Ministère de la Jeunesse, de l'Éducation Nationale et de la Recherche

Direction des Personnels Enseignants

Rapport de Jury de Concours

Agrégation

Mathématiques

Concours Externe

Session 2003

"LES RAPPORTS DES JURYS DES CONCOURS SONT ETABLIS SOUS LA RESPONSABILITE DES PRESIDENTS DE JURY"

Composition du Jury

LICHNEWSKY Alain, Président	Professeur des Universités
FOULON Patrick, Vice-Président	Professeur des Universités
MARCHAL Jeannette, Vice-Présidente	Inspecteur Général
MOISAN Jacques, Vice-Président	Inspecteur Général
SKANDALIS Georges, Vice-Président	Professeur des Universités
AIRAULT Hélène	Professeur des Universités
ANGO NZE Patrick	Maître de Conférences
APPARICIO Carine	Professeur de Spéciales
BARDET Jean Marc	Maître de Conférences
BASTIN Chantal	Professeur de Spéciales
BECKER Marc	Professeur de Spéciales
BELABAS Karim	Maître de Conférences
BENNEQUIN Daniel	Professeur des Universités
BIDAUD Geneviève	Professeur de Spéciales
BOISSON François	Professeur de Spéciales
BOREL Agnès	Professeur de Spéciales
BOUGÉ Luc	Professeur des Universités
BOYER Pascal	Maître de Conférences
BURBAN Anne	Professeur de Spéciales
CABANE Robert	Professeur de Spéciales
CHAMBERT-LOIR Antoine	Professeur Associé à l'Ecole Polytechnique
CHEVALLIER Marie-Elisabeth	Professeur de Spéciales
CHILLES Alain	Professeur de Spéciales
CHOIMET Denis	Professeur de Spéciales
COMTE Myriam	Maître de Conférences
CORTELLA Anne	Maître de Conférences
COUGNARD Jean	Professeur des Universités
DELEBECQUE François	Directeur de Recherches INRIA
DELEZOIDE Pierre	Professeur de Spéciales
DEVIE Hervé	Professeur de Spéciales
DIEBOLT Jean	Directeur de Recherches
DJADLI Zindine	Maître de Conférences
DUBOIS Philippe	Professeur des Universités
FAYOLLE Guy	Directeur de Recherches INRIA
FERNANDEZ Catherine	Professeur de Spéciales
FORT Jean Claude	Professeur des Universités
FROSSARD – FEAUX DE LACROIX Emmanuelle	Maître de Conférences
GAMBOA Fabrice	Professeur des Universités
GAUSSIER Hervé	Maître de Conférences
GEOFFRE Rosemarie	Professeur de Spéciales
GERBEAU Jean Frédéric	Chargé de Recherches INRIA
HARARI David	Chargé de Recherches CNRS
HARINCK Pascale	Chargée de Recherches CNRS
HENNIART Guy	Professeur des Universités

HIJAZI Oussama	Professeur des Universités
HOFFMANN Marc	Maître de Conférences
KOSELEFF Pierre-Vincent	Maître de Conférences
KOURKOVA Irina	Maître de Conférences
LABBÉ Stéphane	Maître de Conférences
LACHAND-ROBERT Thomas	Professeur des Universités
LATRÉMOLIÈRE Evelyne	Professeur de Spéciales
LE DRET Hervé	Professeur des Universités
LEBRIGAND Dominique	Maître de Conférences
LECCIA Jean Charles	Professeur de Spéciales
LÉONARD Christian	Professeur des Universités
LODS Véronique	Professeur des Universités
LOUBES Jean Michel	Chargé de Recherches CNRS
MAILLOT Vincent	Chargé de Recherches CNRS
MARTINEAU Catherine	Professeur de Spéciales
MATIGNON Michel	Professeur des Universités
MAURY Bertrand	Professeur des Universités
MERLEVEDE CASTANO Florence	Maître de Conférences
MESTRE Jean François	Professeur des Universités
MEZARD Ariane	Maître de Conférences
MICLO Laurent	Professeur des Universités
MIQUEL Anne	Professeur de Spéciales
MNEIMNÉ Rached	Maître de Conférences
MORVAN Michel	Professeur des Universités
NIVOCHE Stephanie	Maître de Conférences
PAGES Martine	Professeur de Spéciales
PATRAS Frédéric	Chargé de Recherches CNRS
PETAZZONI Bruno	Professeur de Spéciales
PIETRUS Alain	Professeur des Universités
PRIEUR Clémentine	Maître de Conférences
PRIGENT Jean-Luc	Maître de Conférences
QUEFFÉLEC Hervé	Professeur des Universités
RIGNY Agnès	Professeur de Spéciales
SAADA Ellen	Chargée de Recherches
SABOT Christophe	Chargé de Recherches
SARAMITO Bernard	Professeur des Universités
SAUZIN David	Chargé de Recherches CNRS
SOULIER Philippe	Maître de Conférences
SZPIRGLAS Aviva	Professeur des Universités IUFM
TAIEB Frank	Professeur de Spéciales
TCHOU Nicoletta	Maître de Conférences
TILOUINE Jacques	Professeur des Universités
TOROSSIAN Charles	Chargé de Recherches CNRS
VARJABÉDIAN Serge	Professeur de Spéciales
VAUGELADE Elisabeth	Maître de Conférences
VEERAVALLI Alain	Maître de Conférences
VINCENT Christiane	Professeur de Spéciales
WAGSCHAL Claude	Professeur des Universités
WATBLED Frederique	Maître de Conférences
YCART Bernard	Professeur des Universités
YGER Alain	Professeur des Universités

Présentation du Concours

Déroulement de la Session de 2003

La session de 2003 s'est déroulée selon le calendrier suivant:

ECRIT

Composition de Mathématiques Générales Mardi 8 Avril de 9h à 15h
Composition d' Analyse et Probabilités Mercredi 9 Avril de 9h à 15h

La liste d'admissibilité a été affichée le Mardi 3 Juin à la DPE, 34 rue de Châteaudun, 75009 Paris, et simultanément sur Minitel. A partir du 10 Juin, les candidats ont pu consulter les détails de leurs convocations sur le site internet du jury ; cette mesure a permis d'éviter les difficultés dues aux irrégularités du service postal.

ORAL

L'oral s'est déroulé du lundi 23 juin au mercredi 16 juillet dans les locaux de l'Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay. La liste d'admission a été affichée le lundi 21 juillet à la DPE, et sur Minitel.

Le concours

Le concours d'agrégation externe est un concours de recrutement d'enseignants qui sont destinés, suivant leurs talents et leur intérêt, à occuper des fonctions dans l'enseignement du second degré, les classes préparatoires aux grandes écoles (CPGE), l'enseignement supérieur. Les candidats admis se voient proposer des stages probatoires et de formation en IUFM dès la rentrée scolaire qui suit le concours. Ces stages peuvent comporter des périodes d'exercice dans les classes du second degré. Des reports de stage peuvent être accordés par la DPE pour permettre aux lauréats d'effectuer des études doctorales ou des travaux de recherche dans un établissement ou organisme public français ([1]); les élèves des Ecoles Normales Supérieures en bénéficient également pour terminer leur période de scolarité.

Le concours s'adresse à des candidats titulaires d'une Maîtrise, à l'intention desquels des formations complémentaires spécifiques de préparation au concours sont organisées dans les universités. La principale originalité de l'agrégation externe est de sanctionner une formation généraliste en mathématiques de niveau BAC+4. Ceci correspond aux besoins des formations d'enseignement auxquelles les agrégés participent et leur permet de s'adapter durant leur carrière aux évolutions scientifiques et pédagogiques.

Le programme, la nature des épreuves écrites et orales, font l'objet de publications au Bulletin Officiel du Ministère de l'Éducation Nationale (B.O.), et leur actualisation peut être consultée sous forme électronique Internet à travers l'URL "http://www.education.gouv.fr/siac/siac2/default.htm". La référence principale pour le programme en vigueur pour la session 2003 est le B.O. N°8 du 24 Mai 2001. Le rapport du jury explique en détail les attentes du jury pour les diverses épreuves. On trouve également des informations en provenance du jury et concernant les sessions futures à l'adresse Internet "http://www.education.gouv.fr/siac/siac2/informations.htm. Les publications sur l'Internet

[1] On se doit d'insister sur le fait que l'administration exige une attestation de poursuite de recherches, ou à défaut une autorisation à s'inscrire dans une formation de troisième cycle universitaire. En cas de succès, l'examen des dossiers se fait immédiatement à l'issue du concours, et on conseille donc aux candidats de se munir des attestations requises avant le début des congés universitaires.

actualisent les indications sur l'organisation matérielle du concours. Le jury utilise également cette diffusion pour des précisions supplémentaires; ceci concilie la flexibilité et l'impératif d'égale information de tous les candidats.

Les critères essentiels d'appréciation des candidats par le jury sont:

1. La solidité des connaissances et compétences mathématiques.
2. La capacité de fournir des démonstrations pertinentes, complètes, bien structurées et claires.
3. Les aptitudes pédagogiques et d'expression, surtout testées lors des épreuves orales, mais qui peuvent également apparaître dans l'expression écrite de la solution des problèmes.
4. La capacité à donner des applications convaincantes des théories et techniques mathématiques. Les deux épreuves orales Algèbre et Analyse se prêtent à des illustrations dans le cadre mathématique. L'épreuve de Modélisation suggère de s'intéresser aux modèles mathématiques intervenant dans les grandes disciplines scientifiques.

Les modalités d'interrogation sont précisées ci-après dans le paragraphe consacré à l'organisation des épreuves orales. Elles sont formalisées et structurées pour que les candidats puissent se préparer, effectuer efficacement leur prestation et être à l'aise dans leur interaction avec le jury.

Les rapports détaillés concernant les diverses épreuves précisent les attentes du jury et donnent des conseils permettant la mise en valeur des compétences et de la motivation des candidats.

Commentaire et observations

Lors de ses délibérations, le jury a décidé de pourvoir 354 des 360 postes disponibles et de fixer un seuil d'admission de 08,25/20. Un candidat a également été déclaré admis à titre étranger.

Le jury déplore que la prestation orale de candidats recalés ait souvent mis en évidence une compréhension insuffisante de notions réputées parfaitement acquises en licence de mathématiques.

L'évolution du nombre des inscrits fait apparaître une décroissance régulière et préoccupante du nombre des candidats. En résumé, le nombre d'inscrits a baissé de 22,9% depuis 2000, tandis que le nombre de candidats qui ont composé a baissé de 23 % depuis 2000.

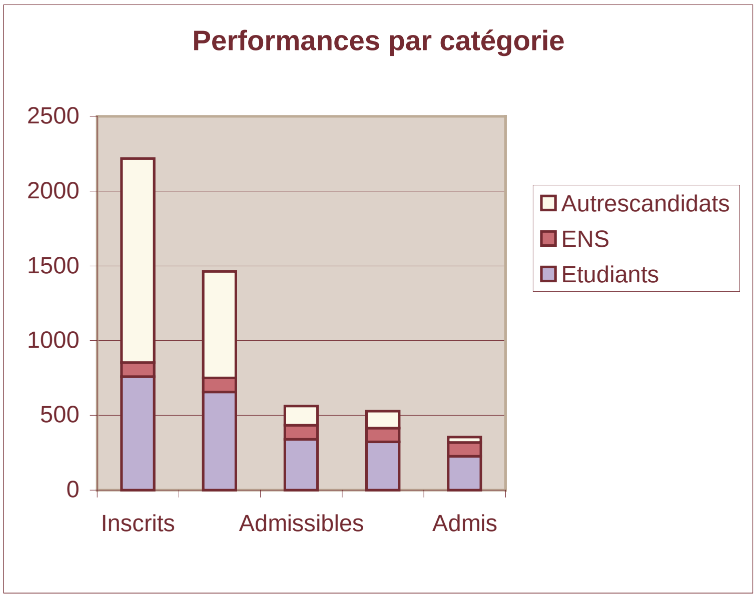
Le fait de distinguer les étudiants inscrits dans une préparation universitaire[2], des élèves des Ecoles Normales Supérieures et du reste des inscrits semble pertinent pour l'analyse des statistiques. Le segment « Étudiants »([3]) est la source numériquement la plus importante de recrutement d'agrégés, représentant cette année 86% des admis en dehors des normaliens. L'évolution du nombre d'étudiants présents à l'écrit, indique une décroissance de 48,4% depuis 1998. **Depuis l'an dernier, la réduction des effectifs inscrits et présents touche essentiellement ce segment. <u>La décroissance numérique de ce vivier de recrutement est très inquiétante en regard des besoins de recrutement affichés par l'enseignement du second degré.</u>** Dans ce segment, on note avec satisfaction la stabilité du nombre de femmes qui se sont présentées aux épreuves écrites, ainsi que leur performance.

[2] Selon les informations des fichiers informatiques nominatifs de la DPE
[3] qui contient également les nouveaux certifiés ayant obtenu un report de stage pour préparer l'agrégation

Evolution du nombre de candidats

Evolution du nombre de candidats inscrits
et présents aux deux épreuves écrites

Année	Total Inscrits	Total Présents	Etudiants Présents	ENS Présents	Autres Présents	Postes à pourvoir
1998			1274			
1999		**1920**	1128			369
2000	**2875**	**1900**	970			300
2001	**2663**	**1828**	857	105	866	310
2002	**2343**	**1584**	753	95	736	320
2003	**2217**	**1463**	657	93	713	360



Comme indiqué ci-dessus, les performances statistiques et qualitatives du segment « Étudiants » sont intéressantes. Les formations initiales et les préparations à l'agrégation sont efficaces et offrent des débouchés intéressants à leurs étudiants. Les taux de succès sont encourageants.

Ces éléments statistiques corroborent les impressions générales du jury, qui a constaté au cours des trois années passées la bonne préparation d'une majorité des candidats admissibles et l'adaptation rapide aux nouvelles modalités d'examen oral. La poursuite et le renforcement d'une politique confortant les préparations universitaires nous semblent des voies efficaces. C'est, à notre avis, le principal moyen d'organiser efficacement la préparation des étudiants intéressés par l'enseignement des mathématiques.

L'évolution du segment des candidates est encourageante : d'une part la décroissance numérique est moindre que l'évolution générale, d'autre part le groupe des candidates a amélioré sa performance de manière sensible par rapport aux années précédentes. Il importe de poursuivre les efforts de communication entrepris pour informer les candidates de leur potentiel, les encourager et les aider à surmonter les inhibitions culturelles.

L'évolution de l'épreuve orale de modélisation dans le sens d'une épreuve basée sur l'étude d'un texte de modélisation fait maintenant l'objet d'une proposition du jury pour la session 2005. Les cinq sessions passées ont montré un réel progrès des candidats dans la prise en compte des textes. L'objectif est d'inciter au développement de qualités essentielles au plan professionnel : autonomie, initiative, ouverture aux autres disciplines. Ceci doit préparer les candidats aux nouvelles modalités d'enseignement ouvertes à une culture scientifique transdisciplinaire et à l'introduction d'outils logiciels dans une pédagogie active. Pour la session 2004, le programme, les modalités d'interrogations et les thèmes de l'épreuve de modélisation seront identiques à celles de cette année.

Statistiques sur la Session de 2003

Vue d'ensemble

Le nombre de postes mis au concours était de 360. Sur 2217 inscrits, 1462 ont participé aux deux épreuves écrites. Ont été déclarés admissibles 565 candidats, auxquels il faut ajouter 46 candidats admissibles aux agrégations marocaine (28) et tunisienne (18). Conformément à des accords internationaux avec le Maroc et la Tunisie, ces derniers se présentent aux épreuves écrites et sont déclarés admissibles dans les mêmes conditions que les candidats français et européens. Ils subissent les épreuves orales devant des jurys de leur nationalité et ne figurent pas dans les statistiques d'admissibilité et d'admission du concours français.

Le nombre des admis a été de 355, dont un candidat admis à titre étranger, alors que 360 postes étaient disponibles. Le premier admissible avait une moyenne de 20 sur 20, le dernier une moyenne de 07 sur 20. Le premier admis obtient une moyenne de 19,20 sur 20, le dernier de 08,25 sur 20. Les femmes candidates constituaient 34% des inscrits, 31% des admissibles et 34% des admis.

Les ENS ont inscrit 94 candidats, 93 ont été déclarés admissibles et 92 reçus.

Résultats par Académie

La table ci-après détaille les résultats par Académie. Nous avons distingué les candidats normaliens des autres, afin de traduire plus fidèlement le résultat des académies de Paris, Lyon et Rennes. Nous avons également exclu des statistiques les étudiants inscrits au titre des concours Marocain et Tunisien, dont l'affectation par Académie est sans objet.

	Inscrits	Présents écrit	Admissibles	Admis
AIX-MARSEILLE	112	80	29	17
AMIENS	52	31	8	3
BESANCON	29	21	13	10
BORDEAUX	97	67	28	16
CAEN	43	32	9	3
CLERMONT-FERRAND	21	12	6	4
CORSE	5	1		
CRETEIL-PARIS-VERSAIL., **ENS**	44	43	43	42
CRETEIL-PARIS-VERSAIL., **HORS ENS**	507	279	116	68
DIJON	32	21	6	1
GRENOBLE	77	55	22	12
GUADELOUPE	19	8	3	1
GUYANE	2	1		
LA REUNION	20	10	1	
LILLE	161	94	29	14
LIMOGES	17	10		
LYON, **ENS**	25	25	25	25
LYON, **HORS ENS**	108	82	36	27
MARTINIQUE	6	3		
MONTPELLIER	74	50	13	5
NANCY-METZ	66	49	16	8
NANTES	67	44	18	12
NICE	144	100	11	3
ORLEANS-TOURS	59	32	12	7
POITIERS	89	72	17	10
REIMS	41	29	10	6
RENNES, **ENS**	23	23	23	23
RENNES, **HORS ENS**	72	52	23	16
ROUEN	45	25	8	4
STRASBOURG	54	38	17	10
TOULOUSE	106	74	20	8

Résultats par catégorie socio-professionnelle

L'étude des résultats répartis selon les catégories socioprofessionnelles fait apparaître l'importance de la préparation des candidats. La catégorie "étudiant" bénéficie d'une préparation dans le cadre universitaire, et désigne des étudiants en formation initiale, dont certains ont obtenu un report de stage de CAPES pour préparer l'agrégation. Ces résultats indiquent que les concours d'agrégation externe et interne se différencient quant aux viviers de recrutement qu'ils permettent d'atteindre.

Résumé

	Inscrits	Présents écrit	Admissibles	Admis
Etudiants	760	657	341	226
ENS	94	93	93	92
Autres candidats	1363	713	128	37

Taux de succès par rapport aux présents aux deux écrits

Etudiants	**52%**	**34%**
ENS	100%	99%
Autres candidats	18%	5%

	Inscrits	Présents écrit	Admissibles	Admis
ADJOINT D'ENSEIGNEMENT	2			
AG NON TIT FONCT TERRITORIALE	2	1	1	
AG NON TITULAIRE FONCT PUBLIQ	4	1		
AGREGE	2			
AGRICULTEURS	1			
AIDES EDUCATEURS 2ND DEGRE	1	1		
ARTISANS / COMMERCANTS	2			
CADRES SECT PRIVE CONV COLLECT	76	24	5	1
CERTIFIE	381	190	40	12
CONTRACT ENSEIGNANT SUPERIEUR	10	6	3	1
CONTRACT MEN ADM OU TECHNIQUE	1			
CONTRACTUEL 2ND DEGRE	59	24	1	
CONTRACTUEL APPRENTISSAGE(CFA)	2			
ELEVE D'UNE ENS	94	93	93	92
ELEVE.IUFM.DE 1ERE ANNEE	172	127	17	3
ENSEIGNANT DU SUPERIEUR	46	29	1	
ENSEIG NON TIT ETAB SCOL.ETR	2	1		
ETUDIANT	**791**	**680**	**341**	**227**
FONCT STAGIAIRE FONCT PUBLIQUE	1			
FORMATEURS DANS SECTEUR PRIVE	11	4		
MAIT.OU DOCUMENT.AGREE REM MA	4	2		
MAIT.OU DOCUMENT.AGREE REM TIT	25	12	2	
MAITRE AUXILIAIRE	11	4		
MAITRE D'INTERNAT	7	5		
MAITRE OU DOCUMENT. DELEGUE	2			
MILITAIRE	1			
PERS ENSEIG NON TIT 2 DEG.AEFE	3	1		
PERS ENSEIG NON TIT FONCT PUB	3	2		
PERS ENSEIG TIT FONCT PUBLIQUE	14	7	3	
PERS FONCTION PUBLIQUE	7	2	1	1
PLP	17	7		
PROFESSEUR ASSOCIE 2ND DEGRE	2	2		
PROFESSEUR ECOLES	2	1		
PROFESSIONS LIBERALES	5	3	1	1
SALARIES SECTEUR INDUSTRIEL	13	5		
SALARIES SECTEUR TERTIAIRE	18	7	5	1
SANS EMPLOI	157	71	16	5
STAG EN SITUATION ENS SUP	3	1		
STAG EN SITUATION PROF ECOLES	1			
STAGIAIRE EN SITUATION CERTIFI	18	5	2	
STAGIAIRE EN SITUATION PLP	2	1	1	1
STAGIAIRE IUFM CERTIFIE	193	113	27	9
STAGIAIRE IUFM PLP	3	2		
STAGIAIRE IUFM PROF DES ECOLES	2			
SURVEILLANT D'EXTERNAT	5	2		
VACATAIRE DU 2ND DEGRE	9	2		
VACATAIRE ENSEIGNANT DU SUP.	10	6	2	1

Statistiques sur l'âge et le sexe des candidats

Globalement les taux de succès des hommes et des femmes sont comparables. Toutefois les femmes paraissent avoir plus de difficulté à l'écrit et plus de facilité ensuite. Pour analyser les taux de succès, nous avons préféré exclure le groupe des candidats normaliens, dans lequel 82% des candidats sont de sexe masculin. Le taux de succès à l'admission est de 19,5% pour les candidats non normaliens, avec une variation mineure suivant le sexe. Les femmes paraissent mieux préparées à l'oral et compensent leurs moindres succès à l'écrit.

Dans ces statistiques, nous n'avons pas inclus les candidats aux concours marocain et tunisien.

