Développement : dev asymptotique de la serie harmonique.

<u>Théorème :</u> $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$ <u>alors</u> : $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$; γ cste d'euler.

<u>preuve :</u> ① On pose $U_n = H_n - \ln(n)$; $V_n = U_n - \frac{1}{n}$

on a $U_n - V_n = \frac{1}{n} \to 0$

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq 0$

$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geqslant 0$

(car $\ln(1+x) \leq x \ \forall x > -1$)

U_n et V_n sont donc adjacente et converge vers γ ; on a $V_2 = 1 - \ln(2) > 0$ donc $\gamma > 0$. On a donc $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$

② On pose $t_n = U_n - \gamma$, $\forall n \geqslant 2$; $t_n - t_{n-1} = U_n - U_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1)$

$= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$

(on rappelle $\ln(1+u) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{u^k}{k} + o(u^n)$)

$\sum_{k=n+1}^{+\infty} (t_k - t_{k-1}) = -t_n \sim -\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ | On si $\alpha > 1$; $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

$\forall k \geqslant 2$; $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}$ (*) donc $\underbrace{\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}}_{\sim \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}}$

donc $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{2n}$ donc $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

③ $w_n = t_n - \frac{1}{2n}$ $w_n \to 0$ et $w_n - w_{n-1} = t_n - t_{n-1} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2}$

$= \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2}$

donc $w_n - w_{n-1} = \cancel{-\frac{1}{n}} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$= -\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

$= \cancel{-\frac{1}{2n^2}} - \frac{1}{3n^3} - \cancel{\frac{1}{2n}} + \cancel{\frac{1}{2n}} + \cancel{\frac{1}{2n^2}} + \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

donc $-w_n \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{6k^3} \sim \frac{1}{12n^2}$ donc $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

(*)