DEVELOPPEMENT Gln(𝕂) DENSE OUVERT
Gln(ℂ) CONNEXE PAR ARCS

Soit n un entier naturel et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On rappelle que $Gl_n(\mathbb{K})$ est muni de la topologie normique de l'espace vectoriel des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$Gl_n(\mathbb{K})$ est dense et ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$Gl_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs

PREUVE : • Montrons que $Gl_n(\mathbb{K})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application déterminant de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ est continue car polynomiale en les coefficients des matrices. Or $Gl_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K}^*)$ avec $\mathbb{K}^*$ ouvert. Donc $Gl_n(\mathbb{K})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

• Montrons que $Gl_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour cela, montrons d'abord la chose suivante :

$\overline{O_r} = \bigcup_{0 \leq k \leq r} O_k$ où O_k est l'orbite des matrices de rang k pour l'action de Steinitz

* $\overline{O_r} \subset \bigcup_{0 \leq k \leq r} O_k$

On a $O_r \subset \bigcup_{0 \leq k \leq r} O_k$ donc $\overline{O_r} \subset \overline{\bigcup_{0 \leq k \leq r} O_k}$

Or $\bigcup_{0 \leq k \leq r} O_k$ est fermé. En effet, posons

$$f_k : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$A \longmapsto \sum_{|I|,|J|=k} |\Delta_{I,J}|$$

où $|\Delta_{I,J}|$ est un mineur de A de taille $|I| \times |J|$ (où $I, J \subset \mathbb{N}$)

On a $f_k(A) = 0 \iff \operatorname{rg} A < k$

en effet : • $f_k(A) = 0 \Rightarrow \forall I, J \; |I|,|J| = k \; |\Delta_{I,J}| = 0$

et donc $\operatorname{rg} A < k$ car le rg de A est la taille maximale d'un mineur non nul de A

• $\operatorname{rg} A < k \Rightarrow \forall I, J \; |I|,|J| = k \; |\Delta_{I,J}| = 0$

et donc $f_k(A) = 0$

On a donc $f_{r+1}(A) = 0 \iff \operatorname{rg} A \leq r$

Ainsi $\bigcup_{0 \leq k \leq r} O_k = f_{r+1}^{-1}(\{0\})$. Or f_{r+1} est continue car polynomiale en les coordonnées de A.

Donc $\bigcup_{0 \leq k \leq r} O_k$ est fermé. D'où $\overline{\bigcup_{0 \leq k \leq r} O_k} = \bigcup_{0 \leq k \leq r} O_k$

* $\bigcup_{0 \leq k \leq r} O_k \subset \overline{O_r}$. Soit $A \subset \bigcup_{0\leq k \leq r} O_k$. Montrons qu'il existe $(A_n)_n \subset O_r$ telle que $A_n \xrightarrow{n\to\infty} A$. Soit $k \leq r$ tq $\operatorname{rg} A = k$

Alors $\exists P, Q \in Gl_n(\mathbb{K})$ tels que $A = P\begin{pmatrix} \underbrace{1 \cdots 1}_{k} 0_0 \end{pmatrix} Q^{-1}$

Posons $A_n = P\begin{pmatrix} \underbrace{\underbrace{1 \cdots 1}_{k} \, 1/n \cdots 1/n}_{r} \, 0 \cdots 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$.

On a bien $\operatorname{rg} A_n = r$ et $\lim_{n\to\infty} A_n = A$

Ainsi on a $\overline{O_r} = \bigcup_{0\leq k \leq r} O_k$

Enfin, on a

$$Gl_n(\mathbb{K}) = O_n$$

$$\text{et donc } \overline{Gl_n(\mathbb{K})} = \bigcup_{0 \leq k \leq n} O_k = \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

- Maintenant, montrons que $Gl_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs. Soient $A, B \in Gl_n(\mathbb{C})$. Construisons un chemin dans $Gl_n(\mathbb{C})$ qui relie A et B.

* Posons $P : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$
$$t \longmapsto \det((1-t)A + tB)$$

P est polynomiale en t donc continue. De plus, $P(0) = \det A \neq 0$ car $A \in Gl_n(\mathbb{C})$ donc P n'est pas identiquement nulle. Étant non nulle, elle possède un nombre fini de zéros dans $\mathbb{C}$. On peut donc tracer dans $\mathbb{C}$ un chemin γ reliant 0 à 1 qui évite les zéros de P

Soit α la racine de P telle que sa partie imaginaire $\operatorname{Im}(\alpha)$ soit minimale non nulle (ce qui est possible par finitude de l'ensemble des zéros) ; on posera $\alpha = i$ si toutes les racines de P sont réelles.

Ainsi le chemin

$$\gamma(t) = \begin{cases} t + it\operatorname{Im}(\alpha) & \text{si } t \in [0, \tfrac{1}{2}] \\ t + i(1-t)\operatorname{Im}(\alpha) & \text{si } t \in [\tfrac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

convient. En effet, $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(1) = 1$. De plus, $t=0$ et 1 n'annulent pas P (car $A, B \in Gl_n(\mathbb{C})$), et pour tout $t \in]0,1[$ $\gamma(t)$ ne peut pas être une racine de P car on a $0 < \operatorname{Im}(\gamma(t)) \leq \frac{1}{2}\operatorname{Im}(\alpha) < \operatorname{Im}\alpha$ (si $\gamma(t)$ était une racine de P pour un certain t, il y aurait contradiction avec la définition de α).

* Construisons le chemin dans $Gl_n(\mathbb{C})$. Soit
$$\Gamma : [0,1] \longrightarrow Gl_n(\mathbb{C})$$
$$t \longmapsto (1-\gamma(t))A + \gamma(t)B$$

Γ est continue car γ l'est. Par construction, on a bien $\operatorname{Im}(\Gamma) \subset Gl_n(\mathbb{C})$ car $\forall t \in [0,1]$ $\det((1-\gamma(t))A + \gamma(t)B) \neq 0$

On a donc construit un chemin continu reliant A à B dans $Gl_n(\mathbb{C})$.