	Inscrits	Présents écrit	Admissibles	Admis
Global				
Homme	1337	839	389	233
Femme	746	525	173	122
Total	2083	1364	562	355
ENS				
Homme	93	91	72	72
Femme	21	21	21	20
Total	114	112	93	92
Hors ENS				
Homme	1244	748	317	161
Femme	725	504	152	102
Total	1969	1252	469	263

Pourcentage féminin

	Inscrites	Présents écrit	Admissibles	Admis
ENS	18%	19%	23%	22%
HORS ENS	37%	40%	32%	39%
Global	36%	38%	31%	34%

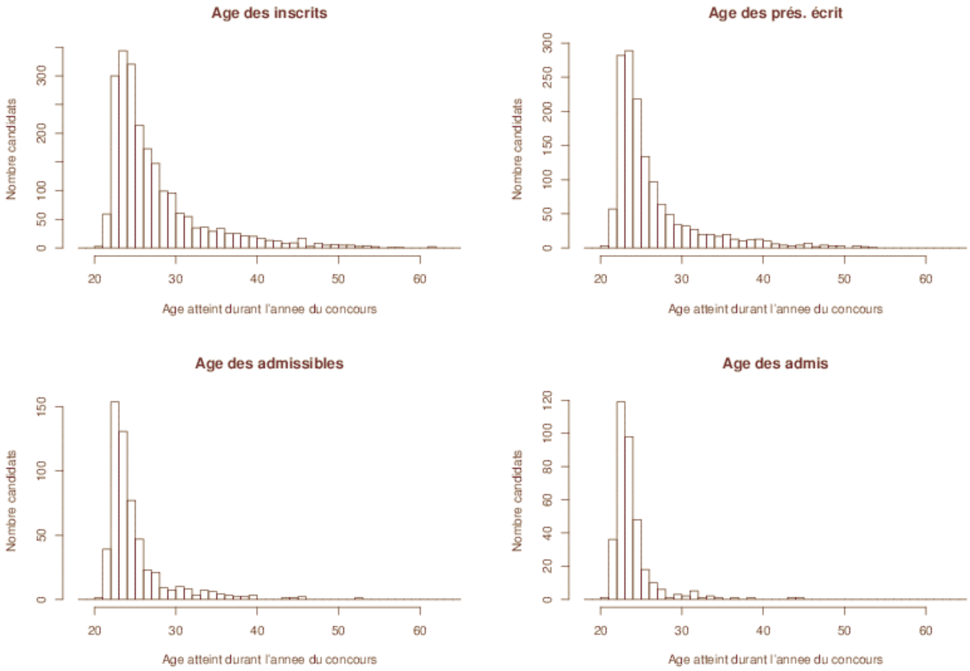
Taux succès hors ENS par rapport aux Inscrits

	Inscrits	Présents écrits	Admissibles	Admis
Homme	100,0%	60,1%	25,5%	12,9%
Femme	100,0%	69,5%	21,0%	14,1%
Total	100,0%	63,6%	23,8%	13,4%

Taux succès hors ENS par rapport aux présents 2 écrits

	Présents écrits	Admissibles	Admis
Homme	100,0%	42,4%	21,5%
Femme	100,0%	30,2%	20,2%
Total	100,0%	37,5%	21,0%

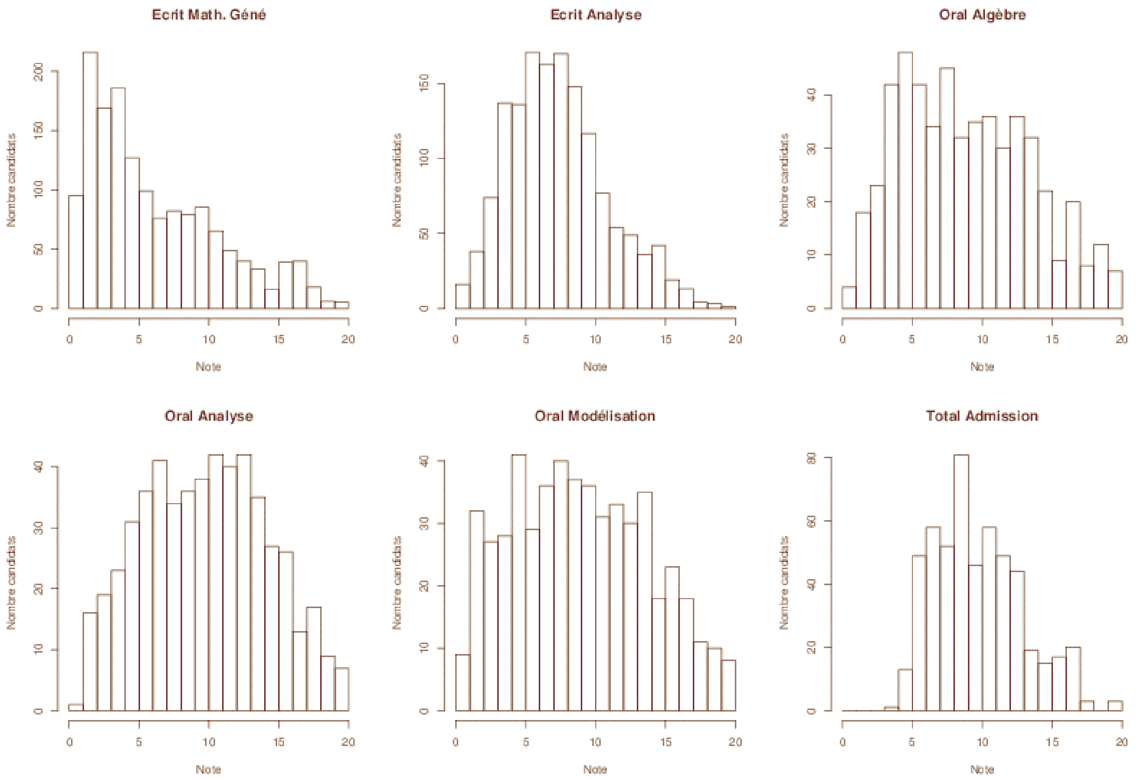
Concernant l'âge, les statistiques confirment que la grande majorité des agrégés est recrutée à l'issue de sa formation initiale.



Notes recueillies aux épreuves

La statistique des notes est un outil d'analyse important, permettant également aux futurs candidats de se situer par rapport à l'ensemble. Il nous paraît cependant utile d'indiquer ici que s'agissant d'un concours, les notes n'ont qu'une valeur relative et que les barèmes sont déterminés pour permettre des comparaisons aussi précises que possible, en particulier dans le voisinage des seuils d'admission et d'admissibilité. La valeur numérique d'une note ne doit donc pas être interprétée dans un référentiel absolu, comme dans le cas des examens scolaires et universitaires.

La répartition des notes est présentée dans les histogrammes suivants :



La répartition des notes est résumée dans la table par déciles :

	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
Ecrit Math. Générales	1.25	1.75	2.75	3.5	4.75	6.25	8.00	10.00	13.00	20.00
Ecrit Analyse	3.00	4.00	5.25	6.00	6.75	7.75	8.75	10.00	12.25	20.00
Oral Algèbre	3.10	4.25	5.50	7.00	8.25	9.75	11.25	13.00	15.00	19.75
Oral Analyse	3.75	5.35	6.75	8.25	9.50	11.00	12.25	13.75	15.50	20.00
Oral Modélisation	2.50	4.25	5.75	7.10	8.50	10.00	11.50	13.25	15.50	20.00
Total Admission	5.80	6.80	7.60	8.39	9.30	10.25	11.20	12.23	14.36	19.20

Pour l'interprétation de ces notes, nous rappelons que le seuil d'admissibilité a été fixé à 07/20 et le seuil d'admission a 08,25/20.

Organisation des épreuves orales

Les modalités sont essentiellement les mêmes depuis la session 2001 ; nous les rappelons ci-dessous in extenso pour servir de référence aux candidats des sessions à venir.

Épreuves orales d'Algèbre et Analyse

A l'issue de la période de préparation, le jury fait procéder à la photocopie des plans préparés par les candidats. Ces derniers sont manuscrits, comportent 3 pages A4 au maximum et possèdent une marge de 1cm sur tous les cotés. Les plans peuvent être complétés par des planches de figures. Le candidat peut utiliser sa copie du plan pendant l'épreuve et pourra utiliser les notes manuscrites produites durant la préparation, pendant la phase « argumentation et présentation du plan ».

Le plan écrit n'est ni une énumération de paragraphes, ni un exposé complet avec développement des démonstrations. Il définit avec précision les notions introduites, donne les énoncés complets des résultats fondamentaux, cite des exemples et des applications. Le plan doit être maîtrisé, c'est-à-dire que les résultats exposés doivent être compris ainsi que l'organisation d'ensemble. Il est souhaitable que le candidat connaisse dans leurs grandes lignes les démonstrations des résultats figurant au programme du concours : le jury pourra appliquer ce critère pour évaluer la maîtrise du plan. C'est au candidat de circonscrire son plan, notamment en ce qui concerne les énoncés débordant largement le cadre du programme, que le candidat retiendrait pour présenter une perspective d'ensemble.

L'épreuve s'organise en 3 temps, prévus pour une durée totale de 50 minutes.

Première partie: le plan

Le candidat est convié à utiliser son temps de parole, 8 minutes au maximum, pour présenter, argumenter et mettre en valeur son plan. Le plan n'est ni une énumération de paragraphes, ni un exposé complet développant les démonstrations.

Il s'agit d'une épreuve orale, il est inutile de recopier au tableau le plan, dans la mesure où le jury en possède une copie. Il est souhaitable que le candidat utilise son temps de parole pour expliquer les articulations principales de son plan. Une synthèse du plan est souhaitée. Le candidat peut faire un bref exposé introductif et devra commenter ensuite les résultats principaux, les outils développés et mettre en perspective les méthodes. Il peut être utile de consacrer du temps à un exemple pertinent qui éclaire la problématique de la leçon, à faire usage du tableau pour illustrer ses propos. La présentation et la justification orale du plan sont des points importants d'appréciation.

Les détails techniques, s'ils sont clairement écrits dans le plan, pourront ne pas être repris oralement. L'exposé doit être une synthèse maîtrisée.

S'instaure ensuite une discussion sur le plan pendant 5 à 10 minutes au maximum, que le jury pourra différer ou reprendre dans la troisième partie. Ce dialogue permet de préciser certains aspects du plan, de développer l'argumentation et de justifier les choix. On peut aborder quelques points techniques. Ce dialogue est un élément important d'appréciation pour le jury qui profitera des échanges pour s'assurer de la maîtrise des notions mises en avant.

Deuxième partie: le développement

Le candidat soumet au jury une liste de plusieurs points (2 au minimum, mais 3 sont appréciés) qu'il propose de développer. Le jury choisit parmi ces points le thème d'un exposé qui peut être soit la démonstration d'un théorème, soit la présentation d'un exemple significatif, soit le développement détaillé d'une partie délimitée du plan. La clarté de cet exposé, l'aisance et la sûreté avec lesquelles il est présenté constituent un facteur important d'appréciation.

La pertinence de tous les développements proposés, leur adéquation au sujet et leur intérêt technique sont des éléments essentiels de la notation. Le jury refusera d'avantager par son choix de développement le candidat qui a concentré sa préparation sur un seul développement substantiel et intéressant, par rapport à ceux qui ont réellement préparé les 2 ou 3 développements demandés.

Les candidats veilleront à proposer des développements qui permettent de mettre en valeur leur maîtrise technique, sans excéder leur capacité à en faire un exposé clair et complet dans le temps imparti. Les développements manifestement hors sujet ou en dessous du niveau exigible à l'agrégation sont pénalisés par le jury.

Le candidat dispose de 10 à 15 mn pour ce développement détaillé, qui doit comprendre toutes les explications nécessaires à la compréhension du jury. Le candidat peut adopter un rythme rapide, mais ne doit pas perdre sciemment son temps. On s'attend à ce que le candidat expose sans le support de ses notes (sauf exception éventuelle sur les énoncés très techniques).

L'exposé doit être complet, sans suppression d'étapes intermédiaires, ni report d'argumentation technique essentielle dans des résultats ad hoc admis. En particulier, le procédé qui consiste à admettre un « lemme préliminaire » contenant toute la difficulté de la preuve, est sanctionné. Le jury peut intervenir durant le développement pour une précision, une correction ou une justification. L'intervention éventuelle du jury ne donne pas lieu à une extension de la durée totale de l'exposé.

Au terme du développement le jury peut poser des questions sur l'exposé pour s'assurer de la compréhension du sujet abordé.

Troisième partie: questions et dialogue

L'exposé est suivi d'une discussion au cours de laquelle le jury s'assure de la solidité des connaissances du candidat sur les questions précédemment abordées (plan, exposé) ou sur tout autre point en rapport avec le sujet et figurant au programme de l'oral. Un ou plusieurs exercices peuvent être proposés par le jury.

Durant cette partie, les exercices et questions posés permettent d'évaluer les réactions et capacités techniques des candidats dans un champ vierge. Le candidat doit donc s'attendre à ce qu'un dialogue s'établisse, lui permettant de profiter de suggestions si le besoin apparaît au jury. Il peut adopter un style moins formalisé et plus interactif que dans le développement, s'appuyer sur le plan. La priorité est ici à l'élaboration des idées, à la méthode d'appréhension des problèmes mathématiques.

Globalisation du temps de dialogue avec le jury

Le jury pourra utiliser les temps réservés au dialogue avec le candidat comme il l'entend, soit en suivant verbatim les indications ci-dessus (5 minutes à la conclusion du plan, 15 minutes dans la troisième partie), soit en regroupant différemment les périodes consacrées aux questions. La notation tient compte des qualités évaluées au cours de ces dialogues et non d'une répartition stricte par période.

Épreuve orale de Modélisation

Généralités

Le jury souhaite que les aspects relatifs à la modélisation soient développés. Ceci requiert que les candidats s'exercent à associer des modèles illustratifs aux sujets de leçon et au programme de l'épreuve.

Comme les années précédentes, le programme de tronc commun doit être maîtrisé par tous les candidats. Ainsi, des textes s'appuyant sur ce programme peuvent être proposés, et le jury peut interroger sur ce programme indépendamment de l'option choisie.

L'utilisation machine est obligatoire. Ceci signifie que les candidats doivent faire usage de logiciels pour illustrer ou motiver les modèles mathématiques, présenter des solutions exactes ou approchées. La sanction de cette obligation est que l'absence ou la faiblesse d'illustration informatique est prise en compte dans l'évaluation.

Actualisation des logiciels disponibles

A partir de la session 2004, les logiciels supplémentaires suivants seront disponibles :

1. Statistiques : Logiciel « R » (sous système Unix/Linux).

2. Calcul Symbolique : Logiciel « Mathematica »

Le jury indiquera sur son site internet des informations supplémentaires sur l'accès à ces logiciels et leur configuration.

Par ailleurs, le jury se réserve la possibilité d'imposer l'usage du système Unix / Linux pour l'accès à l'un des logiciels prévus au programme (Maple, Mathematica, Matlab, Mupad, R, Scilab). Dans ce cas, le candidat disposera du logiciel prévu, seul le système d'exploitation sera imposé. Les logiciels étant largement intégrés, cette mesure ne limite pas les possibilités d'expression des candidats.

Modalités de l'épreuve orale

L'épreuve de modélisation n'est pas organisée comme celles d'Algèbre et d'Analyse. L'utilisation du temps d'exposé est plus libre pour le candidat. Les recommandations ci-après, correspondent aux attentes du jury.

- Dès le début, le candidat doit indiquer l'organisation générale de l'exposé, les illustrations informatiques prévues, séparées ou intégrées à l'exposé. Ceci est fait verbalement de façon succincte. Il convient d'indiquer, pour chaque partie de l'exposé, les démonstrations mathématiques qui ont été préparées pour être développées in extenso.

- Dans le cas d'une leçon, l'exposé sera centré sur la démarche générale, comprenant outre l'élaboration du sujet mathématique, la discussion d'une ou plusieurs applications en modélisation, et les illustrations par simulation informatique. Le développement détaillé de résultats mathématiques pourra être reporté à la fin de l'exposé, à la discrétion du jury.

  Les applications de modélisation sont choisies par le candidat, par exemple dans un thème applicatif du programme. Le jury n'exige pas la connaissance extensive de ces thèmes. Le candidat doit seulement être en mesure d'expliquer l'objet du modèle choisi dans des termes simples, en utilisant la culture générale scientifique du niveau « Terminale Scientifique ». Les résultats obtenus par l'étude mathématique seront ensuite exprimés dans les termes du modèle, en soulignant leur pertinence et leurs limitations. L'exigence vis-à-vis des aspects de modélisation est confirmée dans la notation.

Une bonne organisation du temps d'exposé consacre approximativement : 20 minutes à l'exposé initial, 20 minutes à l'approfondissement ou à la discussion détaillée du modèle et des illustrations, 20 minutes restant disponibles pour le dialogue avec le jury.

Le jury intervient librement après 15 minutes de l'exposé initial, pour demander des précisions, approfondir la discussion mathématique ou du modèle. Les illustrations informatiques sont également l'objet d'une investigation par le jury, les critères essentiels étant l'adéquation au sujet traité et la maîtrise du candidat.

- Dans le cas d'un texte, il est important que le candidat ne se contente pas d'une paraphrase du document, mais construise un exposé à partir de tout ou partie de la monographie. Cet exposé peut faire usage de notes personnelles préparées par le candidat.

  Ceci doit couvrir : l'exposé synthétique du problème de modélisation et de la démarche mathématique, le développement des outils mathématiques correspondants, la mise en œuvre des logiciels pour obtenir une information sur le modèle par simulation, le retour critique sur la pertinence du modèle et des résultats mathématiques.

  Ici aussi, les aspects non mathématiques du sujet modélisé doivent être compris en se plaçant au niveau de la culture générale scientifique d'une classe de terminale.

  Le candidat doit s'attendre à ce que 20 minutes de l'heure soient consacrées à un dialogue avec le jury. Suivant le cas, ce temps pourra être utilisé pour vérifier les connaissances du programme ayant rapport avec le texte ou pour approfondir son exploitation.

Organisation temporelle :

Afin de réserver suffisamment de temps au dialogue avec le jury il est souhaitable que les candidats prévoient les durées maximales :

- Exposé : 25 à 30 minutes
- Illustrations informatiques : 10 minutes
- Dialogue avec le jury : 15 minutes

Il ne s'agit pas de phases séquentielles, le candidat étant libre de placer les illustrations informatiques comme il le souhaite. Le jury est également susceptible de questionner le candidat après le premier quart d'heure d'exposé.

Commentaires

On se doit d'insister sur les points suivants :

- **Démarche de modélisation** : Les candidats doivent se préparer à cette épreuve en comprenant que l'on attend d'eux une démarche scientifique de modélisation mathématique. Le jury ne recherche pas une modélisation mathématique avancée faisant usage de techniques dont l'enseignement ne débute qu'en troisième cycle universitaire. Il souhaite au contraire voir les mathématiques du programme utilisées pour cette étude.

  La démarche de modélisation que nous souhaitons voir mettre en œuvre comporte : présentation d'un problème « concret », présentation ou construction d'un modèle, étude mathématique du modèle, validation et critique des résultats obtenus.

  Les candidats seront attentifs à bien distinguer la démarche de modélisation mathématique de celle de simulation sur ordinateur.

- **Technique mathématique** : Le candidat doit organiser son exposé pour qu'il comporte au moins l'énoncé et la démonstration d'un résultat mathématique. Ceci permet au jury d'évaluer la maîtrise des connaissances mathématiques. Les critères de qualité sont alors les mêmes que pour le développement dans les deux autres épreuves orales : clarté et articulation des énoncés, solidité de la preuve, précision. Une dizaine de minutes pourra utilement être consacrée à ce point.

Sessions ultérieures

Concernant l'évolution du concours, et en particulier des modalités de l'épreuve orale de modélisation, le jury a étudié de Novembre 2002 à Juin 2003 une réforme portant sur les points résumés ci-après. La proposition du jury a été transmise en Juin 2003, pour une mise en œuvre à partir de la session 2005.

A la date de finalisation de ce rapport, la suite qui sera donnée à cette proposition n'est pas connue du jury.

Résumé de la proposition :

1. Introduction d'une option « Informatique » : après un écrit identique, les trois épreuves d'oral sont modifiées pour devenir : « Mathématiques », « Informatique Fondamentale », « Analyse de Système Informatique ».

2. Différentiation de 3 options portant sur l'épreuve orale de modélisation : «A : Probabilités et Statistiques », « B : Calcul scientifique » ; « C : Algèbre et Calcul Formel ».

3. Recours exclusif à la modalité d'exposé à partir d'un texte pour l'épreuve de « Modélisation » et celle d'« Analyse de Système Informatique ».

Afin de permettre aux futurs candidats et aux préparations au concours de s'informer, le jury utilisera son site internet.

Indications concernant l'épreuve de modélisation

Les indications suivantes précisent les attentes du jury dans l'optique de **la modification de l'épreuve généralisant l'épreuve sur texte**. Cette année, le jury n'a pas renouvelé cette proposition indépendamment de la proposition décrite ci-dessus.

- **Programme de l'épreuve de modélisation**. Le rôle de ce programme est maintenant d'indiquer les connaissances requises pour cette épreuve, en sus de celles au programme des épreuves écrites. Le jury n'évalue pas ces connaissances par une interrogation directe sous la forme d'une « Leçon ». L'aptitude des candidats à les mobiliser pour exploiter un texte de modélisation mathématique est évaluée.
- **Connaissances extra mathématiques dans l'épreuve de modélisation**. Le texte ayant pour but l'étude d'un modèle mathématique intervenant dans une situation concrète, il est naturel qu'il utilise des concepts extra mathématiques de culture scientifique (Physique, biologie, économie, etc.). Les connaissances de ce type requises pour aborder l'étude des textes soumis aux candidats correspondent au baccalauréat scientifique.

- **L'épreuve sur texte.** L'épreuve sur texte n'est en aucun cas une épreuve de commentaire de texte. Il est demandé au candidat de construire un exposé pédagogique de modélisation mathématique en partant du texte. Celui-ci peut être utilisé avec une grande liberté, qui est rappelée dans l'en-tête de chaque texte.

  Pour se préparer à cette épreuve, il convient :

  - De maîtriser le programme complémentaire de l'épreuve. Celui-ci est un résumé de techniques mathématiques utilisées en modélisation.

- De s'être entraîné à l'exploitation d'un texte de modélisation mathématique simple : preuves à compléter, retrouver les résultats utilisés, test des hypothèses et des conséquences sur des situations limites,….

- D'être en mesure de montrer l'apport des mathématiques à l'étude du modèle : condition d'application effective, portée et interprétation des résultats, limitations éventuelles.

- D'apprendre à organiser un exposé pédagogique en partant d'un support : sélection des éléments utilisés, articulation, mise en perspective. Cet objectif requiert de prendre du recul par rapport au texte, de l'exploiter dans une démarche motivée très différente d'une paraphrase. Le fait que l'épreuve comporte la découverte par le candidat d'un texte nouveau et son exploitation en temps limité est pris en compte dans la confection des textes, la notation et les critères d'évaluation.

ANNEXES

Problème de Mathématiques Générales
- Énoncé
- Corrigé

Problème d'Analyse et Probabilités
- Énoncé
- Corrigé

Oral d'Algèbre et Géométrie
- Liste des Leçons

Oral d'Analyse et Probabilités
- Liste des Leçons

Oral de Modélisation - Option Calcul Scientifique
- Liste des Leçons
- Liste des Textes

Oral de Modélisation - Option Probabilités
- Liste des Leçons
- Liste des Textes

Bibliothèque de l'Agrégation

Ouvrages non autorisés pour l'Oral (Session 2003)

Pour chaque entier $n \geq 1$, on note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ le groupe des matrices carrées inversibles de taille n à coefficients dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. On note U_n le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ formé des matrices unitaires.

