – **1 ex.** –	CAMBRIDGE
OPREA J.	Differential geometry – **1 ex.** –	PRENTICE HALL
OUVRARD J.Y.	— Probabilités 1 (capes, agrégation) – **3 ex.** – — Probabilités 2 (maîtrise, agrégation) – **1 ex.** –	CASSINI

PABION J.F.	Elements d'analyse complexe – **2 ex.** –	Ellipse
PAPADIMITRIOU C.H.	Computational complexity – **1 ex.** –	Pearson Education
PAPINI O. **WOLFMANN J.**	Algèbre discrète et codes correcteurs – **2 ex.** –	Springer
PARDOUX E.	Processus de Markov et applications – **1 ex.** –	Dunod
PEDOE D.	Geometry- A comprehensive course – **1 ex.** –	Dover
PERKO L.	Differential equation and dynamical systems – **1 ex.** –	Springer
PERRIN D.	Cours d'Algèbre – **3 ex.** –	Ellipses
PERRIN D.	Cours d'Algèbre – **2 ex.** –	ENSJF
PERRIN D.	Mathématiques d'école – **1 ex.** –	Cassini
PERRIN D.	Nombres, mesures et géométrie – **1 ex.** –	Ellipse
PERRIN-RIOU B.	Algèbre, arithmétique et MAPLE – **3 ex.** –	Cassini
PETAZZONI B.	Seize problèmes d'informatique – **1 ex.** –	Springer
PETROVŠEK M. **WILF H.S.** **ZEILBERGER D.**	A=B – **1 ex.** –	A.K. Peters
PEVZNER P.	Computational molecular biology- an algorithmic approach – **1 ex.** –	MIT press
PEYRÉ G.	L'algèbre discrète de la transformée de Fourier – **3 ex.** –	Ellipse
PÓLYA G. **SZEGŐ G.**	Problems and Theorems in Analysis — Volume I – **3 ex.** – — Volume II – **3 ex.** –	Springer Verlag

POMMELLET A.	Agrégation de Mathématiques. Cours d'Analyse – **2 ex.** –	Ellipses
PRASOLOV V.	Polynomials – **1 ex.** –	Springer
PRASOLOV V.	Problèmes et théorèmes d'algèbre linéaires – **3 ex.** –	Cassini
PREPARATA F.P. **SHAMOS M.I.**	Computational geometry - an introduction – **1 ex.** –	Springer
PRESS W. **FLANNERY B.** **TEUKOLSKI S.** **VETTERLING W.**	Numerical recipes in Pascal – **1 ex.** –	Cambridge
PUTZ J.F.	Maple animation – **1 ex.** –	Chapman and Hall
QUATERONI A. **SACCO R.** **SALERI F.**	Méthodes numériques – **2 ex.** –	Springer
QUATERONI A. **SALERI F.** **GERVASIO P.**	Calcul scientifique – **2 ex.** –	Springer
QUEFFÉLEC H.	Topologie – **3 ex.** –	Dunod
QUEFFÉLEC H. **ZUILY C.**	Éléments d'analyse – **2 ex.** –	Dunod
QUEFFÉLEC H. **ZUILY C.**	Analyse pour l'agregation – **1 ex.** –	Dunod
RALSTON A. **RABINOWITCH P**	A first course in numerical analysis – **3 ex.** –	Internatinal Student Edition

RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales — 1- Algèbre – **7 ex.** – — 2- Algèbre et applications à la géométrie – **8 ex.** – — 3- Topologie et éléments d'analyse – **13 ex.** – — 4- Séries et équations différentielles – **9 ex.** – — 5- Applications de l'analyse à la géométrie – **8 ex.** –	Masson
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Exercices avec solutions — Algèbre – **2 ex.** – — Analyse 1 – **5 ex.** – — Analyse 2 – **7 ex.** –	Masson
RAMIS J.P. **WARUSFEL A.**	Mathématiques - Tout en un pour la licence – **2 ex.** –	Dunod
RAMIS J.P. **WARUSFEL A.**	Mathématiques - Tout en un pour la licence Niveau 1 – **2 ex.** –	Dunod
RAMIS J.P. **WARUSFEL A.**	Mathématiques - Tout en un pour la licence Niveau 2 – **2 ex.** –	Dunod
RAMIS J.P. **WARUSFEL A.**	Mathématiques - Tout en un pour la licence Niveau 3 – **2 ex.** –	Dunod
RAO C.R.	Linear statistical inference and its application – **1 ex.** –	Wiley
RANDÉ B.	Les carnets indiens de Srinivasa Ramanujan – **1 ex.** –	Cassini
RANDÉ B. **MANSUY R.**	Les clefs pour l'X (2) – **1 ex.** –	Calvage Mounet
RANDÉ B. **TAIEB F.**	Les clefs pour l'X – **1 ex.** –	Calvage Mounet
REINHARDT F. **SOEDER H.**	Atlas des mathématiques – **1 ex.** –	Livre de Poche
REMMERT R.	Classical topics in complex function theory – **1 ex.** –	Springer
RIDEAU F.	Exercices de calcul différentiel – **2 ex.** –	Hermann

RIESZ F. **NAGY SZ. B.**	Leçons d'analyse fonctionnelle – **2 ex.** –	GAUTHIER-VILLARS
RIO E.	Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants – **2 ex.** –	SPRINGER
RITTAUD, B.	Newton implique Kepler – **2 ex.** –	ELLIPSES
RIVAUD J.	Algèbre (Tome 2) – **1 ex.** –	VUIBERT
RIVOIRARD V. **STOLTZ G.**	Statistique mathématique en action – **3 ex.** –	DUNOD
ROBERT C.	Contes et décomptes de la statistique - Une initiation par l'exemple – **1 ex.** –	VUIBERT
ROLLAND R.	Théorie des séries 2- Séries entières – **1 ex.** –	CÉDIC/NATHAN
ROMAN S.	Field theory – **1 ex.** –	SPRINGER-VERLAG
ROMBALDI J.-E.	Thèmes pour l'agrégation de mathématiques – **2 ex.** –	EDP SCIENCES
ROMBALDI J.-E.	Analyse matricielle – **1 ex.** –	EDP SCIENCES
ROMBALDI J.-E.	Mathématiques pour l'agrégation – **2 ex.** –	DEBOECK SUP.
ROMBALDI J.E.	Analyse matricielle – **1 ex.** –	EDP SCIENCES
ROTMAN J. J.	An introduction to the theory of groups – **1 ex.** –	SPRINGER-VERLAG
ROUDIER H.	Alèbre linéaire. Cours et exercices – **1 ex.** –	VUIBERT
ROUSSEAU Y. **SAINT-AUBIN Y.**	Mathématiques et technologie – **1 ex.** –	SPRINGER (SUMAT)
ROUVIÈRE F.	Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation – **3 ex.** –	CASSINI

ROUX C.	Initiation à la théorie des graphes – **1 ex.** –	ELLIPSES
RUAUD J.F. **WARUSFEL A.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 3 – **2 ex.** –	MASSON
RUDIN W.	Analyse réelle et complexe – **2 ex.** –	MASSON
RUDIN W.	Functional analysis – **2 ex.** –	MC GRAW HILL
RUDIN W.	Real and complex analysis – **1 ex.** –	MC GRAW HILL
SA EARP R. **TOUBIANA E.**	Introduction à la Géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann – **1 ex.** –	CASSINI
SAINSAULIEU L.	Calcul scientifique – **1 ex.** –	DUNOD
SAINT RAYMOND J.	Topologie, calcul différentiel et variable complexe – **1 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
SAKAROVITCH J.	Eléments de théorie des automates – **1 ex.** –	VUIBERT
SAKS S. **ZYGMUND A.**	Fonctions analytiques – **2 ex.** –	MASSON
SAMUEL P.	Géométrie projective – **1 ex.** –	PUF
SAMUEL P.	Théorie algébrique des nombres – **3 ex.** –	HERMANN
SARMANT M.C. **MERLIER T.** **PILIBOSSIAN Ph.** **YAMMINE S.**	Analyse 1 – **1 ex.** –	ELLIPSES
SAVIOZ J.C.	Algèbre linéaire, cours et exercices – **1 ex.** –	VUIBERT
SCHATZMAN M.	Analyse numérique, une approche mathématique – **2 ex.** –	DUNOD
SCHNEIER B.	Applied cryptography – **1 ex.** –	WILEY

