151

Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et Applications.

Diane Garnier-Trouillet, 11/09/19

$\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif

Def 1 : On appelle $\mathbb{K}$-espace vectoriel un ensemble E muni d'une loi interne $(+)$ et d'une loi externe $(\cdot)$ admettant $\mathbb{K}$ comme ensemble d'opérateurs et tel que :

i) $(E,+)$ groupe abélien

ii) $\forall (x,y) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$

- $\lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$. $(\lambda+\mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
- $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$. $1 \cdot x = x$

Maintenant E est un $\mathbb{K}$-ev, ses éléments sont des vecteurs.

I. Dimension d'un espace vectoriel.

1) Familles libres, génératrices et bases.

Def 2 : Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. Une combinaison linéaire des $(x_i)_{i\in I}$ est une somme $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$ et les λ_i tous nuls sauf un nombre fini.

- Une famille est génératrice de E si tous les vecteurs de E s'expriment comme combinaisons linéaires des vecteurs de $(x_i)_{i\in I}$, ie $E = \mathrm{Vect}\{(x_i)_{i\in I}\}$
- E est dit de dimension finie s'$\exists$ une famille génératrice finie dans E

Ex/Ct-ex 3 : . $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont de dimension finie.

. $\mathbb{R}[x]$ est de dimension infinie.

Def 4 : . Une famille est dite libre si $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$ $\forall i \in I$. Sinon elle est dite liée.

- Une famille finie libre et génératrice est une base

Ex 5 : . Soient $p_1, \dots, p_n$ premiers distincts, alors $(\ln p_1, \dots, \ln p_n)$ est libre sur $\mathbb{Q}$.

- $(1,0,\dots),(0,1,0,\dots)\dots$ n'est pas une base de l'ensemble des suites de réels.

Prop 6 : . Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

. Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.

Thm 7 : Soit $E \neq \{0\}$ un ev de dim $< \infty$

. De toute famille génératrice on peut extraire une base

. Toute famille libre peut être complétée en une base.

2) Propriétés sur la dimension

Thm 8 : Dans un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments

Def 9 : Ce nombre est appelé dimension de E sur $\mathbb{K}$ et noté $\dim_{\mathbb{K}} E$ ou $\dim E$.

Ex 10 : $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_n[X] = n+1$, $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$

Cor 11 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dim n.

. Toute famille ayant moins de n éléments ne peut être génératrice.

. Toute famille ayant plus de n éléments est liée.

Thm 12 : Toute famille génératrice ou libre ayant n éléments est une base.

Ex 13 : $(1, X, X(X-1), \dots, X(X-1)\cdots(X-n+1))$ base de $\mathbb{R}_n[X]$

3) Sous-espace vectoriel

Def 14 : Un sous-espace vectoriel de E est une partie non vide F de E, stable par combinaisons linéaires.

Prop 15 : Soient E ev de dim finie et F sev. Alors F est de dimension finie et : . $\dim_{\mathbb{K}} F \leq \dim_{\mathbb{K}} E$

. $\dim_{\mathbb{K}} F = \dim_{\mathbb{K}} E \Leftrightarrow E = F$

Def 16 : Soient E_1, E_2 sev de E.

. On appelle somme de E_1 et E_2 le sous-espace de E défini par $E_1+E_2 = \{x_1+x_2 \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\}$.

. Soit $E = E_1 + E_2$, on dit que E est somme directe de E_1 et E_2 si $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. On note $E = E_1 \oplus E_2$

. E_1 et E_2 sont dits supplémentaires si $E = E_1 \oplus E_2$

Prop 17 : $E = E_1 \oplus E_2 \Leftrightarrow$ pour toute base B_1 de E_1 et B_2 de E_2, $\{B_1, B_2\}$ est une base de E.

Cor 18 : Tout sev de E possède un supplémentaire. Il n'est pas unique mais, si E est de dimension finie, ils ont tous même dimension.

Thm 19 : $E = E_1 \oplus E_2 \Leftrightarrow E_1 \cap E_2 = \{0\}$ et $\dim E = \dim E_1 + \dim E_2$.

Ex 20 : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$

. Dans $\mathbb{R}^3$, soit π un plan vectoriel et v un vecteur non contenu dans ce plan. alors $\mathbb{R}^3 = \pi \oplus \mathrm{Vect}\{v\}$

Thm 21 : Formule de Grassmann

$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$.