Le but du problème est d'étudier les sous-groupes finis de U_n et de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. La partie III propose de démontrer le résultat suivant, dû à C. Jordan : *il existe un entier $a(n)$, tel que tout sous-groupe fini G de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *possède un sous-groupe abélien distingué d'indice au plus $a(n)$ dans G.*

Les parties II.A, II.B et III sont indépendantes.

Dans le problème, n est un entier fixé ≥ 1 ; il vaut 2 dans la partie II. On désigne par V un espace vectoriel complexe de dimension n ; on note $\mathrm{End}(V)$ l'algèbre des endomorphismes de V et $\mathrm{GL}(V)$ le groupe des automorphismes de V ; on écrit gh, au lieu de $g \circ h$, le composé de deux endomorphismes g et h de V et on note Id_V l'automorphisme identité de V.

Un élément g de $\mathrm{End}(V)$ est dit *diagonalisable* s'il existe une base de V telle que la matrice de g dans cette base soit diagonale ; on dira qu'une partie X de $\mathrm{End}(V)$ est *diagonalisable* s'il existe une base de V telle que la matrice dans cette base de *tout* élément de X soit diagonale.

Une *forme hermitienne* sur V est une application $\Phi : V \times V \to \mathbb{C}$ qui est *sesquilinéaire* (linéaire *à droite*, antilinéaire *à gauche*) et vérifie $\Phi(y, x) = \overline{\Phi(x, y)}$, pour tout x, y dans V. Une telle forme est dite *définie positive* si le nombre réel $\Phi(x, x)$ est strictement positif pour tout vecteur non nul x de V. Si Φ est une forme hermitienne définie positive sur V, une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de V est dite *orthonormée pour* Φ si l'on a $\Phi(e_i, e_i) = 1$ et $\Phi(e_i, e_j) = 0$, pour tout i, j dans $\{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$; un endomorphisme g de V est dit *unitaire pour* Φ si l'on a $\Phi(g(x), g(y)) = \Phi(x, y)$ pour tout x, y dans V.

Première partie

Généralités

Comme indiqué plus haut, V désigne un espace vectoriel *complexe* de dimension finie $n \geq 1$.

I.1. Soient u et v deux éléments de $\mathrm{GL}(V)$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, posons :

$$t = vuv^{-1},\ U_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda Id_V) \text{ et } T_\lambda = \mathrm{Ker}(t - \lambda Id_V).$$

(a) Calculer T_λ en fonction de U_λ et v.

(b) On suppose que u et v commutent ; montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $v(U_\lambda) = U_\lambda$.

(c) On suppose que u et v commutent et que v est diagonalisable ; montrer que, pour toute valeur propre λ de u, v induit un endomorphisme diagonalisable de U_λ.

I.2. Prouver qu'un élément d'ordre fini de $\mathrm{GL}(V)$ est diagonalisable.

I.3. Soit X une partie de $\mathrm{End}(V)$ formée d'endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux. Montrer que X est diagonalisable. (On pourra distinguer le cas où tous les éléments de X sont des homothéties).

I.4. Il est clair d'après I.2 et I.3 qu'un sous-groupe *abélien fini* de $\mathrm{GL}(V)$ est diagonalisable. Donner, sous forme matricielle, un sous-groupe abélien infini de $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^2)$ qui ne soit pas diagonalisable.

I.5. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$. À partir d'une forme hermitienne définie positive Ψ sur V, construire une forme hermitienne définie positive Φ sur V telle que G soit formé d'endomorphimes *unitaires* pour Φ.

I.6. En déduire qu'un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est conjugué à un sous-groupe de U_n.

Désormais, V désigne un espace vectoriel *hermitien* de dimension $n \geq 1$, c'est-à-dire un espace vectoriel complexe de dimension $n \geq 1$, muni d'une forme hermitienne définie positive Φ. Selon l'usage, on parlera de base orthonormée au lieu de base orthonormée pour Φ, et d'endomorphisme unitaire au lieu d'endomorphisme unitaire pour Φ. Les endomorphismes unitaires de V forment un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$ noté $\mathrm{U}(V)$; on note $\mathrm{SU}(V)$ le sous-groupe de $\mathrm{U}(V)$ formé des endomorphismes de déterminant 1.

Pour $g \in \mathrm{End}(V)$, on note $g^\star$ l'endomorphisme adjoint de g ; il est caractérisé par la condition $\Phi(g(x), y) = \Phi(x, g^\star(y))$ pour tout x, y dans V. L'endomorphisme g est *hermitien* si $g^\star = g$, *unitaire* si $g^\star g = Id_V$.

Si W est un espace vectoriel complexe, on peut restreindre à $\mathbb{R} \times W$ la loi de multiplication par les scalaires $\mathbb{C} \times W \to W$; on obtient alors sur le groupe additif de W une structure d'espace vectoriel réel, qu'on appelle espace vectoriel *réel sous-jacent* à W.

Si E est un espace vectoriel réel et q une forme quadratique définie positive sur E, une *isométrie* de q est un endomorphisme u de E tel que $q(u(x)) = q(x)$ pour tout $x \in E$; les isométries de q forment un sous-groupe noté $\mathrm{O}(q)$ du groupe des automorphismes de E, et on note $\mathrm{SO}(q)$ le sous-groupe de $\mathrm{O}(q)$ formé des éléments de déterminant 1.

Deuxième partie

Le cas où n vaut 2

Dans cette partie, V est un espace vectoriel *hermitien* de dimension $n = 2$; on note Φ la forme hermitienne définie positive donnée sur V.

II.A.- On note E l'ensemble des éléments hermitiens de $\mathrm{End}(V)$ dont la trace est nulle. Pour $x \in E$, on pose $q(x) = -\det(x)$.

II.A.1. Il est clair que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel *réel* sous-jacent à $\mathrm{End}(V)$.

a) Calculer la dimension de E sur $\mathbb{R}$.

b) Prouver que q est une forme quadratique définie positive sur E.

c) Calculer la forme bilinéaire symétrique $B : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que $B(x, x) = q(x)$ pour tout $x \in E$. (On pourra répondre à ces questions en termes de matrices des éléments de $\mathrm{End}(V)$ dans une base orthonormée de V).

II.A.2. Soient $a \in \mathrm{U}(V)$ et $x \in E$. Montrer que $axa^{-1} \in E$.

Pour $a \in \mathrm{U}(V)$, on note $\varphi(a)$ l'application $x \mapsto axa^{-1}$ de E dans E ; il est immédiat que c'est un endomorphisme de E.

II.A.3. Montrer que pour tout $a \in \mathrm{U}(V)$, $\varphi(a)$ est une isométrie de q.

L'application $\varphi : a \mapsto \varphi(a)$ de $\mathrm{U}(V)$ dans $\mathrm{O}(q)$ ainsi obtenue est un homomorphisme de groupes (on ne demande pas de le vérifier).

II.A.4. a) Déterminer le noyau de φ.

b) Soit a un élément de $\mathrm{U}(V)$ qui n'est pas dans le noyau de φ. Montrer que $\varphi(a)$ est une rotation de E, et préciser, après le choix d'une orientation de E, un couple (axe,angle) de cette rotation, en termes de vecteurs propres et valeurs propres de a. (On fixera une base orthonormée de V formée de vecteurs propres de a et on considérera les matrices des éléments de $\mathrm{End}(V)$ dans cette base).

c) Déterminer l'image de φ.

II.A.5. Montrer que $\mathrm{SU}(V)$ contient un sous-groupe fini G dont tout sous-groupe abélien distingué est d'indice au moins 60. (On pourra utiliser le groupe des isométries positives d'un icosaèdre régulier, en *admettant* qu'un espace affine euclidien de dimension 3 contient un tel icosaèdre).

II.B.- On se donne un sous-groupe fini G de $\mathrm{U}(V)$. On note Z le sous-groupe de G formé des homothéties qui appartiennent à G (de sorte que Z est inclus dans le centre de G) et on note H le groupe quotient de G par son sous-groupe distingué Z. On note m le cardinal de H, et on suppose G distinct de Z, de sorte que $m \geq 2$.

Les éléments de G qui ne sont pas dans Z ont exactement 2 droites propres (qui sont d'ailleurs orthogonales). On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites de V ainsi obtenues.

II.B.1 a) Montrer que si $D \in \mathcal{D}$ et $g \in G$, alors $g(D)$ est dans $\mathcal{D}$.

b) Montrer que l'application $(g, D) \mapsto g(D)$ de $G \times \mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$ induit une action sur $\mathcal{D}$ du groupe $H = G/Z$.

On note cette action $(h, D) \mapsto h.D$. Pour chaque élément D de $\mathcal{D}$, on note e_D le cardinal du stabilisateur de D dans H.

II.B.2 a) Prouver qu'on a $e_D \geq 2$ pour $D \in \mathcal{D}$.

b) Prouver l'égalité :

$$2(m-1) = \sum_{D \in \mathcal{D}} (e_D - 1).$$

II.B.3 Si D et D' sont des éléments de $\mathcal{D}$ dans la même orbite pour l'action de H, montrer que l'on a $e_D = e_{D'}$.

On note Ω_1, ..., Ω_r les orbites de $\mathcal{D}$ pour l'action de H. Pour $i = 1, .., r$, on note e_i la valeur commune des e_D pour $D \in \Omega_i$. On suppose les orbites rangées de manière à avoir $e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_r$.

II.B.4 a) Calculer

$$\sum_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{e_i}\right),$$

en fonction de m.

b) Montrer qu'on a $r = 2$ ou 3.

II.B.5 Si r vaut 2, montrer que G est abélien.

II.B.6 Si r vaut 3 et qu'on a $e_1 = e_2 = 2$, $e_3 \geq 2$, établir que G possède un sous-groupe abélien distingué d'indice 2.

II.B.7 En examinant les possibilités autres que celles envisagées en II.B.5 et II.B.6, montrer que tout sous-groupe fini G de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ possède un sous-groupe abélien distingué d'indice au plus 60 dans G.

Troisième partie

La méthode de Frobenius

Dans cette partie, n est un entier quelconque ≥ 2, et V un espace vectoriel *hermitien* de dimension n. On note Φ la forme hermitienne définie positive donnée sur V.

III.A.- Dans cette section on fixe un nombre réel $\tau \in [0, \pi/2[$ et un élément v de $\mathrm{U}(V)$. On suppose que pour chaque valeur propre γ de v, il existe $\theta \in [-\tau, +\tau]$ tel que $\gamma = e^{i\theta}$.

III.A.1 Montrer que pour tout vecteur non nul x de V, il existe un nombre réel $r > 0$ et un nombre réel $\alpha \in [-\tau, +\tau]$, tel que

$$\Phi(v(x), x) = re^{i\alpha}.$$

III.A.2 Soit u un élément de $\mathrm{U}(V)$. Posons $t = vuv^{-1}$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, posons $U_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda Id_V)$, $T_\lambda = \mathrm{Ker}(t - \lambda Id_V)$, et notons $U_\lambda^\perp$ l'orthogonal de U_λ dans V.

a) Prouver qu'on a :

$$T_\lambda \cap U_\lambda^\perp = \{0\}.$$

b) On suppose de plus que u et t commutent. Montrer qu'on a $T_\lambda = U_\lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, de sorte que $t = u$ et que u et v commutent.

III.A.3 Soit s un élément de $\mathrm{U}(V)$. On suppose que pour chaque valeur propre σ de s, il existe $\alpha \in [-\tau, +\tau]$ tel que $\sigma = e^{i\alpha}$. Prouver que pour toute valeur propre μ de vs^{-1}, il existe $\beta \in [-2\tau, +2\tau]$, tel que $\mu = e^{i\beta}$. (On pourra considérer un vecteur x de V tel que $(v - \mu s)(x) = 0$).

Pour $g \in \mathrm{End}(V)$, on note $N(g)$ la trace de $g^\star g$. Si $A = [a_{i,j}]$ est la matrice de g dans une base orthonormée de V, on a $N(g) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2$, de sorte que $g \mapsto N(g)$ est une forme quadratique définie positive sur l'espace vectoriel réel E sous-jacent à $\mathrm{End}(V)$. On note $g \mapsto \|g\| = \sqrt{N(g)}$ la norme euclidienne correspondante sur l'espace vectoriel E.

III.A.4 Montrer que, quel que soit $u \in \mathrm{U}(V)$ on a

$$N\left(vuv^{-1}u^{-1} - Id_V\right) \leq 4\sin^2(\tau) N\left(u - Id_V\right).$$

(On pourra, en prenant une base de vecteurs propres de v, estimer $N(v(u - Id_V) - (u - Id_V)v)$.)

III.B.- Dans cette section, G désigne un sous-groupe *fini* de $\mathrm{U}(V)$. On note S l'ensemble des éléments s de G tels que pour toute valeur propre σ de S, il existe $\alpha \in]-\pi/6, \pi/6[$ tel que $\sigma = e^{i\alpha}$. On note A le sous-groupe de G engendré par S.

III.B.1 Soient v un élément de S et u un élément de G. On définit par récurrence sur l'entier naturel k, un élément u_k de $\mathrm{U}(V)$, en posant :

$$u_0 = u \text{ et } u_{k+1} = v u_k v^{-1} u_k^{-1}, \text{ pour } k \in \mathbb{N}.$$

a) Montrer qu'on a $u_k = Id_V$ pour k assez grand.

b) On suppose en outre que pour toute valeur propre λ de u, on peut trouver $\theta \in]-\pi/2, +\pi/2[$ tel que $\lambda = e^{i\theta}$. Montrer que u et v commutent. (On pourra remarquer que, pour $k \geq 1$, dire que $u_{k+1} = Id_V$ signifie que v commute à $u_{k-1} v u_{k-1}^{-1}$).

III.B.2 Montrer qu'il existe un nombre réel strictement positif η, indépendant de n, tel que deux éléments de g et h de G vérifiant $N(g-h) < \eta$ vérifient aussi $h^{-1}g \in S$.

III.B.3 Prouver que l'indice de A dans G vaut au plus

$$a(n) = \left(2\sqrt{\frac{n}{\eta}} + 1\right)^{2n^2} - \left(2\sqrt{\frac{n}{\eta}} - 1\right)^{2n^2}.$$

(Prendre un système de représentants de G/A dans G ; il sera commode de noter m la mesure de la boule unité de l'espace vectoriel euclidien E).

III.B.4 Conclure en prouvant le théorème de Jordan : *tout sous-groupe fini G de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ possède un sous-groupe abélien distingué d'indice au plus $a(n)$ dans G.*

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

PREMIÈRE PARTIE

I 1. Soit $x \in V$ on a $x \in T_\lambda$ exactement quand $vux^{-1}(x) = \lambda x$, c'est-à-dire $u(v^{-1}(x)) = \lambda v^{-1}(x)$; donc $x \in T_\lambda$ équivaut à $v^{-1}(x) \in U_\lambda$ et par suite $T_\lambda = v\,(U_\lambda)$. Si u et v commutent, on a $t = u$ d'où $T_\lambda = U_\lambda$ et $v(U_\lambda) = U_\lambda$ pour tout λ. Si en outre v est diagonalisable, son polynôme minimal est scindé à racines simples ; l'endomorphisme v_λ de U_λ induit par v annule aussi ce polynôme, donc v_λ est diagonalisable.

I 2. Si $g \in GL(V)$ est d'ordre fini n, il annule le polynôme $X^n - 1$ qui est scindé à racines simples (dans $\mathbb{C}[X]$), donc g est diagonalisable.

I 3. On prouve le résultat par récurrence sur dim $V \geq 1$. C'est évident si tous les éléments de X sont des homothéties, et en particulier si dim $V = 1$. Sinon, il existe un élément u de X qui n'est pas une homothétie. Alors V est somme directe de sous-espaces propres U_λ de u, et par I 1, les éléments x de X induisent des endomorphismes diagonalisables x_λ de U_λ commutant deux à deux. Comme les U_λ sont de dimension strictement inférieure à dim V, la partie $X_\lambda = \{x_\lambda \mid x \in X\}$ de End (U_λ) est diagonalisable. On peut donc choisir une base $\mathcal{B}_\lambda$ de U_λ telle que chaque x_λ, $x \in X$ ait une matrice diagonale dans cette base $\mathcal{B}_\lambda$. Par réunion on obtient une base de V telle que chaque élément x de X ait dans cette base une matrice diagonale.

I 4. Le sous-groupe G de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ engendré par la matrice inversible $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est abélien car monogène. La matrice A n'a que 1 comme valeur propre et n'est pas l'identité donc elle n'est pas diagonalisable, et G ne l'est pas non plus. Comme A n'est pas diagonalisable, elle n'est pas d'ordre fini et G non plus.

I 5. Choisissons une forme hermitienne définie positive $\Psi : V \times V \to \mathbb{C}$. Pour (x, y) dans $V \times V$, posons $\Phi(x, y) = \sum_{g \in G} \Psi(gx, gy)$; comme G est formé d'endomorphismes de V, il est clair que $(x, y) \mapsto \Psi(gx, gy)$ est une forme hermitienne pour tout $g \in G$ et que Φ est une forme hermitienne. Pour $x = y$, on a $\Phi(x, x) = \sum \Psi(gx, gx)$, qui est > 0 si $x \neq 0$, par suite Φ est définie positive. Enfin, pour $h \in G$ on a $\Phi(hx, hy) = \sum_{g \in G} \Psi(ghx, ghy) = \sum_{g \in G} \Psi(gx, gy) = \Phi(x, y)$ puisque l'application $g \mapsto gh$ est une permutation de G. Mais cela signifie que h est unitaire pour Φ.

I 6. Identifions $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ à $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$ de la manière habituelle (déjà utilisée supra I 4). Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Par I 5 il existe une forme hermitienne définie positive Φ sur $\mathbb{C}^n$ telle que G soit un sous- groupe du groupe unitaire pour Φ. Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et $(f_1, \ldots, f_n)$ une base orthonormée pour Φ. Soit v l'automorphisme de $\mathbb{C}^n$ qui envoie e_i sur f_i pour $i = 1, \ldots, n$. Par construction, on a $\Phi(v(x), v(y)) = \Phi_0(x, y)$ pour $x, y \in \mathbb{C}^n$, où Φ_0 est la forme hermitienne standard sur $\mathbb{C}^n$: en effet c'est vrai pour x, y dans la base canonique.

Soit $g \in G$, la relation $\Phi(x,y) = \Phi(gx,gy)$ pour $x,y \in \mathbb{C}^n$ qui traduit que g est unitaire pour Φ s'exprime aussi par $\Phi_0(x,y) = \Phi_0(v^{-1}gv(x), v^{-1}gv(y))$ pour $x,y \in \mathbb{C}^n$, c'est à dire $v^{-1}gv \in U_n$. On a donc $v^{-1}Gv \subset U_n$.

On peut aussi raisonner en termes de matrices. La matrice m de Φ dans la base canonique est hermitienne définie positive et les éléments g de G vérifient ${}^t\overline{g}mg = m$. On sait que m est le carré d'une matrice hermitienne $m = h^2$; pour $g \in G$ on a donc $(h^{-1}\,{}^t\overline{g}h)(hgh^{-1}) = 1_n$ de sorte que hgh^{-1} appartient à U_n, d'où $hGh^{-1} \subset U_n$.

DEUXIÈME PARTIE

II A 1. a) Fixons une base orthonormée (e_1, e_2) de V et identifions les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\mathrm{End}(V)$ et $M_2(\mathbb{C}$ au moyen de cette base. Alors E est formée des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & -a \end{pmatrix}$ où a est réel et b complexe ; une telle matrice x est la combinaison linéaire $x = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \mathcal{R}(b)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \Im(b)\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$,à coefficients réels ; cette écriture est unique, et il s'ensuit que E est un sous-espace vectoriel réel de $\mathrm{End}(V)$ dont les trois matrices exhibées forment une base ; il est donc de dimension 3.

b) Pour $x = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & -a \end{pmatrix}$, comme précédemment, on a $q(x) = a^2 + b\overline{b} = a^2 + \mathcal{R}(b)^2 + \Im(b)^2$, et q est bien une forme quadratique définie positive ; la base donnée de E est d'ailleurs orthonormée pour le produit scalaire attaché à q.

c) Par polarisation on obtient, pour $x' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ \overline{b'} & -a' \end{pmatrix}$, dans E,

$$B(x,x') = aa' + \frac{1}{2}(b\overline{b'} + b'\overline{b}) = aa' + \mathcal{R}(b)\mathcal{R}(b') + \mathcal{I}(b)\mathcal{I}(b')$$

Remarquons qu'on a aussi $B(x,x') = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(xx'), q(x) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(x^2)$.

II A 2. Soit $a \in U(V)$ et $x \in E$; on a $a^{-1} = a^\star$ et $x^\star = x$ d'où $(axa^{-1})^\star = (axa^\star)^\star = ax^\star a^\star = axa^{-1}$ et axa^{-1} est hermitien. D'autre part on sait que la trace est invariante par conjugaison, d'où $\mathrm{tr}(axa^{-1}) = \mathrm{tr}(x) = 0$. Donc axa^{-1} appartient à E.

II A 3. Soit $a \in U(V)$. Pour $x \in E$ on a $q(axa^{-1}) = -\det(axa^{-1}) = -\det(x) = q(x)$ donc $\varphi(a) \in O(q)$.

II A 4. a) Soit $a \in U(V)$; fixons une base orthonormée de V formée de vecteurs propres de a. Dans cette base l'élément a de $U(V)$ a une matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ où λ et μ sont des nombres complexes de module 1 ; si x appartient à E, il a dans cette base une matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & -\alpha \end{pmatrix}$, et celle de axa^{-1} est alors $\begin{pmatrix} \alpha & \lambda\mu^{-1}\beta \\ \mu\lambda^{-1}\overline{\beta} & -\alpha \end{pmatrix}$. Si $\mu = \lambda$, on a $\varphi(a) = Id_E$. Si $\mu \neq \lambda$, $axa^{-1} = x$ équivaut à $\beta = 0$ et donc $\varphi(a) \neq Id_E$. Par conséquent le noyau de φ est formé des homothéties λId_V, λ nombre complexe de module 1.

b) Munissons E de l'orientation pour laquelle la base orthonormée exhibée en II A 1 —formée des éléments de matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$— est directe. La matrice de $\varphi(a)$ dans cette base est $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ si on a écrit $\lambda\mu^{-1} = e^{i\theta}$. Donc $\varphi(a)$ est bien une rotation de E, d'axe orienté par le premier vecteur de cette base, et d'angle θ.

c) En variant λ et μ, on obtient toutes les rotations de cet axe dans E. Soit x un élément non nul de E ; comme x est un automorphisme de V, hermitien et de trace nulle, on peut trouver une base orthonormée de V où x ait pour matrice $\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & -\alpha\end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Ce qui précède montre que toutes les rotations de E d'axe orienté par x sont dans l'image de φ. Par suite $\varphi(U(V)) = SO(q)$.

II A 5. L'espace euclidien E, de dimension 3, contient un icosaèdre régulier I, qu'on peut centrer en O. Les isométries positives de I forment alors un sous-groupe $\overline{G}$ de $SO(q)$, simple non abélien de cardinal 60. L'image réciproque G de $\overline{G}$ dans $SU(V)$ est d'ordre 120, car le noyau de la restriction de φ à $SU(V)$ est formé de $\pm Id_V$. Un sous-groupe abélien distingué H de G a pour image dans $\overline{G}$ un sous-groupe abélien distingué, qui ne peut être que le sous-groupe trivial. Par suite H est d'indice au moins 60 dans G.