SCHWARTZ L.	Analyse — I Topologie générale et analyse fonctionnelle – **4 ex.** – — II Calcul différentiel et équations différentielles – **1 ex.** –	Hermann
SCHWARTZ L.	Cours d'Analyse — Tome 1 – **2 ex.** – — Tome 2 – **3 ex.** –	Hermann
SCHWARTZ L.	Méthodes Mathématiques pour les sciences physiques – **1 ex.** –	Hermann
SEDGEWICK R.	Algorithms – **1 ex.** –	Addison Wesley
SEDGEWICK R.	Algorithmes en Java – **1 ex.** –	Pearson Education
SEDGEWICK R.	Algorithmes en langage C – **2 ex.** –	Dunod
SEGUINS PAZZIS (de) C.	Invitation aux formes quadratiques – **1 ex.** –	Calvage et Mounet
SELBERHERR S. **STIPPEL H.** **STRASSER E.**	Simulation of semi-conductor devices and processes – **1 ex.** –	Springer
SERRE D.	Les matrices, théorie et pratique – **3 ex.** –	Dunod
SERRE J.P.	Cours d'arithmétique – **3 ex.** –	PUF
SHAPIRO H.N.	Introduction to the theory of numbers – **1 ex.** –	Dover
SIDLER J.C.	Géométrie Projective – **1 ex.** –	Dunod
SILVESTER J. R.	Geometry, ancient and modern – **1 ex.** –	Oxford Univ. Press
SIPSER M.	Introduction to the theory of computation – **1 ex.** –	Thomson C. T.
SKANDALIS G.	Topologie et analyse – **1 ex.** –	Dunod

SKANDALIS G.	Agrégation interne : Algèbre générale, algèbre linéaire et un peu de géométrie – **2 ex.** –	Calvage & Mounet
STANLEY R.P.	Enumerative combinatorics Volume I – **2 ex.** –	Waddworth and Brooks
STEIN E.	Functional Analysis – **2 ex.** –	Princeton
STEIN E.	Complex Analysis – **2 ex.** –	Princeton
STEIN E.	Fourier Analysis – **2 ex.** –	Princeton
STEIN E.	Real Analysis – **2 ex.** –	Princeton
STEWART I.	Galois theory – **2 ex.** –	Chapman and Hall
STROUSTRUP B	Le langage C++ – **1 ex.** –	Pearson Education
SZPIRGLAS A.	Exercices d'algèbre – **1 ex.** –	Cassini
SZPIRGLAS A. *et al.*	Mathématiques : Algèbre L3 – **1 ex.** –	Pearson
TAUVEL P.	Cours de Géométrie – **1 ex.** –	Dunod
TAUVEL P.	Cours d'algèbre – **1 ex.** –	Dunod
TAUVEL P.	Corps commutatifs et théorie de Galois – **1 ex.** –	Calvage et Mounet
TAUVEL P.	Mathématiques générales pour l'agrégation – **1 ex.** –	Masson
TAUVEL P.	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Algèbre 2 – **2 ex.** –	Masson
TAUVEL P.	Analyse complexe pour la licence – **2 ex.** –	Dunod

TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres T 1 – **1 ex.** –	S. M. F.
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres – **2 ex.** –	Belin
TENENBAUM G. **MENDÈS-FRANCE M.**	Les nombres premiers – **2 ex.** –	Que sais-je ? PUF
TENENBAUM G. **WU J.**	Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres T 2 – **1 ex.** –	S. M. F.
TESTARD F.	Analyse mathématique – **3 ex.** –	Calvage et Mounet
TEYTAUD O. **ANTONINI C.** **BORGNAT P.** **CHATEAU A.** **LEBEAU E.**	Les maths pour l'agreg – **1 ex.** –	Dunod
TISSERON C.	Géométries affine, projective et euclidienne – **1 ex.** –	Hermann
TISSIER A.	Mathématiques générales : exercices avec solutions – **4 ex.** –	Bréal
TITCHMARSH E.C.	The theory of functions – **2 ex.** –	Oxford Univ. Press
TORTRAT A.	Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires – **1 ex.** –	Masson
TRIGNAN J.	Constructions géométriques et courbes remarquables – **1 ex.** –	Vuibert
TURING A. **GIRARD J. Y.**	La Machine de Turing – **1 ex.** –	Seuil
ULMER F.	Théorie des groupes – **2 ex.** –	Ellipses
VALIRON G.	Cours d'analyse mathématique — I Théorie des fonctions – **2 ex.** – — II Équations fonctionnelles - Applications – **2 ex.** –	Masson

VAUTHIER J. **PRAT J-J.**	Cours d'Analyse Mathématique de l'Agrégation – **3 ex.** –	Masson
VAZIRANI V.V.	Algorithmes d'approximation – **1 ex.** –	Springer
VERGNAUD D.	Exercices et problèmes de cryptographie – **2 ex.** –	Dunod
VINBERG E. B.	A course in algebra – **1 ex.** –	AMS
WAGSCHAL C.	Fonctions holomorphes - Équations différentielles – **1 ex.** –	Hermann
WAGSCHAL C.	Topologie et analyse fonctionnelle – **1 ex.** –	Hermann
WAGSCHAL C.	Distributions, analyse microlocale, équations aux dérivées partielles – **2 ex.** –	Hermann
WARIN B.	L'algorithmique, votre passeport informatique pour la programmation – **1 ex.** –	Ellipses
WARUSFEL A.	Structures algébriques finies – **2 ex.** –	Classiques Hachette
WARUSFEL A. **ATTALI P.** **COLLET M.** **GAUTIER C.** **NICOLAS S.**	Mathématiques — Analyse – **1 ex.** – — Arithmétique – **1 ex.** – — Géométrie – **1 ex.** – — Probabilités – **1 ex.** –	Vuibert
WATERMAN M.S.	Introduction to computational biology – **1 ex.** –	Chapman and hall / CRC
WEST D. B.	Introduction to graph theory – **1 ex.** –	Prentice Hell
WHITTAKER E.T. **WATSON G.N.**	A course of modern analysis – **3 ex.** –	Cambridge
WILF H.	Generatingfunctionology – **1 ex.** –	Academic Press
WILF H.	Algorithms and complexity – **1 ex.** –	A.K. Peters

WILLEM M.	Analyse fonctionnelle élémentaire – **2 ex.** –	Cassini
WILLEM M.	Principes d'analyse fonctionnelle – **3 ex.** –	Cassini
WINSKEL G.	The formal semantics of programming languages – **1 ex.** –	MIT Press
YALE P.B.	Geometry and Symmetry – **1 ex.** –	Dover
YGER A.	Analyse complexe – **2 ex.** –	Ellipse
YGER A. **WEIL J.-A.** *et al.*	Matématiques appliquées L3 – **1 ex.** –	Pearson
YOUNG D.M. **GREGORY R.T.**	A survey of numerical mathematics – **1 ex.** –	Dover
ZAVIDOVIQUE M.	Un max de math – **1 ex.** –	Calvage et Mounet
ZÉMOR G.	Cours de cryptographie – **3 ex.** –	Cassini
ZUILY C.	Éléments de distributions et d' équations aux dérivées partielles – **2 ex.** –	Dunod
ZUILY C. **QUEFFÉLEC H.**	Éléments d'analyse pour l'agrégation – **1 ex.** –	Masson
ZUILY C. **QUEFFÉLEC H.**	Analyse pour l'agrégation – **2 ex.** –	Dunod
ZUILY C. **QUEFFÉLEC H.**	Problèmes de distributions – **3 ex.** –	Cassini