Développement 2 : **Leçon n°** 153

Réf : Lavidouique / Un max de maths

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ Alors $\exists P \in \mathbb{C}[X]$ tq $A = \exp(P(A))$.
En particulier, la fonction $\exp$ $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective

ÉTAPE 1 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Mq $\exp(A) \in \mathbb{C}[A]$.

L'ensemble $\mathbb{C}[A]$ est un sous-ensemble vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Il est donc fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Or la matrice $\exp(A) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k$ est une limite de polynômes en A, donc élément de $\mathbb{C}[A]$. On en déduit que $\exp(A) \in \mathbb{C}[A]$.

ÉTAPE 2 : Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

On note $\mathcal{C} = \mathbb{C}[C] \cap GL_n(\mathbb{C})$

Mq l'exponentielle réalise un morphisme du gpe additif $\mathbb{C}[C]$ dans le gpe multiplicatif $\mathcal{C}$.

On considère l'application : $\varphi : (\mathbb{C}[C], +) \to (\mathcal{C}, \times)$, $X \mapsto \exp(X)$

Cette app est :

- bien df : $\exp(X) \in GL_n(\mathbb{C})$ + étape 1
- morphisme : - si $M \in \mathcal{C}$, alors son inverse dans $GL_n(\mathbb{C})$ est un polynôme en M, donc un polynôme en C, en d'autres termes $M^{-1} \in \mathcal{C}$
  - L'ensemble $\mathbb{C}[C]$ est une sous algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, en effet il est stable par produit et 2 poly en C commutent tjs. On peut donc appliquer la formule :

$\forall (A,B) \in \mathbb{C}[C]^2$, $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$

$\Rightarrow \varphi$ est bien un morphisme.

ÉTAPE 3 : Mq $\mathcal{C}$ est un ouvert connexe de $\mathbb{C}[C]$.

- $\mathcal{C}$ ouvert : $\mathcal{C}$ est l'intersection de $\mathbb{C}[C]$ avec l'ouvert $\det^{-1}(\mathbb{R}^*) = GL_n(\mathbb{C}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
- $\mathcal{C}$ connexe : On va mq $\mathcal{C}$ est connexe par arcs.

Soit M et N 2 matrices de $\mathcal{C}$

- la droite affine complexe df par $z \mapsto M(z) = zM + (1-z)M$, $z \in \mathbb{C}$ est contenue dans $\mathbb{C}[C]$
- $P(z) = \det(zM + (1-z)N)$ est un poly non nul (car $P(0) = \det N \neq 0$)

$\to$ Il possède dc un nb fini de racines (On appelle cet ensemble $\mathcal{Z}$)

$\mathbb{C} \setminus \mathcal{Z}$ est connexe par arcs et contient 0 et 1 donc il existe un chemin γ reliant 0 à 1 dans $\mathbb{C} \setminus \mathcal{Z}$. Le chemin $\gamma(t)M + (1-\gamma(t))N$ relie alors N à M ds $\mathcal{C}$

ETAPE 4 : Mq $\exp(\mathbb{C}[c])$ contient un voisinage de I_n dans $\mathcal{C}$ et en déduire que $\exp(\mathbb{C}[c])$ est ouvert dans $\mathcal{C}$:

- - φ est de classe C^1 car $\exp(X)$ l'est
  - la différentielle en 0 de φ est l'identité qui est bijective
  - $\mathcal{C}$ ouvert

Donc d'après le thm d'inversion locale, φ réalise un C^1-difféomorphisme entre un voisinage U de 0 dans $\mathbb{C}[c]$ et un voisinage V de I_n dans $\mathcal{C}$.
En particulier $V = \exp(U) \subset \exp(\mathbb{C}[c])$

- On va mq $\exp(\mathbb{C}[c])$ contient un voisinage de chacun de ses points :

Soit $A \in \mathbb{C}[c]$.
On a : $\exp(A+U) = \exp(A)\exp(U) = \exp(A)V$
Or comme $\exp(A)$ inv, la multiplicat° par cette matrice est un difféo donc continue.
Ainsi, $\exp(A)V$ est un ouvert et dc un voisinage de $\exp(A)$
$\Rightarrow \exp(\mathbb{C}[c])$ est un ouvert de $\mathcal{C}$.

ÉTAPE 5 : Conclure que $\exp(\mathbb{C}[c]) = \mathcal{C}$:

Comme $\mathcal{C}$ est connexe et $\mathbb{C}[c]$ non vide, il suffit de mq $\exp(\mathbb{C}[c])$ est fermé

On a : $\mathcal{C} \setminus \exp(\mathbb{C}[c]) = \bigcup_{A \in \mathcal{C} \setminus \exp(\mathbb{C}[c])} A \exp(\mathbb{C}[c])$

$\exp(\mathbb{C}[c])$ est donc fermé puisque $A\exp(\mathbb{C}[c])$ est ouvert.

BILAN : On a donc mq φ est surjective $\Leftrightarrow \forall A \in GL_n(\mathbb{C})$ $\exists P \in \mathbb{C}[X]$ tq $A = \exp(P(A))$
d'où la surjectivité de $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$