II B 1. a) Soit $h \in G \setminus Z$, et soit D une droite propre pour h : $h(D) = D$. Soit $g \in G$. On a alors $ghg^{-1}(g(D)) = g(D)$ donc $g(D)$, qui est bien une droite de V, est propre pour $ghg^{-1} \in G$; on a $ghg^{-1} \notin Z$ car h n'est pas dans Z. Par suite $g(D) \in \mathcal{D}$.

b) On vient de voir qu'on a une application $(g, D) \mapsto g(D)$ de $G \times \mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$. Il est immédiat que c'est une action de G sur $\mathcal{D}$, ce qui donne un morphisme de groupes de G dans $S(\mathcal{D})$. Pour $g \in Z$ on a $g(D) = D$ pour tout $D \in \mathcal{D}$ et cet homomorphisme de groupes se factorise donc en un homomorphisme de groupes de $H = G/Z$ dans $S(\mathcal{D})$. Si on note l'action correspondante $(h, D) \to h.D$, elle est donnée par $h.D = g(D)$ où $g \in G$ a pour image h dans H ; cette action de H sur $\mathcal{D}$ est ainsi déduite de celle de G.

II B 2. a) Soit $D \in \mathcal{D}$. Il existe un élément g de $G \setminus Z$ tel que $g(D) = D$. Comme g n'est pas dans Z, son image h dans H est d'ordre au moins 2. Mais alors, le stabilisateur de D dans H contient le sous-groupe de H engendré par h et on a bien $e_D \geq 2$.

b) Considérons l'ensemble X des couples $(h, D) \in H \times \mathcal{D}$ tels que $h.D = D$. Une droite $D \in \mathcal{D}$ fait partie de e_D tels couples, donc on a $|X| = \sum_{D\in\mathcal{D}} e_D$; mais d'autre part un élément g de $G \setminus Z$ stabilise exactement deux droites de $\mathcal{D}$, qui d'ailleurs ne dépendent que de l'image de h de g dans H ; en revanche l'élément neutre de H stabilise toutes les droites de $\mathcal{D}$. On a donc $|X| = |\mathcal{D}| + 2(m - 1)$. Comparant les deux formules pour $|X|$, on obtient $2(m-1) = \sum_{D\in\mathcal{D}}(e_D - 1)$.

II B 3. Si $D \in \mathcal{D}$, $h \in H$ et $D' = hD$, le stabilisateur dans H de D' est hSh^{-1} où S est celui de D ; or S et hSh^{-1} sont deux groupes finis isomorphes donc de même cardinal, d'où $e_D = e_{D'}$. [On peut aussi utiliser que le cardinal de l'orbite de D est quotient de celui de H par celui du stabilisateur de D.]

II B 4. a) Regroupons selon les orbites dans la formule $2(m-1) = \sum_{D\in\mathcal{D}}(e_D - 1)$. Notant d_i le cardinal de l'orbite Ω_i, on obtient

$$2(m-1) = \sum_{i=1}^{r} d_i(e_i - 1)$$

Tenant compte de la formule $d_ie_i = m$ pour $m = 1, \dots, r$, on a

$$2\left(1 - \frac{1}{m}\right) = \sum_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{e_i}\right).$$

b) Comme $e_i \geq 2$ on a $1 - \frac{1}{e_i} \geq \frac{1}{2}$ pour $i = 1, \dots, r$ et comme $m \geq 2$ on a $2(1 - \frac{1}{m}) < 2$ ce qui montre que r vaut au plus 3. Mais on ne peut pas avoir $r = 1$ car $2(1 - \frac{1}{m}) > 1 - \frac{1}{m} \geq 1 - \frac{1}{e_1}$. Donc r vaut 2 ou 3.

II B 5. Supposons $r = 2$; on a $2(1 - \frac{1}{m}) = 1 - \frac{1}{e_1} + 1 - \frac{1}{e_2}$ et $e_1 \leq e_2 \leq m$; cela implique $e_1 = e_2 = m$. Donc il existe deux droites D dans $\mathcal{D}$ que H stabilise. Dans une base formée de vecteurs directeurs de ces deux droites, les éléments de G ont une matrice diagonale, donc G est abélien.

II B 6. Supposons $r = 3$ et $e_1 = e_2 = 2$; on a alors $e_3 = \frac{m}{2}$. Le stabilisateur d'un élément D de Ω_3 est d'ordre $\frac{m}{2}$ donc d'indice 2 dans H. Son image réciproque A dans G est d'indice 2, donc distinguée dans G. Les éléments de A stabilisent D et donc la droite orthogonale à D. Par suite A est abélien.

II B 7. Dans les cas restants, on a $r = 3$, $1 + \frac{2}{m} = \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3}$, $e_1 \leq e_2 \leq e_3$. On ne peut avoir $e_1 \geq 3$ car si $e_1 \geq 3$, on a $\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3} \leq 1 < 1 + \frac{2}{m}$. On a donc $e_1 = 2$ d'où $\frac{1}{2} + \frac{2}{m} = \frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3}$, et $e_2 \geq 3$ puisque l'on n'est pas dans le cas 6. Mais $e_2 \geq 4$ est impossible car alors $\frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3} \leq \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{2}{m}$; donc e_2 vaut 3 et on a $\frac{1}{6} + \frac{2}{m} = \frac{1}{e_3}$, ce qui donne $e_3 = 3, 4$ ou 5 avec $m = 12, 24, 60$ respectivement. Ainsi H est d'ordre 12, 24 ou 60 et G a un sous-groupe abélien distingué d'indice 12, 24 ou 60 respectivement, à savoir Z.

TROISIÈME PARTIE

III A 1. Prenons une base orthonormée $(x_1, \dots, x_n)$ de V formée de vecteurs propres de v ; soit $e^{i\theta_j}$ la valeur propre correspondant à x_j. Pour $x = \sum \lambda_j x_j$ dans V, on a $\Phi(v(x), x) = \sum |\lambda_j|^2 e^{-i\theta_j}$. Ainsi pour $x \neq 0$, $\Phi(v(x), x)$ est une combinaison linéaire, à coefficients strictements positifs de certains (au moins un) des $e^{-i\theta_j}$. L'assertion vient alors du fait, évident sur un dessin, que le cône

$$\{re^{i\theta} \mid r > 0, \theta \in [-\tau, \tau]\}$$

est convexe parce que $0 \leq \tau < \frac{\pi}{2}$. Ce cône est en fait l'intersection des demi-plans d'équations $x > 0$, $y \leq x \tan\tau$, $y \geq -x\tan\tau$: en effet si $r > 0$ et $\theta \in [-\tau, \tau]$, $0 \leq \tau < \frac{\pi}{2}$, alors on a $\cos\theta > 0$ donc $x = r\cos\theta > 0$ et $\frac{y}{x} = \tan\tau \in [-\tan\tau, \tan\tau]$ puisque la fonction tangente croît de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$; inversement si $x > 0$ et $\frac{y}{x} \in [-\tan\tau, \tan\tau]$ alors l'argument θ vérife bien $\theta \in [-\tau, \tau]$.

III A 2. a) On a vu en I 1 qu'on a $T_\lambda = v(U_\lambda)$; si $x \in U_\lambda$ n'est pas nul, on a $\Phi(v(x), x) \neq 0$ par III A 1 donc $v(x)$ n'appartient pas à $U_\lambda^\perp$, et par suite $T_\lambda \cap U_\lambda^\perp = \{0\}$.

b) Remarquons que $T_\lambda = v(U_\lambda)$ a même dimension que U_λ. Si u et t commutent alors T_λ est stable par u (I 1). Or u étant diagonalisable, tout sous-espace stable T est somme directe des $T \cap U_\lambda$, λ parcourant les valeurs propres de u (par le théorème des noyaux appliqué à l'endomorphisme u_T de T induit par u et au polynôme minimal de u). Comme $U_\lambda^\perp$ est la somme directe des U_μ pour $\mu \neq \lambda$, on voit que T_λ est somme directe de $T_\lambda \cap U_\lambda$ et $T_\lambda \cap U_\lambda^\perp$.
Comme par a) $T_\lambda \cap U_\lambda^\perp = \{0\}$, on a $T_\lambda = T_\lambda \cap U_\lambda$ i.e. $T_\lambda \subset U_\lambda$; Cela donne $T_\lambda = U_\lambda$ puisque T_λ et U_λ ont même dimension. Ceci étant vrai pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $t = u$ et u et v commutent.

III A 3. Soit μ une valeur propre de vs^{-1}, y un vecteur propre correspondant, $y \neq 0$ et $x = s^{-1}(y)$. On a $(v - \mu s)(x) = 0$ d'où $\Phi(v(x), x) = \overline{\mu}\Phi(s(x), x)$. Comme x n'est pas nul et que v et s vérifient l'hypothèse de III A 1, on voit que $\Phi(v(x), x)$ et $\Phi(s(x), x)$ sont de la forme $re^{i\alpha}$ avec $r > 0$ et $\alpha \in [-\tau, \tau]$. Par suite μ est de la forme $r'e^{i\alpha'}$ avec $r' > 0$ et $\alpha' \in [-2\tau, 2\tau]$. Mais μ est de module 1 car $vs^{-1} \in U(V)$, d'où le résultat.

III A 4. Pour $u \in U(V)$ et $g \in$End(V), on a $N(gu) = \mathrm{tr}(u^\star g^\star gu) = \mathrm{tr}(u^{-1}g^\star gu)$ $= N(g)$. On a donc pour $u \in U(V)$, $N(vuv^{-1}u^{-1} - Id_V) = N(vu - uv) =$
$N(v(u - Id_V) - (u - Id_V)v)$. Calculons dans une base orthonormée de V formée de vecteurs propres de v. La matrice de v est diagonale de termes $\lambda_j = e^{i\theta_j}$ et si la matrice de $u - Id_V$ est $(a_{j,k})$ on obtient

$$N(vuv^{-1}u^{-1} - Id_V) = \sum_{j,k} |\ \lambda_j - \lambda_k|^2 |a_{j,k}|^2.$$

On montre ci-après $|\lambda_j - \lambda_k|^2 = 4\sin^2\left(\frac{\theta_j - \theta_k}{2}\right)$ d'où $|\lambda_j - \lambda_k|^2 \leq 4\sin^2\tau$ et $N(vuv^{-1}u^{-1} - Id_V) \leq 4\sin^2(\tau)\sum_{j,k}|a_{j,k}|^2$ ce qui donne le résultat.
<u>Calcul</u> : $|\lambda_j - \lambda_k|^2 = |1 - e^{i(\theta_j - \theta_k}|^2 = (1 - \cos(\theta_j - \theta_k))^2 + \sin^2(\theta_j - \theta_k) =$
$2 - 2\cos(\theta_j - \theta_k) = 4\sin^2\frac{\theta_j - \theta_k}{2}$.
On peut aussi faire un dessin :

III B 1. a) Comme v appartient à S, on peut choisir, dans III A, $\tau \in [0, \frac{\pi}{6}[$. On alors $2\sin\tau < 1$ et donc $N(vuv^{-1}u^{-1} - Id_V) < N(u - Id_V)$ pour $u \in U(V)$, $u \neq Id_V$. Si $u_k = Id_V$ pour un entier k, on a $u_l = Id_V$ pour l entier $l \geq k$. Si u_k n'est jamais égal à Id_V, alors la suite $N(u_k - Id_V)$ est strictement décroissante mais, comme les u_k sont dans G, elle ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs, ce qui est contradictoire.

b) Pour $k \geq 1$, dire qu'on a $u_{k+1} = Id_V$ signifie que v commute à $u_k = vu_{k-1}v^{-1}u_{k-1}^{-1}$; comme v commute à lui-même cela signifie que v commute à $u_k^{-1}v = u_{k-1}vu_{k-1}^{-1}$.

Montrons que l'on peut appliquer III A 2 avec v et u_{k-1} à la place de u et v. Il s'agit de voir que les valeurs propres de u_{k-1} sont de la forme $e^{i\theta}$ avec $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. C'est vrai par hypothèse pour $k = 1$ car $u_0 = u$. Pour $k \geq 2$, u_{k-1} est le produit de v par $s = u_{k-2}v^{-1}u_{k-2}^{-1}$; mais v et s vérifient les hypothèses de III A 3 avec $\tau \in [0, \frac{\pi}{6}[$ donc les valeurs propres de u_{k-1} sont de la forme $e^{i\theta}$, $|\theta| \in [0, \frac{\pi}{3}[$. Appliquant III A 2 on voit que v et u_{k-1} commutent.

Pour $k \geq 1$ on a donc prouvé que $u_{k+1} = Id_V$ implique $u_k = Id_V$. Comme $u_k = Id_V$ pour k assez grand, on a $u_1 = Id_V$ et u et v commutent.

III B 2. On a $N(g-h) = N(h^{-1}g - Id_V)$ car $h^\star h = Id_V$. Calculons à l'aide de matrices dans une base orthonormée de V formée de vecteurs propres de $h^{-1}g$. On obtient $N(g-h) = \sum |\lambda_j - 1|^2 = \sum 4\sin^2\left(\frac{\theta_j}{2}\right)$ si $\lambda_j = e^{i\theta_j}$. Comme $\theta \mapsto \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est paire, croissante de 0 à π, on voit qu'en posant $\eta = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$, l'inégalité $|\lambda - 1|^2 < \eta$ (où $\lambda = e^{i\theta}$) implique qu'on peut prendre $\theta \in]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}[$. Alors $N(g-h) < \eta$ implique $h^{-1}g \in S$.

III B 3. Choisissons un système de représentants B de G/A dans G. Pour b et b' distincts dans B, on a $N(b - b') \geq \eta$ car $N(b-b') < \eta$ implique $b'^{-1}b \in S \subset A$ i.e. $bA = b'A$ et $b = b'$. Par suite les boules ouvertes de E de centres les éléments de B et de rayon $\frac{\sqrt{\eta}}{2}$ sont disjointes. D'autre part les éléments de $U(V)$ sont de norme $\sqrt{n}$ dans E, donc ces boules sont comprises entre la sphère de centre O et de rayon $\sqrt{n} - \frac{\sqrt{\eta}}{2}$ et celle de centre O et de rayon $\sqrt{n} + \frac{\sqrt{\eta}}{2}$. Notant m le volume de la boule unité de E, on obtient alors :

$$|G/A|\left(\frac{\sqrt{\eta}}{2}\right)^{2n^2} m \leq \left(\sqrt{n} + \frac{\sqrt{\eta}}{2}\right)^{2n^2} m - \left(\sqrt{n} - \frac{\sqrt{\eta}}{2}\right)^{2n^2} m$$

d'où

$$|G/A| \leq \left(\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\eta}} + 1\right)^{2n^2} - \left(\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\eta}} - 1\right)^{2n^2}.$$

III B 4. Par III B 1 les éléments de S commutent 2 à 2 donc A est abélien. D'autre part un conjugué dans G d'un élément de S est encore dans S donc A est distingué dans G. Enfin l'indice de A dans G est majoré par la quantité $a(n)$ de III B 3, qui ne dépend que de n. On a donc montré qu'un sous-groupe fini de $U(V)$ a un sous-groupe abélien distingué d'indice au plus $a(n)$. La question I 6 donne alors le théorème de Jordan.

Commentaires sur l'épreuve écrite de Mathématiques Générales

I) Commentaire général

L'idée de départ était de démontrer le résultat suivant, dû à C. Jordan : pour tout entier $n \geq 2$ il existe un entier $a(n)$ tel que tout sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ possède un sous-groupe abélien distingué d'indice au plus $a(n)$.

La première partie permet de se ramener à des sous-groupes finis du groupe unitaire U_n. La partie II traite le cas où n vaut 2. On montre l'existence d'un homomorphisme de groupes $\varphi : \mathrm{SU}_2 \to \mathrm{SO}_3$, surjectif de noyau $\{\pm 1_2\}$; comme dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ il existe un icosaèdre régulier centré en 0, dont le groupe des isométries positives est isomorphe au groupe simple A_5, on en déduit que $a(2)$ vaut au moins 60. On étudie ensuite l'action d'un sous-groupe fini G de U_2 sur l'ensemble des droites propres des éléments non scalaires de G, et on montre qu'on peut effectivement prendre $a(2) = 60$. La discussion est parallèle à celle qui permet de classifier les sous-groupes finis de SO_3 ; la raison en est bien sûr l'existence de l'homomorphisme φ.

La troisième et dernière partie porte sur le théorème de Jordan proprement dit, par une méthode due à Frobenius (voir l'article *Über unitäre Matrizen*, publié en 1911 aux comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Berlin). On peut donner une démonstration plus directe, qui évite pour l'essentiel la partie III A ; on se reportera au livre de M. Alessandri qui figure dans la bibliothèque de l'agrégation. Cependant les résultats précis de III A sur les commutateurs d'éléments du groupe unitaire ont un intérêt propre, et permettaient de manier plusieurs notions et résultats de base du programme.

Mentionnons aussi que la valeur de $a(n)$ obtenu en III.B.3 n'est, bien sûr, pas la valeur optimale ; mais on ne connaît cette valeur optimale que pour les petites valeurs de n.

En gros, les parties I, II A, II B, III A, III B étaient de difficulté croissante, et de même les questions croissaient en difficulté à l'intérieur de ces parties. En particulier les 4 premières questions du I sont très souvent traitées en DEUG ou en licence, de même que les premières questions de II A ; les trois premières questions de II B ressortaient du cours sur les actions de groupes ou en étaient des applications directes. Le jury a constaté que beaucoup de candidats ne maîtrisent pas assez leur sujet pour traiter correctement ces questions de base : la question I.2 a été particulièrement discriminante. S'il y a très peu de copies blanches, beaucoup sont vraiment trop minces, trop confuses ou trop erronées. Heureusement certains candidats vont à l'essentiel sans délayage, et plusieurs ont réussi à traiter tout le problème.

II) **Commentaires plus précis sur les diverses questions**

Première partie

I 1 a) On trouve parfois, trop souvent, la formule $T_\lambda = vU_\lambda v^{-1}$, qui n'a pas de sens. Ou pouvait raisonner par équivalence pour prouver l'égalité $T_\lambda = v(U_\lambda)$, mais il est alors difficile d'être entièrement correct ; il vaut mieux prouver chacune des deux inclusions.

I 1 b) Dans nombre de copies on refait la démonstration de I 1 a) au lieu de l'utiliser.

I 1 c) Ici, il est clair qu'il faut **démontrer** que la restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sous-espace stable est encore diagonalisable. Trop de candidats, au lieu d'utiliser le polynôme minimal, manipulent des bases mystérieusement, et supposent implicitement qu'un supplémentaire est stable.

I 2 Une bonne part de ceux qui ont oublié le polynôme minimal à la question précédente s'en servent correctement ici. Mais il faut prendre garde que $X^n - 1$ n'est pas nécessairement le polynôme minimal d'un élément d'ordre n.

I 3 Il s'agit là encore d'un exercice classique, mais beaucoup se contentent du cas d'une famille à 2 éléments ; le cas d'une famille finie nécessite autant de soin, pour la récurrence, que celui d'une famille quelconque.

I 4 Même quand un exemple est trouvé, les justifications sont souvent incomplètes. Noter que le sous-groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ est diagonalisable grâce à la question précédente !

I 5 Il fallait penser à faire une moyenne. C'est un procédé général pour obtenir une invariance, mais les candidats ne l'ont peut-être pas rencontré assez fréquemment.

I 6 On peut raisonner en termes d'endomorphismes ou de matrices, mais il faut donner un raisonnement complet. On trouve beaucoup de changements de base pour la forme hermitienne, ce qui ne donne pas forcément la conjugaison voulue.

Deuxième partie

II A 1 a) Nous avons eu des réponses très diverses à cette question presque immédiate : de 1 à $255 = 16^2 - 1$.

II A 1 b) Il ne suffit pas de prouver que q est homogène de degré 2 pour que q soit une forme quadratique.

II A 1 c) Il ne suffit pas de dire “formule de polarisation”, il faut effectuer cette polarisation.

II A 2) Souvent bien traitée, même si certains passent beaucoup de temps à justifier que la trace est invariante par conjugaison.

II A 3) Question très facile.

II A 4 a) Il ne suffit pas de dire qu'il s'agit de l'ensemble des $a \in U(V)$ qui commutent avec tout élément de E, il faut identifier ces éléments a.

b) On ne peut parler d'un couple (axe, angle) d'une rotation de E qu'après avoir orienté E, et un axe est une droite orientée ; l'orientation de E et celle de l'axe permettent d'orienter le plan orthogonal à l'axe et de définir l'angle de la rotation. La trace de la rotation est $1 + 2\cos\theta$ où θ est l'angle, mais cela ne détermine pas θ.

II A 4 c) La question précédente donne tous les arguments mais peu l'ont traitée.

II B 1 a) Il y a bien des confusions et l'on se demande ce que signifie G/Z pour certains candidats. Il faut préciser que le complémentaire de Z est stable par conjugaison.

II B 1 b) Il faut ou bien définir une action de G et passer au quotient par Z qui est dans le noyau de $G \to S_{\mathcal{D}}$, ou bien définir $H \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ et vérifier que c'est bien une action.

II B 2 a) Certains disent que si g est dans le stabilisateur, il en est de même de g^{-1} ; hélas il peut arriver qu'on ait $g = g^{-1}$!

II B 2 b) On devine que les candidats ont senti que l'on comptait deux fois le même objet. Mais souvent ils n'arrivent pas à formuler précisément ce qu'ils comptent.

II B 3 En général bien traitée.

II B 4 a) et b) Le calcul, s'il est abordé, est en général mené correctement.

II B 5 Rarement traitée.

II B 6 On oublie souvent de remarquer qu'un sous-groupe d'indice 2 est forcément distingué. Que le sous-groupe correspondant de G soit abélien est très rarement établi.

TROISIÈME PARTIE

III A 1 L'important, après avoir mené le calcul suggéré, est de constater – et prouver – que le domaine considéré est convexe parce que $0 \leq \tau < \pi/2$.

III A 2 Assez bien traitée par les candidats parvenus à ce stade.

III A 3 Le plus souvent, on suppose implicitement que u et s commutent.

Les questions suivantes sont très peu abordées. Au début de III B il faut lire “pour toute valeur propre σ de s” (au lieu de S).