II_ Rang

1) Rang d'une application linéaire. E' ev de dim$<\infty$

Def 22 : . Soit $f \in \mathcal{L}(E,E')$, $f(E)$ est un sous-espace de E' appelé image de f et noté $\mathrm{Im} f$.

. Sa dimension est appelée rang de f et noté $\mathrm{rg} f := \dim(\mathrm{Im} f)$

. Le noyau de f est $\ker f := \{x \in E \mid f(x) = 0\}$

prop 23 : $\ker f$ est un sev de E.

prop 24 : Soit $\{v_i\}_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.

. Si la famille est libre et f injective alors $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ est une famille libre de E'.

. Si la famille est génératrice et f surjective alors $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ est une famille génératrice de E'.

En particulier si f est bijective, l'image d'une base de E est une base de E'.

Thm 25 : Deux ev de dim finie sont isomorphes $\Leftrightarrow$ ils ont même dimension.

Thm 26 : (Du rang) $\dim E = \mathrm{rg} f + \dim \ker f$.

Cor 27 : Si $\dim E = \dim E'$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est injective
- f est surjective
- f est bijective.

Ct-ex 28 : $D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, $P \mapsto P'$ est surjective et non-inj.

2) Rang d'une matrice

Def 29 : . On appelle rang d'une famille de vecteurs la dimension de l'espace qu'ils engendrent.

. On appelle rang de $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ le rang de la famille des vecteurs colonnes de A.

prop 30 : Si A est la matrice de f dans des bases quelconques alors $\mathrm{rg} f = \mathrm{rg} A$.

prop 31 : Le rang de A est le plus grand des ordres des matrices carrées inversibles extraites de A.

Def 32 : Action de Steinitz.

$GL_m(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K}) = G$, $G \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

$((P,Q), A) \longmapsto PAQ^{-1}$

L'orbite de A est notée $G \cdot A = \{B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \exists (P,Q) \in G, B = PAQ^{-1}\}$

Thm 33 : $G \cdot A = G \cdot B \iff rg A = rg B$

Les orbites sont paramétrées par le rang, on note O_r orbite des matrices de rang r

prop 34 : $\overline{O_r} = \bigsqcup_{0 \leq k \leq r} O_k$

DEV. 1

III . Applications

1) Algorithme de Gauss.

La méthode du pivot de Gauss consiste à mettre un système sous forme échelonnée, de manière à pouvoir, en partant de la solution de la dernière équation et en remontant, résoudre toutes les équation.

Rmq 35 : La méthode matricielle est similaire.

Thm 36 : Soit $\{v_1, \dots, v_p\}$ une famille de vecteurs, A la matrice engendrée et A' une réduite échelonnée de A. Alors les lignes non nulles de A' donnent une base de $Vect\{v_1, \dots, v_p\}$.

Ex 37 : Une base du sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par $(1,1,0,-1)$, $(-1,1,1,0)$ et $(0,2,1,-1)$ est : $((1,1,0,-1), (0,2,1,-1))$.

Appli 38 : Soit $F = Vect(v_1, v_2, v_3)$ et $G = Vect(w_1, w_2)$ avec $v_1 = (1,-1,0,2)$, $v_2 = (2,1,3,1)$, $v_3 = (4,5,9,-1)$, $w_1 = (1,1,1,1)$ et $w_2 = (3,-4,4,2)$.

Une base de $F+G$ est donnée par les vecteurs $(1,-1,0,2)$, $(0,1,1,-1)$ et $(0,0,-1,1)$.

Appli 39 : Une base de $F \cap G$, avec F et G définis en appli 38, est donné par le vecteur $(8,1,9,7)$.

2) Géométrie

prop 40 : Dans le repère affine (X,Y,Z), l'équation barycentrique d'une conique est :

$aX^2 + bY^2 + cZ^2 + 2a'YZ + 2b'ZX + 2c'XY = 0$

Appli 41 : Par cinq points distincts A,B,C,D,E dont quatre quelconques ne sont pas alignés passe une unique conique.

DEV. 2

Appli 42 : La conique est non-dégénérée $\iff$ trois points quelconques parmi les cinq donnés sont non-alignés.

Refs : Grifone ; H2G2 ; Eiden.