Définitions et Notations

On désigne par n un entier ≥ 1. Pour tout réel a, sa partie positive, $\max(0,\, a)$, est notée a_+, et on note $a_+^2 = (a_+)^2$ le carré de a_+. On note $[a+b+c+\ldots]_+$ la partie positive de $a+b+c+\ldots$ Pour tout ensemble A, la fonction indicatrice de A est notée $\mathbf{1}_A$: $\mathbf{1}_A(x) = 1$ lorsque x appartient à A, et $\mathbf{1}_A(x) = 0$ sinon. On note $\mathbf{1}$ la fonction constante égale à un. On note $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, etc. On dira qu'une fonction $g : [0,\, 1]^n \to \mathbb{R}^+$ est une densité lorsque g est intégrable et que $\displaystyle\int_{[0,\,1]^n} g(x)\, dx = 1$. On dit qu'une fonction $f : [0,\, 1]^n \to \mathbb{R}$ est convexe lorsque pour tout x et tout y de $[0,\, 1]^n$ et pour tout réel λ compris entre 0 et 1, on a

$$f\,(\lambda x \,+\, (1-\lambda)\, y) \;\leq\; \lambda f\,(x) \,+\, (1-\lambda)\, f\,(y)\;.$$

Elle est concave quand $-f$ est convexe. De même, on dit qu'une fonction $f :]0,\, +\infty[\to \mathbb{R}$ est convexe lorsque pour tout s et tout t de $]0,\, +\infty[$ et pour tout λ compris entre 0 et 1, on a

$$f\,(\lambda s \,+\, (1-\lambda)\, t) \;\leq\; \lambda f\,(s) \,+\, (1-\lambda)\, f\,(t)\;.$$

On rappelle l'inégalité de Jensen sous la forme suivante, dont on ne demande pas de démonstration :

“ Si Ψ est une fonction convexe définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si g est une densité, alors, à condition que les intégrales concernées soient définies et que f soit à valeurs dans I,

$$\Psi\left(\int_{[0,\,1]^n} f(x)\, g(x)\;\, dx\right) \;\leq\; \int_{[0,\,1]^n} \Psi\,(f(x))\, g(x)\;\, dx\,.\text{ ”}$$

Soient $g : [0,\, 1]^n \to \mathbb{R}^+$ une densité et $m : [0,\, 1]^n \to \mathbb{R}^+$ une fonction (borélienne), toutes deux à valeurs > 0, telles que les fonctions produits mg et $m\,|\ln m|\, g$ soient intégrables. On pose

$$\begin{aligned}\mathrm{Ent}_g\,(m) \;\;&=\;\; \int_{[0,\,1]^n} m(x)\,\ln m\,(x)\;\; g(x)\;\, dx \\ &\qquad - \left(\int_{[0,\,1]^n} m(x) g(x)\, dx\right)\left(\ln \int_{[0,\,1]^n} m(x) g(x)\, dx\right). \qquad (1)\end{aligned}$$

I. Entropie et variation totale

On établit dans cette partie des inégalités qui seront utilisées dans les parties II à VI.

I.1 Signe de l'entropie

On a défini $\mathrm{Ent}_g(m)$ en (**??**).

a) La fonction définie par $\Psi(x) = x \ln x$ est-elle convexe sur $]0,\, +\infty[$? Pourquoi ?

b) Montrer en utilisant l'inégalité de Jensen que $\mathrm{Ent}_g(m) \geq 0$.

I.2 Inégalités auxiliaires

On introduit les fonctions $J\ :\ ]0,\,+\infty[\to\mathbb{R}$ et $K\ :\ ]0,\,+\infty[\to\mathbb{R}$ définies par

$$J(u) \;=\; u\ln u \;-\; u \;+\; 1 \quad \text{et} \quad K(u) \;=\; \frac{J(u)}{u}, \qquad u>0\,,$$

et on prolonge J en 0 par $J(0)=1$.

a) Montrer que

$$J(u) \;\geq\; \frac{1}{2}\,(1\,-\,u)^2 \quad \text{pour tout } u\in[0,\,1]\,. \tag{2}$$

b) Montrer que

$$K(u) \;\geq\; \frac{1}{2}\left(1\,-\,\frac{1}{u}\right)^2 \quad \text{pour tout } u\geq 1\,. \tag{3}$$

c) Montrer que pour tout $u>0$,

$$u\ln u \;-\; u \;+\; 1 \;\geq\; \frac{1}{2}\,[1\,-\,u]_+^2 \;+\; \frac{u}{2}\left[1\,-\,\frac{1}{u}\right]_+^2\,. \tag{4}$$

d) Montrer que si h et g sont deux densités définies sur $[0,\,1]^n$, toutes deux à valeurs >0, et si la fonction

$$x\;\longmapsto\; h(x)\,\ln\left(\frac{h(x)}{g(x)}\right)$$

est intégrable, alors on a

$$\mathrm{Ent}_g\left(\frac{h}{g}\right) \;=\; \int_{[0,\,1]^n}\ln\left(\frac{h(x)}{g(x)}\right)h(x)\,dx\,. \tag{5}$$

Exprimer, pour tout réel $t>0$, $\mathrm{Ent}_g(t\,m)$ en fonction de t et de $\mathrm{Ent}_g(m)$.

e) Pour des densités r et q définies sur $[0,\,1]^n$ et à valeurs >0, on définit

$$\delta\,(r\mid q) \;=\; \left(\int_{[0,1]^n}\left[1\;-\;\frac{r(x)}{q(x)}\right]_+^2 q(x)\;dx\right)^{1/2}\,. \tag{6}$$

Montrer que

$$\delta^2\,(r\mid q) \;+\; \delta^2\,(q\mid r) \;\leq\; 2\,\mathrm{Ent}_r\left(\frac{q}{r}\right)\,. \tag{7}$$

I.3 Formule pour d_{VT}

L'écart de la variation totale $d_{\mathrm{VT}}(q,\,r)$ entre les densités q et r est défini par

$$d_{\mathrm{VT}}(q,\,r) \;=\; \sup_{0\leq f\leq 1}\left|\int_{[0,\,1]^n} f(x)\,q(x)\;dx \;-\; \int_{[0,\,1]^n} f(y)\,r(y)\;dy\right|\,, \tag{8}$$

la borne supérieure étant prise sur toutes les fonctions (boréliennes) f à valeurs dans $[0,\,1]$.

a) Montrer que

$$\int_{[0,\,1]^n}[q(x)\,-\,r(x)]_+\,dx \;=\; \frac{1}{2}\int_{[0,\,1]^n}|q(x)\,-\,r(x)|\;dx\,. \tag{9}$$

b) Montrer que $d_{VT}(q, r)$ vérifie

$$d_{\mathrm{VT}}\,(q,\,r) \;=\; \frac{1}{2}\int_{[0,\,1]^n} |\,q(x) \;-\; r(x)\,|\;dx\,. \tag{10}$$

II. Démonstration de l'inegalité principale pour $n = 1$

*Cette partie utilise des résultats obtenus dans la partie I. Elle peut être traitée sans que la partie I ait été achevée, quitte à admettre certains des résultats énoncés en I. Son résultat final (**??**), admis dans le cas général, permet de traiter les parties IV et V.*

Soit $\mathbb{B}_{1\times1}$ l'espace vectoriel des fonctions $h : [0,\,1] \times [0,\,1] \to \mathbb{R}$ bornées (et boréliennes). On dit que la forme linéaire Π sur $\mathbb{B}_{1\times1}$ est positive si, lorsque $h \in \mathbb{B}_{1\times1}$ prend des valeurs ≥ 0 alors $\Pi(h) \geq 0$. Soit $\mathcal{L}_{1\times1}$ l'ensemble des formes linéaires Π sur $\mathbb{B}_{1\times1}$ positives et telles que $\Pi(\mathbf{1}) = 1$. Pour toute forme linéaire Π de $\mathcal{L}_{1\times1}$, on définit les formes linéaires positives Π_1 et Π_2 sur l'espace vectoriel $\mathbb{B}_1$ des fonctions de $[0,\,1]$ dans $\mathbb{R}$ bornées (et boréliennes), de la façon suivante :

$$\Pi_1\,(f) = \Pi\,(h) \;\text{ pour }\; h(x,\,y) = f(x) \quad\text{et}\quad \Pi_2\,(g) = \Pi\,(h) \;\text{ pour }\; h(x,\,y) = g(y)\,.$$

On vérifie que $\Pi_1(\mathbf{1}) = \Pi_2(\mathbf{1}) = 1$. Lorsqu'il existe des densités ℓ_1 et ℓ_2 telles que

$$\Pi_1\,(f) \;=\; \int_0^1 \ell_1(x)\,f(x)\;dx \quad\text{et}\quad \Pi_2\,(g) \;=\; \int_0^1 \ell_2(y)\,g(y)\;dy$$

pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{B}_1$, on appelle ℓ_1 et ℓ_2 des densités marginales de Π.

II.1 Unicité ?

Montrer que si $\Pi \in \mathcal{L}_{1\times1}$ admet deux couples $(k_1,\,k_2)$ et $(\ell_1,\,\ell_2)$ de densités marginales, alors $k_1(x) = \ell_1(x)$ pour presque tout x, et $k_2(x) = \ell_2(x)$ pour presque tout x.

II.2 Étude d'une classe particulière

Soient $\phi : [0,\,1] \to \mathbb{R}$ et $\psi : [0,\,1] \times [0,\,1] \to \mathbb{R}$ des fonctions intégrables. Soit $\Lambda = \Lambda_{\phi,\,\psi}$ la forme linéaire sur $\mathbb{B}_{1\times1}$ définie par

$$\Lambda(h) = \int_0^1 \phi(x)\,h(x,\,x)\;dx \;+\; \int_0^1\int_0^1 \psi(x,\,y)\,h(x,\,y)\;dx\,dy\,. \tag{11}$$

a) À quelles conditions nécessaires et suffisantes sur ϕ et ψ, Λ appartient-elle à $\mathcal{L}_{1\times1}$?

b) Montrer que dans ce cas, Λ admet des densités marginales que l'on précisera.

II.3 Interprétation variationnelle de d_{VT}

Soient q et r deux densités à valeurs > 0, définies sur $[0,\,1]$. On note $\mathcal{L}(q,\,r)$ l'ensemble des Π appartenant à $\mathcal{L}_{1\times1}$, de densités marginales $\ell_1 = q$ et $\ell_2 = r$. Pour abréger l'écriture, on notera $\mathbf{1}_{x\neq y}$ la fonction $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\mathbf{1}_{x\neq y}(u,\,v) = 1$ pour $u \neq v$ et $\mathbf{1}_{x\neq y}(u,\,v) = 0$ pour $u = v$.

a) Montrer que pour toute forme linéaire Π de $\mathcal{L}(q,\,r)$,

$$d_{\mathrm{VT}}\,(q,\,r) \;\leq\; \Pi\left(\mathbf{1}_{x\neq y}\right)\,. \tag{12}$$

b) On suppose que $d_{\mathrm{VT}}(q,\, r) > 0$. Soit $\Lambda_0 = \Lambda_{\phi_0,\,\psi_0}$ la forme linéaire définie par (**??**) avec

$$\phi_0(x) = \min\left(q(x),\, r(x)\right) \quad \text{et} \quad \psi_0(x,\, y) = \frac{\left([q(x) - r(x)]_+\right)\,\left([r(y) - q(y)]_+\right)}{d_{\mathrm{VT}}(q,\, r)}. \tag{13}$$

Montrer que $\Lambda_0 \in \mathcal{L}(q,\, r)$ et calculer $\Lambda_0(\mathbf{1}_{x \neq y})$ en fonction de $d_{\mathrm{VT}}(q,\, r)$.

c) Déterminer $\inf\limits_{\Pi \in \mathcal{L}(q,\, r)} \Pi(\mathbf{1}_{x \neq y})$.

II.4 Inégalité principale dans le cas $n = 1$

Pour tout couple $(q,\, r)$ de densités à valeurs > 0 sur $[0,\, 1]$, on définit l'écart

$$d_2\,(q|\, r) \;=\; \inf_{\Pi \in \mathcal{L}(q,\, r)}\; \sup_{\alpha}\; \Pi\,(h_{2,\,\alpha}) \tag{14}$$

avec $h_{2,\,\alpha}(x,\, y) \;=\; \alpha(y)\,\mathbf{1}_{x \neq y}$, la borne supérieure étant prise sur les fonctions bornées (et boréliennes) α telles que $\displaystyle\int_0^1 \alpha^2(y) r(y)\; dy \;\leq\; 1$. On définit de même $d_2(r|\, q)$ en intervertissant les rôles de q et r :

$$d_2\,(r|\, q) \;=\; \inf_{\Pi \in \mathcal{L}(q,\, r)}\; \sup_{\beta}\; \Pi\,(h_{1,\,\beta}) \tag{15}$$

avec $h_{1,\,\beta}(x,\, y) \;=\; \beta(x)\,\mathbf{1}_{x \neq y}$, la borne supérieure étant prise sur les fonctions bornées (et boréliennes) β telles que $\displaystyle\int_0^1 \beta^2(x) q(x)\; dx \leq 1$.

Montrer à l'aide de (**??**) que

$$d_2\,(q|\, r) \;\leq\; \sqrt{2\,\mathrm{Ent}_r\left(\frac{q}{r}\right)} \quad \text{et} \quad d_2\,(r|\, q) \;\leq\; \sqrt{2\,\mathrm{Ent}_r\left(\frac{q}{r}\right)}. \tag{16}$$

III. Une première inégalité de concentration

La partie III est indépendante de toutes les autres. Elle établit des résultats que l'on pourra utiliser dans la partie V. Pour aborder la partie V, il est recommandé d'avoir lu la partie III.

On désigne par $\mathbb{P}\{A\}$ la probabilité de l'événement A, et par $\mathbb{E}(X)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire X. On sera amené à utiliser l'inégalité simple suivante, appelée inégalité de Chernoff, dont on ne demande pas de démonstration : soient λ un réel > 0 et X une variable aléatoire telle que l'espérance $\mathbb{E}(\exp(\lambda X))$ soit finie. Alors

$$\mathbb{P}\{X \,\geq\, a\} \;\leq\; e^{-\lambda\, a}\,\mathbb{E}\left(e^{\lambda X}\right) \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{R}.$$

III.1 Une inégalité pour des sommes

Notons $\mathrm{ch}x$ et $\mathrm{sh}x$ les cosinus et sinus hyperboliques de x :

$$\mathrm{ch}x \;=\; \frac{e^x \,+\, e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}x \;=\; \frac{e^x \,-\, e^{-x}}{2}.$$

a) Montrer que l'on a, pour tout $\lambda \geq 0$,

$$\mathrm{ch}\lambda \;\leq\; \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right). \tag{17}$$

(On pourra utiliser des développements en série entière.)

b) Montrer que si $\lambda \geq 0$ et $x \in [-1,\, 1]$, alors

$$e^{\lambda x} \;\leq\; \mathrm{ch}\lambda \;+\; x\,\mathrm{sh}\lambda \;\leq\; \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) \;+\; x\,\mathrm{sh}\lambda\,. \tag{18}$$

c) Montrer que si la variable aléatoire X prend ses valeurs dans l'intervalle $[-1,\, 1]$ et est centrée (c'est-à-dire que $\mathbb{E}(X) = 0$), alors on a

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda X}\right) \leq \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left(e^{-\lambda X}\right) \leq \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) \quad \text{pour tout } \lambda \geq 0\,. \tag{19}$$

d) En déduire que si la variable aléatoire X prend ses valeurs dans l'intervalle $[-1,\, 1]$ et est centrée, alors

$$\mathbb{P}\{|X| \;\geq\; a\} \;\leq\; 2\,\exp\left(-\,\frac{a^2}{2}\right) \quad \text{pour tout } a \geq 0\,. \tag{20}$$

e) Montrer que si les variables aléatoires indépendantes X_i prennent leurs valeurs dans l'intervalle $[-1,\, 1]$ et sont centrées (c'est-à-dire que $\mathbb{E}(X_i) = 0$ pour chaque i), alors on a

$$\mathbb{P}\left\{\left|n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \;\geq\; a\right\} \;\leq\; 2\,\exp\left(-\,\frac{a^2}{2}\right) \quad \text{pour tout } n \geq 1 \text{ et tout } a \geq 0\,. \tag{21}$$

III.2 Optimalité ?

a) Déterminer les solutions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' \;=\; -xy$.

b) Soient

$$\varphi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{et} \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$$

la densité et la fonction de répartition de la loi normale de moyenne 0 et de variance 1. Montrer que

$$1 \;-\; \Phi(x) \;\sim\; \frac{\varphi(x)}{x} \qquad \text{quand } x \to +\infty\,. \tag{22}$$

c) Est-il possible d'obtenir une inégalité, vraie pour toute suite de variables aléatoires indépendantes X_i à valeurs dans l'intervalle $[-1,\, 1]$ et centrées, de la forme

$$\mathbb{P}\left\{\left|n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \;\geq\; a\right\} \;\leq\; A\,\exp\left(-\,\kappa\, a^2\right) \qquad \text{pour tout } n \geq 1 \text{ et tout } a \geq 0\,, \tag{23}$$

avec des constantes $A \;>\; 0$ et $\kappa \;>\; 1/2$? Pourquoi ?

Cette partie utilise des résultats obtenus dans les parties I et II. Elle est indépendante de la partie III.

On se place maintenant sur $[0,\,1]^n$. Dans le cas où f est de classe C^1 sur le pavé ouvert $]0,\,1[^n$, on note $\nabla f(x)$ son gradient au point x de $]0,\,1[^n$. On note $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$ la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$, de sorte que $\|\nabla f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\partial_i f(x))^2$, où $\partial_i f$ désigne de manière abrégée la dérivée partielle de f par rapport à x_i :

$$\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \ldots, n\,.$$

IV.1 Inégalités pour des fonctions convexes sur $[0,\,1]^n$

a) Dans le cas $n = 1$, montrer que si f est convexe et de classe C^1 sur $]0,\,1[$, alors on a pour tout x et tout y de $]0,\,1[$,

$$f(x) \;-\; f(y) \;\leq\; \left|f'(x)\right|\, \mathbf{1}_{x\neq y}\,. \tag{24}$$

b) Dans le cas général $n \geq 1$, montrer que si f est convexe et de classe C^1 sur $]0,\,1[^n$, alors on a pour tout x et tout y de $]0,\,1[^n$,

$$f(x) \;-\; f(y) \;\leq\; \sum_{i=1}^{n} |\partial_i f(x)|\, \mathbf{1}_{x_i\neq y_i}\,. \tag{25}$$

Comme dans la partie II mais dans le cas $n \geq 1$, soit $\mathbb{B}_{n\times n}$ l'espace vectoriel des fonctions $h : [0,\,1]^n \times [0,\,1]^n \to \mathbb{R}$ bornées (et boréliennes). On dit que la forme linéaire Π sur $\mathbb{B}_{n\times n}$ est positive si $\Pi(h) \geq 0$ lorsque $h \in \mathbb{B}_{n\times n}$ prend des valeurs ≥ 0. Soit $\mathcal{L}_{n\times n}$ l'ensemble des formes linéaires Π sur $\mathbb{B}_{n\times n}$ positives telles que $\Pi(\mathbf{1}) = 1$. Pour toute forme linéaire Π de $\mathcal{L}_{n\times n}$, on définit comme en II les formes linéaires positives Π_1 et Π_2 sur l'espace vectoriel $\mathbb{B}_n$ des fonctions de $[0,\,1]^n$ dans $\mathbb{R}$ bornées (et boréliennes). On a $\Pi_1(\mathbf{1}) = \Pi_2(\mathbf{1}) = 1$. Lorsqu'il existe des densités ℓ_1 et ℓ_2 telles que l'on ait, respectivement,

$$\Pi_1\,(f) \;=\; \int_{[0,\,1]^n} \ell_1(x)\, f(x)\; dx \quad \text{et} \quad \Pi_2\,(g) \;=\; \int_{[0,\,1]^n} \ell_2(y)\, g(y)\; dy$$

pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{B}_n$, on appelle ℓ_1 et ℓ_2 des densités marginales de Π. Toujours comme dans II, on note $\mathcal{L}(q,\,r)$ l'ensemble des formes linéaires Π qui appartiennent à $\mathcal{L}_{n\times n}$ et qui admettent les densités marginales $\ell_1 = q$ et $\ell_2 = r$. Comme dans II, on note $\mathbf{1}_{x\neq y}$ la fonction $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $\mathbf{1}_{x\neq y}(u,\,v) = 1$ pour $u \neq v$ et $\mathbf{1}_{x\neq y}(u,\,v) = 0$ pour $u = v$. De même, pour chaque i on note $\mathbf{1}_{x_i\neq y_i}$ la fonction $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par : $\mathbf{1}_{x_i\neq y_i}(u,\,v) = 1$ pour $u_i \neq v_i$ et $\mathbf{1}_{x_i\neq y_i}(u,\,v) = 0$ pour $u_i = v_i$, où u_i (respectivement, v_i) désigne la i-ème coordonnée de u (respectivement, v). Comme dans II, pour tout couple $(q,\,r)$ de densités à valeurs > 0 sur $[0,\,1]^n$, on définit

$$d_2\,(q|\,r) \;=\; \inf_{\Pi\in\mathcal{L}(q,\,r)} \;\sup_{\alpha}\; \Pi\,(h_{2,\,\alpha}) \tag{26}$$

avec $h_{2,\alpha}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(y)\,\mathbf{1}_{x_i \neq y_i}$, la borne supérieure étant prise sur l'ensemble des fonctions bornées (boréliennes) $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ telles que $\int_{[0,\,1]^n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2(y)\; r(y)\; dy \leq 1$. On définit de même $d_2(r|\,q)$ en intervertissant les rôles de q et r, à partir des $h_{1,\beta}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x)\,\mathbf{1}_{x_i \neq y_i}$.

Aucune démonstration des faits ci-dessus n'est demandée.

On SUPPOSE DORÉNAVANT que r est une densité produit > 0, c'est-à-dire que r s'écrit sous la forme d'un produit de densités r_i à valeurs > 0, définies chacune sur l'intervalle $[0,\,1]$:

$$r(y) \;=\; r_1(y_1)\dots r_n(y_n) \qquad \text{pour tout } y \in [0,1]^n\,. \tag{27}$$

Nous ADMETTONS DORÉNAVANT que si q et r sont des densités à valeurs > 0 sur $[0,\,1]^n$ et si r est une densité produit, alors on a les inégalités

$$d_2\,(q|\,r) \;\leq\; \sqrt{2\,\mathrm{Ent}_r\left(\frac{q}{r}\right)} \quad \text{et} \quad d_2\,(r|\,q) \;\leq\; \sqrt{2\,\mathrm{Ent}_r\left(\frac{q}{r}\right)} \tag{28}$$

pour tout $n \geq 1$. Des conséquences vont en être déduites dans cette partie et dans la partie V.

IV.2 Résultats intermédiaires

a) On suppose que $f : [0,\,1]^n \to \mathbb{R}$ est convexe, continue sur $[0,\,1]^n$ et de classe C^1 à l'intérieur, et que les dérivées partielles $\partial_i f$, $1 \leq i \leq n$, sont bornées sur $]0,1[^n$. On note

$$I_q\,(f) \;=\; \int_{[0,\,1]^n} \|\nabla f(x)\|^2\, q(x)\, dx\,.$$

Montrer que

$$\int_{[0,\,1]^n} f(x)\, q(x)\; dx \;-\; \int_{[0,\,1]^n} f(y)\, r(y)\; dy \;\leq\; \sqrt{2\, I_q\,(f)\;\mathrm{Ent}_r\left(\frac{q}{r}\right)}\,. \tag{29}$$

*(Revenir aux définitions de l'écart d_2 ; utiliser les inégalités (**??**) et (**??**).)*

b) Expliquer brièvement comment adapter ces résultats pour montrer que si $f : [0,\,1]^n \to \mathbb{R}$ est concave, continue sur $[0,\,1]^n$ et de classe C^1 à l'intérieur, et si les fonctions $\partial_i f$ sont bornées sur $]0,\,1[^n$, alors, posant

$$I_r\,(f) \;=\; \int_{[0,\,1]^n} \|\nabla f(x)\|^2\, r(x)\, dx\,,$$

on a

$$\int_{[0,\,1]^n} f(x)\, q(x)\; dx \;-\; \int_{[0,\,1]^n} f(y)\, r(y)\; dy \;\leq\; \sqrt{2\, I_r\,(f)\;\mathrm{Ent}_r\left(\frac{q}{r}\right)}\,. \tag{30}$$

IV.3 Deux applications

On suppose que $f : [0,\, 1]^n \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que l'entropie $\mathrm{Ent}_r(e^f)$ au sens de (??) soit définie. On notera

$$R\left(e^f\right) = \int e^{f(y)}\, r(y)\ dy \qquad \text{et} \qquad m^f \ \text{ la fonction } \ \frac{e^f}{R\left(e^f\right)},$$

et on notera r^f la densité $m^f\, r$ sur $[0,\, 1]^n$.

a) Montrer que

$$\mathrm{Ent}_r\left(m^f\right) \ \leq\ \int_{[0,\,1]^n} f(x)\, r^f(x)\ dx \ -\ \int_{[0,\,1]^n} f(y)\, r(y)\ dy\,. \tag{31}$$

b) Supposons de plus que f est convexe et de classe C^1 sur $]0,\, 1[^n$, et que les fonctions $\partial_i f$ sont bornées sur $]0,\, 1[^n$. Montrer l'inégalité

$$\mathrm{Ent}_r\left(e^f\right) \ \leq\ 2 \int_{[0,\,1]^n} \|\nabla f(x)\|^2\, e^{f(x)}\, r(x)\ dx\,. \tag{32}$$

(On pourra utiliser IV.2 avec $q = r^f$, puis exprimer $Ent_r(m^f) = Ent_r(r^f/r)$.)

c) Si maintenant f est concave et et de classe C^1 sur $]0,\, 1[^n$, et si les fonctions $\partial_i f$ sont bornées sur $]0,\, 1[^n$, déduire brièvement de même l'inégalité

$$\mathrm{Ent}_r\left(e^f\right) \ \leq\ 2 \left(\int_{[0,\,1]^n} \|\nabla f(x)\|^2\, r(x)\, dx\right) \left(\int_{[0,\,1]^n} e^{f(x)}\, r(x)\, dx\right). \tag{33}$$

IV.4 Une inégalité de Poincaré

Déduire de la question précédente l'inégalité suivante, où on demande de préciser la valeur de la constante C. Pour toute fonction $f : [0,\, 1]^n \to \mathbb{R}$ convexe ou concave, continue sur $[0,\, 1]^n$ et de classe C^1 à l'intérieur et dont les dérivées partielles $\partial_i f$ sont bornées,

$$\int_{[0,\,1]^n} f^2(x)\, r(x)\ dx \ -\ \left(\int_{[0,\,1]^n} f(x)\, r(x)\ dx\right)^2 \ \leq\ C \int_{[0,\,1]^n} \|\nabla f(x)\|^2\, r(x)\ dx\,. \tag{34}$$

(Appliquer (??) à εf en faisant tendre ε vers 0. On pourra commencer, pour simplifier, par se ramener au cas où $\int_{[0,\,1]^n} f(x)\, r(x)\, dx = 0$.)

V. Deuxième application : inégalités de concentration

Cette partie utilise des résultats établis dans les parties I à IV. On se place dans le même cadre que dans la partie IV, et on fait les mêmes hypothèses, en particulier (??) et (??).

Rappelons que comme dans la partie IV, nous supposons que r est une densité produit > 0, et nous admettons (??).

V.1 Cas concave de classe C^1

On suppose que $f : [0,\,1]^n \to \mathbb{R}$ est concave, continue sur $[0,\,1]^n$ et de classe C^1 à l'intérieur, et que les fonctions $\partial_i f$ sont bornées. Notons τ^2 l'intégrale $I_r(f)$ définie en IV.2, et posons

$$R(f) \;=\; \int_{[0,\,1]^n} f(x)\,r(x)\;dx \qquad \text{et} \qquad m(x) \;=\; \frac{q(x)}{r(x)}\,.$$

a) Montrer qu'on a, pour tout $\lambda > 0$,

$$\int_{[0,\,1]^n} \left(\lambda\,(f(x) \;-\; R(f)) \;-\; \frac{\tau^2\lambda^2}{2}\right) m(x)\,r(x)\;dx \;\le\; \mathrm{Ent}_r\,(m)\;. \tag{35}$$

b) Expliciter (**??**) dans le cas où m est de la forme $e^{\ell}/R(e^{\ell})$. En déduire que pour tout $\lambda > 0$,

$$\int_{[0,\,1]^n} e^{\lambda(f(x)\,-\,R(f))}\,r(x)\;dx \;\le\; \exp\left(\frac{\tau^2\lambda^2}{2}\right). \tag{36}$$

c) En déduire que si $X_1,\ldots,X_n$ désignent des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[0,\,1]$ dont les lois respectives admettent chacune une densité strictement positive sur $[0,\,1]$, alors pour toute fonction $f\;:\;[0,\,1]^n \;\to\; \mathbb{R}$ concave, continue sur $[0,\,1]^n$ et de classe C^1 à l'intérieur, et dont les dérivées partielles $\partial_i f$ sont bornées, notant $\tau^2 = \mathbb{E}(\,\|\nabla f(X_1,\ldots,X_n)\|^2\,)$, on a pour tout réel $a \ge 0$,

$$\mathbb{P}\{\,f\,(X_1,\ldots,X_n) \;-\; \mathbb{E}(f\,(X_1,\ldots,X_n)) \;\ge\; a\,\} \;\le\; \exp\left(-\,\frac{a^2}{2\tau^2}\right). \tag{37}$$

V.2 Cas convexe de classe C^1

On suppose maintenant que $f : [0,\,1]^n \to \mathbb{R}$ est convexe, continue sur $[0,\,1]^n$ et de classe C^1 à l'intérieur, et que les fonctions $\partial_i f$ sont bornées. Notons $\rho^2_{\max}$ la borne supérieure de $\|\nabla f(x)\|^2$ sur $]0,1[^n$.

Montrer que sous les mêmes hypothèses que dans la question V.1.c, on a pour tout $a \ge 0$,

$$\mathbb{P}\{\,f\,(X_1,\ldots,X_n) \;-\; \mathbb{E}(f\,(X_1,\ldots,X_n)) \;\ge\; a\,\} \;\le\; \exp\left(-\,\frac{a^2}{2\rho^2_{\max}}\right). \tag{38}$$

Appendice

V.3 Une inégalité dans les espaces de Banach

Question V.3 : Soit E un espace de Banach, de norme $\|\cdot\|_{\mathrm{E}}$. Soit E' son dual topologique (c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E), muni de la norme associée $\|\cdot\|_{\mathrm{E}'}$. Soient $b_1,\ldots,b_n$ des éléments de E.

Montrer que si les variables aléatoires indépendantes $X_1,\ldots,X_n$ prennent leurs valeurs dans $[-1,\,1]$ et si leurs lois respectives admettent chacune une densité strictement positive sur $[-1,\,1]$, alors pour tout $a \ge 0$,

$$\mathbb{P}\left\{\left|\;\left\|\sum_{i=1}^n X_i\,b_i\right\|_{\mathrm{E}} \;-\; \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^n X_i\,b_i\right\|_{\mathrm{E}}\right)\right| \;\ge\; a\right\} \;\le\; 2\,\exp\left(-\,\frac{a^2}{8\sigma_n^2}\right), \tag{39}$$

où

$$\sigma_n^2 \;=\; \sup_{\xi \in E' \,:\, \|\xi\|_{\mathrm{E}'} \leq 1} \quad \sum_{i=1}^{n} \left(\xi\left(b_i\right)\right)^2 \;, \tag{40}$$

la borne supérieure portant sur l'ensemble des formes linéaires continues ξ sur E de norme associée $\|\xi\|_{\mathrm{E}'} \leq 1$.

VI Cas $n \geq 2$

Établir (**??**) dans le cas général.

Corrigé

Jean Diebolt

jean.dieb@wanadoo.fr

Introduction & préliminaires

Ecarts d_{VT} et d_2

On introduit dans ce problème plusieurs notions d'écart entre densités (q et r). L'écart entropique $\mathrm{Ent}_r\,(q/r)$ est lié en particulier à la théorie de l'information. Deux autres écarts, celui de la variation totale $d_{\mathrm{VT}}(q,\,r)$ (introduit en I.3) et $d_2(q|\,r)$ (introduit en II.4 pour $n=1$ et en IV pour $n \geq 1$), sont attachés à une intuition probabiliste qu'il n'est pas du tout nécessaire de maîtriser pour traiter le problème.

Notons tout d'abord que d'après I.3, $d_{\mathrm{VT}}(q,\,r)$ est, à un coefficient multiplicatif près, la distance L^1 entre q et r.

D'autre part, à toute mesure de probabilité γ sur $[0,\,1]^n$ correspond une forme linéaire positive Γ sur l'espace $\mathbb{B}_n$, telle que $\Gamma(\mathbf{1})=1$, avec

$$\forall f \in \mathbb{B}_n, \quad \Gamma(f) \,=\, \int_{[0,\,1]^n} f\,d\gamma\,.$$

De même, l'ensemble des mesures de probabilité sur $[0,\,1]^n \times [0,\,1]^n$ correspond à l'ensemble $\mathcal{L}_{n\times n}$. Si π est une mesure de probabilité sur $[0,\,1]^n \times [0,\,1]^n$, Π associée appartient à $\mathcal{L}_{n\times n}$, et

$$\forall h \in \mathbb{B}_{n\times n}, \quad \Pi(f) \,=\, \int_{[0,\,1]^n\times[0,\,1]^n} h\,d\pi\,.$$

Les formes Π_1 et Π_2 correspondent alors aux mesures de probabilité marginales de π.

Exprimons maintenant cela en termes de variables aléatoires. Soit X une variable aléatoire réelle de loi γ : l'espérance de $f(X)$ vérifie

$$\mathbb{E}(f(X)) \,=\, \int_{[0,\,1]^n} f\,d\gamma \,=\, \Gamma(f)\,.$$

De même, si $(X,\,Y)$ est un couple de variables aléatoires réelles de loi π, on a

$$\mathbb{E}(h(X,\,Y)) \,=\, \int_{[0,\,1]^n\times[0,\,1]^n} h\,d\pi \,=\, \Pi(f)\,.$$

La mesure de probabilité λ associée à la forme linéaire Λ charge la diagonale de $[0,\,1]^n \times [0,\,1]^n$ dès que la fonction ϕ n'est pas la fonction nulle. La mesure de la diagonale, c'est-à-dire la probabilité que $X=Y$, est égale à

$$\int_{[0,\,1]^n} \phi(x)\,dx\ .$$

Pour tout couple $(X,\,Y)$ de variables aléatoires dont la loi appartient à $\mathcal{L}(q,\,r)$, $d_{\mathrm{VT}}(q,\,r)$ est la borne supérieure de l'espérance de $|f(X)-f(Y)|$ sur un ensemble de fonctions f "pas trop grandes".

La question II.3 montre que pour toute mesure de probabilité π de $\mathcal{L}(q, r)$, si (X, Y) désigne un couple de variables aléatoires de loi π on a

$$d_{\mathrm{VT}}(q, r) \leq \mathbb{E}(\mathbf{1}_{X \neq Y}) = \mathbb{P}\{X \neq Y\} .$$

Il existe une mesure de probabilité explicite λ de $\mathcal{L}(q, r)$, définie par (13), pour laquelle $d_{\mathrm{VT}}(q, r) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{X \neq Y}) = 1 - \mathbb{P}\{\mathbf{1}_{X=Y}\}$.

Autrement dit, étant données deux densités fixées q et r sur $[0, 1]^n$, si on condidère des couples de variables aléatoires réelles (X, Y) non indépendantes en général, la densité de la loi de X étant q et celle de la loi de Y étant r, $d_{\mathrm{VT}}(q, r)$ est la borne inférieure parmi tous les couples (X, Y) considérés ci-dessus de la probabilité que $X \neq Y$, c'est-à-dire la probabilité que $X \neq Y$ lorsque X et Y sont "le plus proches" possible.

Quant à l'écart $d_2(q|\, r)$, il a été construit par analogie avec ce qu'on vient d'expliquer pour d_{VT}. Dans le cas particulier $n = 1$, c'est la borne inférieure, parmi tous les couples (X, Y) considérés ci-dessus, de la borne supérieure de l'espérance de $\alpha(Y)\mathbf{1}_{X \neq Y}$ sur un ensemble de fonctions α "pas trop grandes". Pour $d_2(r|\, q)$, on remplace $\alpha(Y)\mathbf{1}_{X \neq Y}$ par $\beta(X)\mathbf{1}_{X \neq Y}$. Cette interprétation s'adapte au cas général $n \geq 1$, moyennant l'introduction de davantage de notations.

Inégalités de Sobolev logarithmiques de IV

Il n'est pas possible d'expliquer ici ce que sont en général des inégalités du type de Sobolev. Nous nous contenterons de remarquer que comme r est une densité, l'hypothèse de continuité de f sur tout $[0, 1]^n$ n'est en fait pas nécessaire. De même, il n'est pas nécessaire que ∇f soit continue sur $]0, 1[^n$, ni (sauf exception) même bornée sur $[0, 1]^n$. Il suffit que les intégrales apparaissant dans les seconds membres de ces inégalités soient finies. En particulier, les fonctions $\exp(f)\, r$ et $\|\nabla f\|^2\, r$ doivent être intégrables.

Inégalité de Poincaré de IV.3

Cette inégalité exprime que sous certaines conditions sur f, si X désigne une variable aléatoire à valeurs dans $[0, 1]^n$ dont la loi admet la densité r, alors la variance de la variable aléatoire réelle $f(X)$ est majorée par C fois l'espérance du carré de la norme euclidienne de $\nabla f(X)$. Notons l'homogénéité des deux membres de l'inégalité. Dans le second membre, l'intégrale $\displaystyle\int \|\nabla f(x)\|^2\, r(x)\, dx$ peut être interprétée comme une mesure différentielle de dispersion quadratique de $f(X)$. Des inégalités de ce type sont, entre autres choses, des outils pour établir des résultats dits "isopérimétriques".

Inégalités de concentration de V

Elles sont entièrement explicites, elles sont vraies pour chaque $n \geq 1$, et elles sont beaucoup plus précises que les inégalités usuelles comme celle de Chebyshev. Ce sont des "inégalités de moyenne déviation".

Liens

Des mathématiciens sont actuellement en train de dégager des relations étroites entre inégalités de Sobolev logarithmiques d'une part, inégalités de Poincaré et résultats isopérimétriques d'autre part, et enfin inégalités de concentration. L'énoncé de ce problème concerne des variables aléatoires indépendantes bornées, prenant toutes leurs valeurs dans le même intervalle compact. Il existe d'autres cadres possibles pour obtenir des résultats analogues, en particulier celui des variables aléatoires gaussiennes, ou au moins admettant des propriétés "proches" de celles des variables aléatoires gaussiennes.

I

I.1 Entropie positive

a) et *b)* Inégalité de Jensen (voir Préliminaires) appliquée à la fonction convexe $t > 0 \mapsto t \ln t$. Cette fonction est convexe car deux fois dérivable de dérivée seconde positive sur $]0, +\infty[$.

I.2 Inégalités auxiliaires

a) b) c) et *d)* Par exemple, on montre en dérivant deux fois que $0 \leq t < 1 \mapsto d(t) = J(1-t) - t^2/2$ est convexe. Comme $d'(0) = 0$, il en résulte que $d'(t) \geq 0$, donc d est croissante à partir de 0, donc ≥ 0. Pour K, c'est analogue ; on peut poser $u = 1 + t$, $t \geq 0$, puis $s = t/(1+t)$ pour se ramener à $[0, 1]$. On peut aussi utiliser la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2. Pour I.2.c, application directe, car (avec la convention en 0)

$$u \ln u \; - \; u \; + \; 1 \; = \; J(u)\mathbf{1}_{0 \leq u \leq 1} \; + \; uK(u)\mathbf{1}_{u > 1}\,.$$

La question I.2.d est immédiate (destinée en particulier à obliger les candidats à *lire* l'énoncé et à préparer la suite). On trouve que $\mathrm{Ent}_g(t\,m) = t\,\mathrm{Ent}_g(m)$, ce qui servira plus loin.

COMMENTAIRE. *Pour les questions a) et b), un tableau de variations peut êtreconseillé.*

e) Appliquer I.2.c avec $u = q(x)/r(x)$ et intégrer par rapport à $r(x)\,dx$.

I.3 Formule pour d_{VT}

a) et *b)* On peut intégrer sur les ensembles $\{x \; : q(x) > r(x)\}$ et $\{x \; : q(x) < r(x)\}$, que nous noterons simplement $\{q > r\}$ et $\{q < r\}$, puis utiliser le fait que $\displaystyle\int q(x)\,dx = \int r(x)\,dx$, d'où $\displaystyle\int \mathbf{1}_{\{q>r\}}\,(q(x) - r(x))\,dx + \int \mathbf{1}_{\{q<r\}}\,(q(x) - r(x))\,dx = 0$, d'où a) par définition de $[q \; - \; r]_+$.

Ensuite, il faut d'abord se débarrasser de la valeur absolue. On doit montrer que

$$\sup_{0 \leq f \leq 1} \left| \int f(x) q(x)\,dx \; - \; \int f(y) r(y)\,dy \right| \; = \; \sup_{0 \leq f \leq 1} \left\{ \int f(x) q(x)\,dx \; - \; \int f(y) r(y)\,dy \right\}\,.$$

En effet, par exemple (entre autres possibilités), pour toute fonction f telle que $0 \leq f \leq 1$, on a

$$\int f(x)(q(x) - r(x))\,dx \; = \; - \int (1 - f(x))(q(x) - r(x))\,dx$$

puisque $\displaystyle\int (q(x) \; - \; r(x))\,dx \; = \; 0$. On a $0 \; \leq \; 1 - f \; \leq \; 1$ et $f \; \mapsto \; 1 - f$ est une involution pour les fonctions telles que $0 \leq f \leq 1$.

Puis on montre que la borne supérieure est atteinte pour $f \; = \; \mathbf{1}_{q \geq r}$, d'où b) en revenant à la définition de $[q \; - \; r]_+$.

II

II.1 Unicité ?

Étant des densités, les fonctions ℓ_1 et ℓ_2, k_1 et k_2, ne sont définies qu'à un ensemble de mesure nulle près. Le plus simple ici est peut-être de déduire des définitions que $d_{\mathrm{VT}}(\ell_1, k_1) = d_{\mathrm{VT}}(\ell_2, k_2) = 0$. Par conséquent, $\displaystyle\int |\ell_1(x) - k_1(x)|\,dx = \int |\ell_2(x) - k_2(x)|\,dx = 0$, d'où la conclusion.

On peut aussi, dans le cas $n = 1$ ici, considérer des fonctions f et g de la forme $\mathbf{1}_{[0,\,t]}$ pour $t \in [0,\,1]$. On utilise alors le résultat suivant : si ℓ est intégrable sur $[0,\,1]$, alors la fonction $t \in [0,\,1] \mapsto \int_0^t \ell(x)\,dx$ est dérivable presque partout et chacune des dérivées possibles coïncide presque partout avec $\ell(t)$.

II.2 Étude d'un cas particulier

a) et *b)*

Conditions : $\phi(x)$ et $\psi(x,\,y) \geq 0$ presque partout, et $\displaystyle\int \phi(x)\,dx + \int \psi(x,\,y)\,dxdy = 1$. (Il faut démontrer les implications dans les deux sens.)

Densités marginales de Λ : dans ce cas, en prenant $h(x,\,y) = f(x)$ on trouve $\ell_1(x) = \phi(x) + \displaystyle\int \psi(x,\,y)\,dy$ presque partout. Formule analogue pour ℓ_2.

II.3 Interprétation variationnelle de d_{VT} (pts)

a) Soit g une fonction bornée. Soient $h(x,\,y) = g(x) - g(y)$ et $k(x,\,y) = |g(x) - g(y)|$.

Par hypothèse, $\Pi(h) = \displaystyle\int g(x)q(x)\,dx - \int g(y)r(y)\,dy$.

Comme Π est une forme positive, on a l'inégalité

$$\int g(x)q(x)\,dx - \int g(y)r(y)\,dy \leq \Pi(k) = \Pi\left(k\mathbf{1}_{x \neq y}\right)\,,$$

et on sait que $\forall x,\,y,\ |g(x) - g(y)| \leq 1$ lorsque $0 \leq g \leq 1$. Ceci étant vrai pour toute fonction g telle que $0 \leq g \leq 1$, l'inégalité voulue en résulte par passage au sup dans les inégalités.

b) On suppose $d_{\mathrm{VT}}(q,\,r) > 0$. Il faut d'abord vérifier que Λ_0 est une forme linéaire positive telle que $\Lambda_0(\mathbf{1}) = 1$. On utilise pour cela l'identité $\min(q,\,r) + [q - r]_+ = q$. Finalement, d'après II.2 on obtient :

$$\ell_1 = \min(q,\,r) + [q - r]_+ = q \quad \text{et} \quad \ell_2 = \min(q,\,r) + [r - q]_+ = r\,.$$

c) On suppose toujours que $d_{\mathrm{VT}}(q,\,r) > 0$. On vérifie que $\Lambda_0(\mathbf{1}_{x \neq y}) = d_{\mathrm{VT}}(q,\,r)$. Ainsi $d_{\mathrm{VT}}(q,\,r)$ est la borne inférieure (atteinte) des $\Lambda(\mathbf{1}_{x \neq y})$ pour $\Pi \in \mathcal{L}(q,\,r)$.

COMMENTAIRE. *On dit que la mesure de probabilité Λ_0 est un couplage des mesures de probabilité de densités $\ell_1 = q$ et $\ell_2 = r$. Il existe un couplage optimal, défini ci-dessus.*

II.4 Démonstration, cas $n = 1$

Revenons à la définition de d_2. On part du fait que pour majorer par A la borne inférieure d'une partie non vide de $\mathbb{R}$, il suffit de majorer par A un élément de cette partie. Ici, on choisit Λ_0.

Avec un abus de notation,

$$\Lambda_0\left(\alpha(y)\,\mathbf{1}_{x \neq y}\right) = \int \alpha(y)\ [r(y)\ -\ q(y)]_+\ dy = \int \alpha(y)\,\sqrt{r(y)}\left[1\ -\ \frac{q(y)}{r(y)}\right]_+ \sqrt{r(y)}\,dy\,.$$

On utilise alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'hypothèse $\displaystyle\int \alpha^2(y)r(y)\,dy \leq 1$, puis on revient à la question I.2.e. Enfin, on passe à la borne supérieure en les fonctions α telles que $\displaystyle\int \alpha^2(y)r(y)\,dy \leq 1$.

Démarche analogue avec $\beta(x)$. Remarquons qu'on aurait aussi pu utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz directement dans l'espace $L^2([0,1],\ \sqrt{r(y)}\,dy)$.

COMMENTAIRE. *Le couplage optimal de II.3 est utilisé ici comme un "bon" couplage (on ne sait pas s'il est optimal ici) qui donne une bonne majoration de d_2.*

III

III.1 Une inégalité pour des sommes de variables aléatoires

a) On développe $\exp(\lambda^2/2)$ et $\mathrm{ch}\lambda$ en séries entières. On montre, directement ou par récurrence, que les coefficients du développement de $\exp(\lambda^2/2)$ sont $\geq$ ceux de $\mathrm{ch}\lambda$.

b) Ici encore, plusieurs possibilités. Nous en proposons trois.

Possibilité 1 : Utilisation directe de III.1.a et de la convexité de la fonction exponentielle afin de montrer que $e^{\lambda x} \leq \mathrm{ch}\lambda + x\,\mathrm{sh}\lambda$ pour les valeurs de x considérées, $x \in [-1,\ 1]$. En effet,

$$\mathrm{ch}\lambda\ +\ x\,\mathrm{sh}\lambda\ =\ \left(\frac{1+x}{2}\right)e^{\lambda}\ +\ \left(\frac{1-x}{2}\right)e^{-\lambda},$$

avec

$$\frac{1+x}{2} \geq 0, \quad \frac{1-x}{2} \geq 0, \quad \frac{1+x}{2} + \frac{1-x}{2} = 1\,.$$

Par convexité, ceci est $\geq \exp((1+x)\lambda/2\ -\ (1-x)\lambda/2)$, qui est égal à $\exp(\lambda x)$.

COMMENTAIRE. *Une figure est conseillée.*

Possibilité 2 : On fixe $\lambda > 0$ et on étudie la fonction $\phi(x) = \mathrm{ch}\lambda\ +\ x\,\mathrm{sh}\lambda\ -\ \exp(\lambda x)$ pour $-1 \leq x \leq 1$. Elle est concave et s'annule en $x = \pm 1$, d'où son signe sur $[-1,\ 1]$.

COMMENTAIRE. *Une figure est conseillée.*

Possibilité 3 : On cherche à démontrer directement que

$$e^{\lambda x}\ \leq\ \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\ +\ x\,\mathrm{sh}\lambda\,.$$

Considérons la fonction $\phi(x,\ \lambda) = \exp(\lambda^2/2) + x\,\mathrm{sh}\lambda - \exp(\lambda x)$ pour $\lambda \geq 0$. On a $\partial\phi/\partial\lambda = \lambda\exp(\lambda^2/2) + x\,\mathrm{ch}\lambda - x\exp(\lambda x)$. Comme $\forall x,\ \phi(x,\ 0) = 0$, il résulte d'inégalités analogues à celles de a) que $\forall\lambda \geq 0,\ \phi(-1,\ \lambda)$ et $\phi(1,\ \lambda)$ sont positifs. Enfin, la dérivée partielle seconde $\partial^2\phi/\partial x^2 = -\lambda^2\exp(\lambda x)$ est strictement négative pour $\lambda > 0$, donc à x fixé $\lambda > 0 \mapsto \phi(x,\ \lambda)$ est strictement concave. Comme elle prend des valeurs positives aux extrémités de l'intervalle $[-1,\ 1]$, il en résulte qu'elle prend des valeurs positives sur tout $[-1,\ 1]$, d'où le résultat.

COMMENTAIRE. *Une figure est conseillée.*

c), d) et *e)* Le synopsis est le suivant. Ici, on ne suppose pas que la loi de X_i admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Parce que $\exp(u+v) = \exp(u)\exp(v)$ et par indépendance, tout revient à montrer que $E(\exp(\lambda X)) \leq \exp(\lambda^2/2)$ pour tout $\lambda > 0$. On utilise l'inégalité admise et les hypothèses. On établit ensuite la même inégalité pour $-X$. On conclut en considérant la probabilité de la réunion de deux événements, d'où le facteur 2. Entrons dans les détails.

c) Par linéarité et monotonie, on déduit de III.1.b que

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda X}\right)\ \leq\ \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right),$$

puisque $\mathbb{E}(X) = 0$. De même pour $-X$.

COMMENTAIRE. *Dans le cas où la loi de X admet une densité r, on a* $\mathbb{E}(X) = \int_{-1}^{1} t\,r(t)\,dt$ *et* $\mathbb{E}\left(e^{\lambda X}\right) = \int_{-1}^{1} e^{\lambda t}\,r(t)\,dt$.

d) Montrons d'abord que

$$\mathbb{P}\{X \geq a\} \leq \exp\left(-\frac{a^2}{2}\right) \quad \text{pour tout } a > 0\,.$$

D'après l'inégalité de Chernoff (voir le début de la partie III) combinée avec III.2.c, on a, pour tout $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}\{X \geq a\} \leq \exp\left(-\left(\lambda\,a - \frac{\lambda^2}{2}\right)\right).$$

Le trinôme du second degré $-\lambda^2/2 + \lambda a$ atteint son maximum en $\lambda = a$, où il vaut $a^2/2$. On en déduit l'inégalité ci-dessus.

De plus, $\mathbb{P}\{-X \geq a\}$ vérifie la même inégalité.

La probabilité de la réunion de deux événements est inférieure ou égale à la somme des probabilités de ces deux événements. (Lorsque l'intersection de ces deux événements est de probabilité nulle, il y a égalité.) Puisque pour $a > 0$,

$$\{|X| \geq a\} = \{X \geq a\} \cup \{-X \geq a\}\,,$$

l'inégalité cherchée en résulte, avec son facteur 2.

REMARQUE. *Si $a > 1$, alors $\mathbb{P}(|X| \geq a) = 0$ et si $a \leq 1$, alors le terme de droite de l'inégalité (20) est $\geq 2\exp(-1/2) > 1$. Ceci permet de démontrer l'inégalité (20) directement, sans l'hypothèse que X est centrée ! Par contre, on ne peut pas démontrer ainsi que*

$$\mathbb{P}\{X \geq a\} \leq \exp\left(-\frac{a^2}{2}\right) \quad \textit{pour tout } a \geq 0\,.$$

En effet, $\exp(-1/2) < 1$. Cependant, si on supposait de plus que X est symétrique (donc que $\forall a$, $\mathbb{P}\{X \geq a\} = \mathbb{P}\{-X \geq a\}$) alors on obtiendrait dans ce cas que $\mathbb{P}\{X \geq a\} \leq \exp(-1/2)\exp(-a^2/2)$ pour tout $a \geq 0$.

e) On pourrait songer à appliquer l'inégalité que nous venons d'établir à la variable aléatoire centrée $Z = n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n} X_i$, mais elle prend ses valeurs dans l'intervalle $[-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$ et ne vérifie donc pas les hypothèses de III.1.d. Il faut s'y prendre un peu autrement.

En vue d'appliquer à nouveau l'inégalité de Chernoff, calculons $\mathbb{E}\left(e^{\lambda Z}\right)$. Par indépendance des variables aléatoires X_i et d'après III.1.c, on obtient

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda Z}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} e^{\lambda n^{-1/2} X_i}\right) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(e^{\lambda n^{-1/2} X_i}\right) \leq \prod_{i=1}^{n}\exp\left(\frac{\lambda^2}{2n}\right) = \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right).$$

On peut alors utiliser le même raisonnement que dans la question III.1.d, d'où la conclusion.

III.2 Optimalité ?

a) Équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1. Facteur intégrant $\exp(x^2/2)$.

b) On peut utiliser une intégration par parties (mais d'autres solutions sont existent). On a

$$1 - \Phi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dt = -\int_x^{+\infty} \frac{-t\, e^{-t^2/2}}{t\sqrt{2\pi}}\, dt\,.$$

Or, la fonction $-t\, e^{-t^2/2}$ est la dérivée de la fonction $e^{-t^2/2}$. On obtient donc

$$-\int_x^{+\infty} \frac{-t\, e^{-t^2/2}}{t\sqrt{2\pi}}\, dt = \frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{t^2\sqrt{2\pi}}\, dt\,.$$

Il reste à justifier le fait que l'intégrale dans le second membre est

$$o\left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dt\right)$$

quand $x \to +\infty$. Cela résulte d'un théorème du cours.

c) C'est impossible. En effet, considérons le cas de variables aléatoires X_i centrées, indépendantes et de même loi, prenant chacune les valeurs -1 et 1 avec probabilité $1/2$. Leur variance commune est 1.

D'après le théorème de la limite centrale qui s'applique ici (il faut vérifier les hypothèses) on a, pour tout $a \geq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\left|n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} X_i\right| \geq a\right\} = 2\,(1 - \Phi(a))\,.$$

Si l'inégalité était vraie $\forall n$, alors $\forall a \geq 0$, la limite ci-dessus serait $\leq A\exp(-\kappa a^2)$ avec $\kappa > 1/2$, par passage à la limite dans les inégalités.

Or d'après b), $1 - \Phi(a) \sim \varphi(a)/a$ quand $a \to +\infty$. Puisque le coefficient de a^2 de l'exponentielle dans $\varphi(a)$ est $-1/2$, on obtiendrait une contradiction.

IV

IV.1 Inégalités pour des fonctions convexes ou concaves sur $[0,\, 1]^n$

a) Traitons d'abord le cas où $n = 1$ et f est convexe. On peut, par exemple, exprimer $f(x) - f(y)$ en utilisant la formule de Taylor-Lagrange (ici, accroissements finis) ou celle de Taylor avec reste intégral.

Supposons d'abord que $x > y$. On a alors, puisque f' est croissante et que $0 < x - y \leq 1$,

$$f(x) - f(y) = \int_y^x f'(t)\, dt \leq \int_y^x f'(x)\, dt = (x - y) f'(x) \leq \left|f'(x)\right| \mathbf{1}_{x\neq y}\,.$$

De même, si $x < y$, on obtient $f(y) - f(x) \geq (y - x) f'(x)$, et on multiplie les deux membres par -1. Soulignons l'importance de l'hypothèse $0 \leq x,\, y \leq 1$.

b) Si $n \geq 1$, on applique le même raisonnement à $0 \leq t \leq 1 \mapsto f(tx + (1-t)y)$, qui est convexe (respectivement, concave) si f l'est, et dont la dérivée est

$$\frac{d}{dt} f\,(tx + (1-t)y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)\, \partial_i f\,(tx + (1-t)y)\,.$$

Commentaire. *Ces raisonnements reflètent directement le fait que si f est convexe et C^1, alors son graphe est situé au-dessus de tous ses espaces tangents. Un croquis est conseillé.*

IV.2 Résultats intermédiaires

a) Supposons que $\int \|\nabla f(x)\|^2 q(x)\,dx > 0$. Si $\Pi \in \mathcal{L}(q, r)$, alors, avec un abus de notation,

$$\int f(x)q(x)\,dx \;-\; \int f(y)r(y)\,dy \;=\; \Pi\,(f(x) \;-\; f(y)) \;\leq\; \Pi\left(\sum_{i=1}^{n} |\partial_i f(x)|\; \mathbf{1}_{x_i \neq y_i}\right)$$

$$\leq \quad \left(\int \|\nabla f(x)\|^2\, q(x)\,dx\right)^{1/2} \Pi\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i(x)\,\mathbf{1}_{x_i \neq y_i}\right),$$

où $\beta_i = |\partial_i f| / \left(\int \|\nabla f(x)\|^2 q(x)\,dx\right)^{1/2}$. On passe en $\sup_\beta$ puis en $\inf_\Pi$.

b) Même principe. Supposons $\int \|\nabla f(y)\|^2\, r(y)\,dy > 0$. Si $\Pi \in \mathcal{L}(q, r)$, on a

$$\int f(x)q(x)\,dx \;-\; \int f(y)r(y)\,dy \;\leq\; \Pi\left(\sum_{i=1}^{n} |\partial_i f(y)|\; \mathbf{1}_{x_i \neq y_i}\right)$$

$$= \quad \left(\int \|\nabla f(y)\|^2\, r(y)\,dy\right)^{1/2} \Pi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(y)\,\mathbf{1}_{x_i \neq y_i}\right),$$

où $\alpha_i = |\partial_i f| / \left(\int \|\nabla f(y)\|^2 r(y)\,dy\right)^{1/2}$.

IV.3 Deux inégalités de Sobolev logarithmiques

a) On explicite l'entropie dans ce cas, en utilisant le fait que pour tout réel positif t, on a la relation $\mathrm{Ent}_g(t\,m) \;=\; t\,\mathrm{Ent}_g(m)$ (voir question I.2.d) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ent}_r\left(m^f\right) \;&=\; \mathrm{Ent}_r\left(\frac{e^f}{R\left(e^f\right)}\right) \;=\; \frac{1}{R\left(e^f\right)}\,\mathrm{Ent}_r\left(e^f\right) \\
&=\; \frac{1}{R\left(e^f\right)}\left[\int f(y)\,e^{f(y)}\,r(y)\;dy \;-\; \left(\int e^{f(y)}\,r(y)\,dy\right)\left(\ln \int e^{f(y)}\,r(y)\,dy\right)\right] \\
&=\; \int f(y)\,r^f(y)\;dy \;-\; \ln \int e^{f(y)}\,r(y)\;dy\,,
\end{aligned}$$

puisque $R\left(e^f\right) = \int e^{f(y)}\,r(y)\;dy$. Or, l'inégalité de Jensen appliquée à la fonction logarithme (ou exponentielle) implique que

$$\ln \int e^{f(y)}\,r(y)\;dy \;\geq\; \int f(y)r(y)\,dy\,,$$

d'où la conclusion.

b) On utilise le résultat de IV.2.a, avec $q = r^f$:

$$\int f(x)\,r^f(x)\;dx \;-\; \int f(y)\,r(y)\;dy \;\leq\; \sqrt{2\,I_{r^f}\,(f)\;\mathrm{Ent}_{r^f}\left(\frac{r^f}{r}\right)}\,.$$

Or

$$I_{r^f}(f) = \int \|\nabla f(y)\|^2 \, r^f(y) \, dy = \frac{\int \|\nabla f(y)\|^2 \, e^{f(y)} \, r(y) \, dy}{\int e^{f(y)} \, r(y) \, dy} .$$

On obtient ainsi

$$\mathrm{Ent}_r\left(m^f\right) \leq \sqrt{2 \, I_{r^f}(f) \, \mathrm{Ent}_r\left(\frac{r^f}{r}\right)} ,$$

avec

$$\mathrm{Ent}_r\left(\frac{r^f}{r}\right) = \mathrm{Ent}_r\left(m^f\right) .$$

Finalement, en élevant au carré les deux membres de l'inégalité ci-dessus, puis en les divisant par la quantité positive $\mathrm{Ent}_r\left(m^f\right)$, on parvient à

$$\mathrm{Ent}_r\left(m^f\right) \leq 2 \, \frac{\int \|\nabla f(y)\|^2 \, e^{f(y)} \, r(y) \, dy}{R\left(e^f\right)} ,$$

d'où le résultat en multipliant les deux membres de l'inégalité par la quantité positive $R\left(e^f\right)$, et en exploitant la relation $R\left(e^f\right) \mathrm{Ent}_r\left(m^f\right) = \mathrm{Ent}_r\left(e^f\right)$.

c) Même principe, avec $d_2(r^f \,|\, r) \leq \sqrt{2 \, \mathrm{Ent}_r(m^f)}$.

IV.4 Une inégalité de Poincaré

Supposons f convexe, sinon on remplace par exemple f par $-f$ (ou bien on reprend le raisonnement à partir de l'inégalité relative au cas concave).

1. Il suffit de se ramener au cas où $R(f) = 0$, quitte à remplacer f par $f - R(f)$. En effet (formule de Huyghens)

$$\int (f(x) - R(f))^2 \, r(x) \, dx = \int f(x)^2 \, r(x) \, dx - (R(f))^2 .$$

2. L'idée générale est de remplacer f par εf ($\varepsilon > 0$ petit), puis de faire des développements limités en ε quand $\varepsilon \to 0$. Il s'agit alors de justifier les convergences d'intégrales dépendant du paramètre ε, quand $\varepsilon \to 0$. Pour cela, on utilise (par exemple) le théorème de convergence dominée de Lebesgue (TCD), ce qui est rendu possible du fait qu'en raison des hypothèses, f est continue sur le compact $[0,1]^n$, donc bornée, et que $\|\nabla f\|$ est bornée.

3. Remplaçons $\mathrm{Ent}_r(e^{\varepsilon f})$ par son expression. Après simplification,

$$\varepsilon \int f(x) \, e^{\varepsilon f(x)} r(x) \, dx \leq 2\varepsilon^2 \int \|\nabla f(x)\|^2 e^{\varepsilon f(x)} r(x) \, dx + \left(\int e^{\varepsilon f(x)} r(x) \, dx\right) \ln \int e^{\varepsilon f(x)} r(x) \, dx .$$

4. Comme expliqué ci-dessus, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int e^{\varepsilon f} \, r = 1$, donc $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \ln \int e^{\varepsilon f} \, r = 0$, tandis que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int \|\nabla f\|^2 e^{\varepsilon f} \, r = \int \|\nabla f\|^2 \, r$ et $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int f \, e^{\varepsilon f} \, r = \int f \, r = R(f) = 0$.

5. On doit examiner en détail $\int f \, e^{\varepsilon f} \, r$ et $\ln \int e^{\varepsilon f} \, r$.

6. Dans le premier cas, on écrit par exemple

$$\int f(x)\, e^{\varepsilon f(x)} r(x)\, dx = \varepsilon \int f(x) \left(\frac{e^{\varepsilon f(x)} - 1}{\varepsilon} \right) r(x)\, dx\,,$$

avec $|e^{\varepsilon f} - 1|/\varepsilon \leq |f| e^{|f|}$, ce qui permet (par exemple) d'utiliser le TCD.

7. Dans le second cas, on développe de la même manière à l'ordre 3, avec

$$6 \left| e^{\varepsilon f} - 1 - \varepsilon f - \varepsilon^2 f^2/2 \right| / \varepsilon^3 \leq |f|^3 e^{|f|}\,.$$

On obtient, puisqu'on a supposé que $R(f) = 0$,

$$\ln \int e^{\varepsilon f(x)} r(x)\, dx = \frac{\varepsilon^2}{2} \int f^2(x)\, r(x)\, dx + o\left(\varepsilon^2\right) \quad \text{quand } \varepsilon \to 0\,.$$

8. On divise les deux membres de cette inégalité par ε^2, puis on fait tendre ε vers 0. Par passage à la limite dans les inégalités, on trouve finalement

$$\int f^2(x)\, r(x)\, dx \leq 2 \int \|\nabla f(x)\|^2 r(x)\, dx + \frac{1}{2} \int f^2(x)\, r(x)\, dx\,.$$

Cela conduit ici à $C = 4$.

V

V.1 Cas concave

a) On se ramène au cas $R(f) = 0$ pour simplifier, et on utilise l'indication. Rappelons que $\int f(x) m(x) r(x)\, dx = \int f(x) q(x)\, dx$, puisque $m = q/r$.

C'est un trinôme du second degré en λ.

Variante 1 : Mise sous forme canonique du trinôme : pour tout λ, on a

$$\int \left(\lambda f(x) - \frac{\tau^2 \lambda^2}{2} \right) m(x)\, r(x)\, dx = \frac{\left(\int f(x)\, q(x)\, dx \right)^2}{2\tau^2} - \frac{\tau^2}{2} \left(\lambda - \frac{\int f(x) q(x)\, dx}{\tau^2} \right)^2.$$

Or, on a choisi $R(f) = 0$, c'est-à-dire $\int f(x) r(x)\, dx = 0$. D'après IV.2.b, on a

$$\int f(x)\, q(x)\, dx = \int f(x)\, q(x)\, dx - \int f(y)\, r(y)\, dy \leq \sqrt{2\, \tau^2\, \mathrm{Ent}_r\, (m)}\,.$$

Maintenant, ou bien $\int f(x) q(x)\, dx \leq 0$, ou bien $\int f(x) q(x)\, dx > 0$.

— Si $\int f(x) q(x)\, dx > 0$, l'inégalité cherchée se déduit alors directement par élévation au carré des deux membres de l'inégalité ci-dessus.

— Si $\int f(x) q(x)\, dx \leq 0$: dans ce cas, la quantité

$$\lambda \int f(x)\, q(x)\, dx - \frac{\tau^2 \lambda^2}{2}$$

ne prend que des valeurs $\leq 0 \leq \mathrm{Ent}_r(m)$ lorsque λ reste ≥ 0.

Variante 2 : Considérons la fonction $\psi(\lambda) = \lambda \int fq - \tau^2\lambda^2/2$ pour $\lambda \geq 0$, et cherchons sa valeur maximale. Ou bien $\int fq \leq 0$, auquel cas $\forall\lambda \geq 0$, $\psi(\lambda) \leq 0 \leq \mathrm{Ent}_r(m)$; ou bien $\int fq > 0$. Dans ce cas, la valeur maximale de $\psi(\lambda)$ pour $\lambda \geq 0$ est $(\int fq)^2/2\tau^2$. Or, d'après IV.2.b on a

$$\int f(x)\,q(x)\;dx \;-\; \int f(y)\,r(y)\;dy \;\leq\; \sqrt{2\,\tau^2\,\mathrm{Ent}_r\left(\frac{q}{r}\right)}\,.$$

Puisqu'on a supposé que $R(f) = \int fr = 0$ et que $\int fq > 0$, on a $0 < \int fq \leq \sqrt{2\tau^2\mathrm{Ent}_r(m)}$, d'où le résultat cherché en élevant les deux membres au carré.

Variante 3 : Une brève étude de la fonction convexe $\lambda > 0 \mapsto b\lambda/2 + c/\lambda$ (avec $b > 0$ et $c > 0$) montre qu'elle admet un seul minimum, qu'on peut déterminer en annulant sa dérivée. Pour $b = \tau^2$ et $c = \mathrm{Ent}_r(m)$,

$$\int f(x)q(x)\,dx \;-\; \int f(y)r(y)\,dy \;\leq\; \sqrt{2bc} \;\leq\; \frac{b\lambda}{2} \;+\; \frac{c}{\lambda}$$

pour tout $\lambda > 0$. (Rappelons que $m = q/r$, $\int m\,r = 1$, $R(f) = \int f\,r = 0$ et $\lambda > 0$.) On multiplie les deux membres de l'inégalité ci-dessus par λ, puis on retranche $b\lambda^2/2$ des deux côtés.

b) Supposons encore que $R(f) = 0$. Notant ℓ la fonction $\lambda f - \lambda^2\tau^2/2$, le résultat de V.1.a s'écrit $\int \ell(x)\,m(x)\,r(x)\,dx \leq \mathrm{Ent}_r(m)$. Choisissons m de la forme exponentielle $m = e^\ell/R(e^\ell)$, ce qui revient à choisir $q = e^\ell r/R(e^\ell)$. L'entropie $\mathrm{Ent}_r(m)$ sécrit alors, comme dans IV.3,

$$\mathrm{Ent}_r(m) = \int \frac{\ell(x)e^{\ell(x)}}{R\left(e^\ell\right)} r(x)\,dx \;-\; \ln\int e^{\ell(x)}r(x)\,dx = \int \ell(x)m(x)r(x)\,dx \;-\; \ln\int e^{\ell(x)}r(x)\,dx\,.$$

Avec ce choix, l'inégalité $\int \ell\,m\,r\,dx \leq \mathrm{Ent}_r(m)$ se réécrit $\ln\int e^\ell r\,dx \leq 0$, et on peut alors conclure, puisque cela s'écrit aussi

$$\int e^{\lambda f(x) \,-\, \lambda^2\tau^2/2}\,r(x)\;dx \;\leq\; 1\,.$$

c) Supposons pour simplifier que $\tau = 1$. Le résultat ci-dessus se traduit par la formule de transfert

$$\mathbb{E}(\phi\,(X_1,\ldots,X_n)) = \int_{[0,\,1]^n} \phi\,(x_1,\ldots,x_n)\;r_1(x_1)\ldots r_n(x_n)\,dx_1\ldots dx_n\,,$$

r_i désignant la densité de la loi de la variable aléatoire X_i $(1 \leq i \leq n)$. On obtient

$$\mathbb{E}\{\exp\left(\lambda\left(f\,(X_1,\ldots,X_n) \;-\; \mathbb{E}[f\,(X_1,\ldots,X_n)]\right)\right)\} \;\leq\; \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)$$

pour tout $\lambda > 0$. On applique l'inégalité de Chernoff à $f(X_1,\ldots,X_n) - \mathbb{E}(f(X_1,\ldots,X_n))$, puis on fait apparaître le trinôme $\lambda^2/2 \,-\, \lambda a \,+\, a^2/2$ dans l'exposant, et on choisit $\lambda = a$.

V.2 Cas convexe

On suppose la fonction $\|\nabla f(x)\|^2$ majorée par une quantité finie ρ^2_{max} sur $]0,\,1[^n$. On obtient l'analogue de l'inégalité de concentration du cas concave, avec ρ^2_{max} à la place de τ^2. Il suffit de reprendre le raisonnement de V.1 point par point, en remplaçant IV.2.b par IV.2.a, et en majorant $I_q(f)$ par ρ^2_{max}.

V.3 Une inégalité dans les espaces de Banach

QUESTION V.3 : Soit E un espace de Banach, de norme $\|\cdot\|_{\mathrm{E}}$. Soit E' son dual topologique (c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E), muni de la norme associée $\|\cdot\|_{\mathrm{E}'}$. Soient $b_1, \ldots, b_n$ des éléments de E.

Montrer que si les variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ prennent leurs valeurs dans $[-1,\, 1]$ et si leurs lois respectives admettent chacune une densité strictement positive sur $[-1,\, 1]$, alors pour tout $a \geq 0$,

$$\mathbb{P}\left\{ \left| \left\| \sum_{i=1}^{n} X_i\, b_i \right\|_{\mathrm{E}} - \mathbb{E}\left(\left\| \sum_{i=1}^{n} X_i\, b_i \right\|_{\mathrm{E}} \right) \right| \geq a \right\} \leq 2 \exp\left(- \frac{a^2}{8\sigma_n^2} \right), \qquad (1)$$

où

$$\sigma_n^2 = \sup_{\xi \in E' \,:\, \|\xi\|_{\mathrm{E}'} \leq 1} \sum_{i=1}^{n} \left(\xi\,(b_i)\right)^2 , \qquad (2)$$

la borne supérieure portant sur l'ensemble des formes linéaires continues ξ sur E de norme associée $\|\xi\|_{\mathrm{E}'} \leq 1$.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE : Considérons la fonction f définie par $f(x_1, \ldots, x_n) = \|\sum_{i=1}^{n} x_i b_i\|_{\mathrm{E}}$, les x_i appartenant à l'intervalle $[-1,\, 1]$. Utilisons la formule variationnelle

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i\, b_i \right\|_{\mathrm{E}} = \sup_{\|\xi\|_{\mathrm{E}'} \leq 1} \xi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i \right) = \sup_{\|\xi\|_{\mathrm{E}'} \leq 1} \sum_{i=1}^{n} x_i \xi\,(b_i)\ .$$

(La dernière égalité pourrait permettre de se ramener au cas d'un espace vectoriel de dimension finie.) En vertu, par exemple, du théorème de Hahn-Banach (ou encore de Banach-Alaoglu selon lequel la boule unité de E' est compacte pour la topologie faible), il existe une forme linéaire continue $\xi = \xi^\star$ dépendant de $x_1, \ldots, x_n$ telle que $\|\xi^\star\|_{\mathrm{E}'} \leq 1$ et que $f(x_1, \ldots, x_n) = \xi^\star(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i)$. On a alors

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} y_i\, b_i \right\|_{\mathrm{E}} \geq \xi^\star \left(\sum_{i=1}^{n} y_i b_i \right)$$

pour tout n-uple $(y_1, \ldots, y_n)$, donc

$$\begin{aligned} f\,(x_1, \ldots, x_n) - f\,(y_1, \ldots, y_n) &\leq \xi^\star \left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i \right) - \xi^\star \left(\sum_{i=1}^{n} y_i b_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)\, \xi^\star\,(b_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|\, L_i\,(x_1, \ldots, x_n)\ , \end{aligned}$$

où $L_i(x) = |\xi^\star(b_i)|$, de sorte que $L^2(x) \leq L_{\max}^2 = \sigma^2$. On conclut via $x_i \in [-1,\, 1]$.

VI Cas $n \geq 2$

n = 2 . — Introduisons la densité de probabilité q_1 définie par $q_1(x_1) = \displaystyle\int_0^1 q(x_1,\, x_2)\, dx_2$ sur $[0,\, 1]$. Il résulte de l'hypothèse $q(x_1,\, x_2) > 0$ pour tous x_1 et x_2 de $[0,\, 1]$ que $q_1(x_1) > 0$ pour tout x_1 de $[0,\, 1]$. Pour chaque x_1 de $[0,\, 1]$, on définit

$$q_2\,(x_2\,|x_1\,) \;=\; \frac{q\,(x_1,\, x_2)}{q_1\,(x_1)}\,. \tag{3}$$

Pour chaque x_1 de $[0,\, 1]$, la fonction $x_2 \mapsto q_2(x_2|\, x_1)$ est une densité de probabilité, que nous noterons $q_2(\bullet|\, x_1)$. C'est la densité conditionnelle de X_2 sachant X_1. Définissons maintenant

$$E_1 \;=\; \mathrm{Ent}_{r_1}\left(\frac{q_1}{r_1}\right) \quad \text{et} \quad E_2 \;=\; \int_0^1 \mathrm{Ent}_{r_2}\left(\frac{q_2\,(\bullet\,|x_1\,)}{r_2}\right)\, q_1\,(x_1)\;\, dx_1\,. \tag{4}$$

On montre que (tensorisation de l'entropie) :

$$\mathrm{Ent}_r\left(\frac{q}{r}\right) \;=\; E_1 \,+\, E_2\,. \tag{5}$$

Nous allons montrer que pour l'analogue de la forme Λ définie en II (voir ci-dessous), on a

$$\sup_{\alpha} \quad \Lambda\,(h) \;\leq\; E_1 \,+\, E_2 \tag{6}$$

pour $h(x,\, y) \;=\; \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \alpha_i(y)\, \mathbf{1}_{x_i \neq y_i}$, la borne supérieure étant prise sur l'ensemble des fonctions $\alpha =$ $(\alpha_1,\, \alpha_2)$ telles que $\displaystyle\int \sum_{i=1}^{2} \alpha_i^2(y)\; r(y)\;\; dy \leq 1$. On procéderait de manière similaire pour $d_2(r|\, q)$, en intervertissant q et r. Soient

$$h_1\,(x_1,\, x_2,\, y_1,\, y_2) \;=\; \alpha_1\,(y_1,\, y_2)\; \mathbf{1}_{x_1 \neq y_1} \quad \text{et} \quad h_2\,(x_1,\, x_2,\, y_1,\, y_2) \;=\; \alpha_2\,(y_1,\, y_2)\; \mathbf{1}_{x_2 \neq y_2}\,.$$

Nous allons montrer que si $\displaystyle\int \sum_{i=1}^{2} \alpha_i^2(y)\; r(y)\;\; dy \leq 1$, alors $\Lambda(h_1) \leq \sqrt{2\, E_1}$ et $\Lambda(h_2) \leq \sqrt{2\, E_2}$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|a_1 b_1 + a_2 b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\; \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$, on en déduira (**??**), d'où la première moitié de l'inégalité cherchée via la définition (21).

Plutôt que de détailler les calculs, mieux vaut d'abord indiquer comment est construite la forme linéaire positive (i.e., la mesure de probabilité) Λ. Le but de cette construction est d'obtenir un couplage optimal entre les densités de probabilité q et r en enchaînant le couplage optimal $\Lambda_1 =$ $\Lambda_1(dx_1,\, dy_1)$ entre q_1 et r_1 (construit comme en II) et, pour chaque couple de valeurs possibles x_1 et y_1, le couplage conditionnel optimal $\Lambda_2(\bullet|x_1,\, y_1) = \Lambda_2(dx_2,\, dy_2|x_1,\, y_1)$ entre les entre les densités conditionnelles $q_2(\bullet|x_1)$ et $r_2(\bullet|y_1)$. Comme r est ici une densité produit, $r_2(\bullet|y_1)$ est indépendante de y_1.

Soient (par analogie avec II)

$$\phi_1(x_1) \;=\; \min\,(q_1(x_1),\, r_1(x_1)), \qquad \phi_2\,(x_2\,|x_1\,) \;=\; \min\,(q_2\,(x_2\,|x_1\,)\,,\, r_2(x_2)) \tag{7}$$

et

$$\begin{aligned} \psi_1(x_1,\, y_1) \;\;&=\;\; \frac{[q_1(x_1) \,-\, r_1(x_1)]_+\, [r_1(y_1) \,-\, q_1(y_1)]_+}{d_{\mathrm{VT}}(q_1,\, r_1)}\,, \\ \psi_2\,(x_2,\, y_2\,|x_1\,) \;\;&=\;\; \frac{[q_2\,(x_2\,|x_1\,) \,-\, r_2(x_2)]_+\, [r_2(y_2) \,-\, q_2\,(y_2\,|x_1\,)]_+}{d_{VT}\,(q_2\,(\cdot\,|x_1\,)\,,\, r_2)}\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Avec les notations introduites, la mesure de probabilité $\Lambda_1(dx_1,\, dy_1)$ est définie, avec un abus de notation explicité ci-dessous, par

$$\Lambda_1\,(dx_1,\, dy_1) \;=\; \phi_1(x_1)\, \mathbf{1}_{x_1=y_1}(dx_1) \;+\; \psi_1(x_1,\, y_1)\, dx_1 dy_1\,,$$

où $\mathbf{1}_{x_1=y_1}(dx_1)$ désigne la mesure de probabilité concentrée sur la diagonale $x_1 = y_1$ et uniforme sur celle-ci. De même,

$$\Lambda_2\,(dx_2,\, dy_2\,|x_1,\, y_1\,) \;=\; \phi_2\,(x_2\,|x_1\,)\; \mathbf{1}_{x_2=y_2}(dx_2) \;+\; \psi_2\,(x_2,\, y_2\,|x_1\,)\; dx_2 dy_2\,.$$

Pour enchaîner ces couplages, on forme le produit

$$\Lambda\,(dx_1,\, dy_1,\, dx_2,\, dy_2) \;=\; \Lambda_1\,(dx_1,\, dy_1) \otimes \Lambda_2\,(dx_2,\, dy_2\,|x_1,\, y_1\,)\;,$$

défini sur les pavés par

$$\Lambda\,(A_1 \times B_1 \times A_2 \times B_2) \;=\; \int_{A_1\times B_1} \Lambda_1\,(dx_1,\, dy_1)\, \Lambda_2\,(A_2 \times B_2\,|x_1,\, y_1\,)\;.$$

Notons E l'espace entier. La première marginale est donc définie par

$$\Lambda\,(A_1 \times E \times A_2 \times E) \;=\; \int_{A_1\times E} \Lambda_1\,(dx_1,\, E)\, \Lambda_2\,(A_2 \times E\,|x_1,\, y_1\,)\;,$$

donc par

$$\int_{A_1\times A_2} q_1\,(x_1)\, q_2\,(x_2\,|x_1\,)\; dx_1 dx_2\,,$$

c'est donc bien la loi de densité $q(x_1,\, x_2)$, et on a le résultat analogue pour la seconde marginale.

Traduisons cela dans le formalisme de II. Pour toute fonction $h : [0,\, 1]^4 \to \mathbb{R}$ bornée mesurable, posons

$$\begin{aligned}
\Lambda(h) \;\;=\;\; & \int \phi_1\,(x_1)\, \phi_2\,(x_2\,|x_1\,)\; h\,(x_1,\, x_2,\, x_1,\, x_2)\;\; dx_1\, dx_2 \\
& + \int \phi_1\,(x_1)\, \psi_2\,(x_2,\, y_2\,|x_1\,)\; h\,(x_1,\, x_2,\, x_1,\, y_2)\;\; dx_1\, dx_2\, dy_2 \\
& + \int \phi_2\,(x_2\,|x_1\,)\, \psi_1\,(x_1,\, y_1)\; h\,(x_1,\, x_2,\, y_1,\, x_2)\;\; dx_1\, dx_2\, dy_1 \\
& + \int \psi_1\,(x_1,\, y_1)\, \psi_2\,(x_2,\, y_2\,|x_1\,)\; h\,(x_1,\, x_2,\, y_1,\, y_2)\;\; dx_1\, dx_2\, dy_1\, dy_2\,.
\end{aligned} \tag{9}$$

On vérifie que Λ est bien une forme linéaire positive telle que $\Lambda(\mathbf{1}) = 1$, et qu'elle admet les densités de probabilité marginales $\ell_1 = q$ et $\ell_2 = r$, c'est-à-dire que $\Lambda \in \mathcal{L}(q,\, r)$.

Formant $\Lambda_1(dx_1,\, dy_1) \otimes \Lambda_2(dx_2,\, dy_2|x_1,\, y_1)$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \phi_1(x_1)\phi_2\,(x_2\,|x_1\,)\; \mathbf{1}_{x_1=y_1}(dx_1)\, \mathbf{1}_{x_2=y_2}(dx_2) \;+\; \phi_1(x_1)\psi_2\,(x_2,\, y_2\,|x_1\,)\; \mathbf{1}_{x_1=y_1}(dx_1)\, dx_2 dy_2 \\
& + \psi_1(x_1,\, y_1)\phi_2\,(x_2\,|x_1\,)\; dx_1 dy_1\, \mathbf{1}_{x_2=y_2}(dx_2) \;+\; \psi_1(x_1,\, y_1)\psi_2\,(x_2,\, y_2\,|x_1\,)\; dx_1 dy_1 dx_2 dy_2\,.
\end{aligned}$$

On démontre que l'on peut encore définir $\Lambda(h)$ pour les fonctions

$$h_1\,(x_1,\, x_2,\, y_1,\, y_2) \;=\; \alpha_1\,(y_1,\, y_2)\; \mathbf{1}_{x_1\neq y_1} \quad \text{et} \quad h_2\,(x_1,\, x_2,\, y_1,\, y_2) \;=\; \alpha_2\,(y_1,\, y_2)\; \mathbf{1}_{x_2\neq y_2}\,,$$

ainsi que pour

$$h_3\,(x_1,\, x_2,\, y_1,\, y_2) \;=\; \beta_1\,(x_1,\, x_2)\; \mathbf{1}_{x_1\neq y_1} \quad \text{et} \quad h_4\,(x_1,\, x_2,\, y_1,\, y_2) \;=\; \beta_2\,(x_1,\, x_2)\; \mathbf{1}_{x_2\neq y_2}\,,$$

pourvu que les intégrales

$$\int \alpha_i^2\,(y_1,\, y_2)\; r\,(y_1,\, y_2)\;\; dy_1\, dy_2 \quad \text{et} \quad \int \beta_i^2\,(x_1,\, x_2)\; q\,(x_1,\, x_2)\;\; dx_1\, dx_2$$

soient finies.

Nous allons considérer seulement le cas de h_1 et h_2, c'est analogue pour h_3 et h_4.

— Pour h_1, on peut mener les calculs directement : à cause du facteur $\mathbf{1}_{x_1 \neq y_1}$, il ne reste que (notations abrégées, avec $x_2 = y_2$ dans la première intégrale) :

$$\Lambda(h_1) \;=\; \int \phi_2\, \psi_1\, \alpha_1\,(y_1,\, y_2)\;\, dx_1 dy_1 dy_2 \;+\; \int \psi_1\, \psi_2\, \alpha_1\,(y_1,\, y_2)\;\, dx_1 dx_2 dy_1 dy_2\,.$$

Or, $\phi_2 + \int \psi_2\, dx_2 = r_2$. Comme de plus $\int \psi_1\, dx_1 = [1 - q_1/r_1]_+ r_1$, on obtient le rśultat en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et I.

— Pour h_2, il semble impossible de ne pas utiliser la mesure $\Lambda_1(dx_1,\, dy_1)$. En intégrant par rapport à x_2 dans l'expression de $\Lambda(h_2)$, on obtient

$$\Lambda(h_2) \;=\; \int \alpha_2\,(y_1,\, y_2)\; \left[1 \;-\; \frac{q_2}{r_2}\right]_+ (y_2|\, x_1)\;\, r_2(y_2)\, dy_2\, \Lambda_1\,(dx_1,\, dy_1)\;\, .$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux intégrales par rapport à $r_2(y_2)\, dy_2\;\, \Lambda_1(dx_1,\, dy_1)$. Dans un des facteurs, on peut intégrer $\Lambda_1(dx_1,\, dy_1)$ en x_1, ce qui donne la marginale $r_1(y_1)\, dy_1$ et conduit à $\sqrt{\int \alpha_i^2 r\, dy_1 dy_2}$. Dans l'autre, on intègre $\Lambda_1(dx_1,\, dy_1)$ en y_1, ce qui donne la marginale $q_1(x_1)\, dx_1$ et, par I, conduit à $\sqrt{2\, E_2}$.

— C'est ce schéma qui se généralise au cas $n \geq 2$, voir ci-dessous.

— Pour conclure, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|a_1 b_1 \,+\, a_2 b_2| \,\leq\, \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\;\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$, où on prend $a_i \,=\, \sqrt{2\, E_i}$ et $b_i \,=\, \sqrt{\int \alpha_i^2 r\, dy_1 dy_2}$, avec $\int \sum_{i=1}^{2} \alpha_i^2 r\, dy_1 dy_2 \leq 1$.

Cas général . — On définit

$$x^{(j)} = (x_1, \ldots, x_j) \quad \text{et} \quad y^{(j)} = (y_1, \ldots, y_j)\;\, ,$$

les densités marginales partielles $q^{(j)}(x^{(j)})$ et $r^{(j)}(y^{(j)})$ (qui est le produit $r_1(y_1) \ldots r_j(y_j)$), obtenues par intégrations partielles de $q(x)$ et de $r(y)$, les densités de probabilité conditionnelles $q_j(x_j|\, x^{(j-1)})$ ($j \geq 2$) et $r_j(y_j|\, y^{(j-1)})$ (qui se réduit à $r_j(y_j)$), les entropies partielles

$$E_j \;=\; \int \mathrm{Ent}_{r_j} \left(\frac{q_j\, (\bullet\, | x^{(j-1)})}{r_j} \right)\, q^{(j-1)}\, \left(x^{(j-1)}\right)\;\, dx^{(j-1)}\,,$$

les couplages conditionnels optimaux $\Lambda_j(dx_j,\, dy_j|x^{(j-1)},\, y^{(j-1)})$ ($j \geq 2$), et les couplages enchaînés partiels optimaux

$$\Lambda^{(j)}\left(dx^{(j)},\, dy^{(j)}\right) \;=\; \Lambda_1\,(dx_1,\, dy_1) \otimes \Lambda_2\,(dx_2,\, dy_2\,|x_1,\, y_1\,) \otimes \ldots \otimes \Lambda_j\, \left(dx_j,\, dy_j\, \middle|\, x^{(j-1)},\, y^{(j-1)}\right)\, .$$

Les marginales de $\Lambda_j(dx_j,\, dy_j | x^{(j-1)},\, y^{(j-1)})$ sont $q_j(\bullet | \, x^{(j-1)})$ et r_j :

$$\int_{y_j} \Lambda_j \left(dx_j,\, dy_j \left| x^{(j-1)},\, y^{(j-1)} \right.\right) \;=\; q_j \left(x_j \left| x^{(j-1)} \right.\right) \, dx_j$$

et

$$\int_{x_j} \Lambda_j \left(dx_j,\, dy_j \left| x^{(j-1)},\, y^{(j-1)} \right.\right) \;=\; r_j \left(y_j \right) \, dy_j \,.$$

D'autre part,

$$\int_{y_j} \mathbf{1}_{x_j \neq y_j} \, \Lambda_j \left(dx_j,\, dy_j \left| x^{(j-1)},\, y^{(j-1)} \right.\right) \;=\; \left[q_j \left(x_j \left| x^{(j-1)} \right.\right) \;-\; r_j \left(x_j \right) \right]_+ \, dx_j$$

et

$$\int_{x_j} \mathbf{1}_{x_j \neq y_j} \, \Lambda_j \left(dx_j,\, dy_j \left| x^{(j-1)},\, y^{(j-1)} \right.\right) \;=\; \left[r_j \left(y_j \right) \;-\; q_j \left(y_j \left| x^{(j-1)} \right.\right) \right]_+ \, dy_j \,.$$

Il faut établir des analogues pour des fonctions $\alpha_j(y) \; \mathbf{1}_{x_j \neq y_j}$ ou $\beta_j(x) \; \mathbf{1}_{x_j \neq y_j}$. Dans le cas des fonctions $\alpha_j(y) \; \mathbf{1}_{x_j \neq y_j}$, par exemple, on procède de manière similaire au cas h_2 ci-dessus : on intègre par rapport à $dx_{j+1} \, \ldots \, dx_n$ dans l'expression de

$$\Lambda^{(n)} \left(\alpha_j(y) \mathbf{1}_{x_j \neq y_j} \right) \,,$$

puis on intègre $\mathbf{1}_{x_j \neq y_j} \;\; \Lambda_j(dx_j,\, dy_j | x^{(j-1)},\, y^{(j-1)})$ par rapport à dx_j, ce qui donne $[r_j(y_j) - q_j(y_j | x^{(j-1)})]_+ \; dy_j$. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux intégrales par rapport à la mesure

$$\prod_{k=j}^{n} r_k(y_k) \, dy_k \, \Lambda^{(j-1)} \left(dx^{(j-1)},\, dy^{(j-1)} \right) \,.$$

Dans un des facteurs, on intègre $\Lambda^{(j-1)}$ en $x^{(j-1)}$, ce qui conduit à $\sqrt{\int \alpha_j^2 r \, dy}$. Dans l'autre, on intègre $\Lambda^{(j-1)}$ en $y^{(j-1)}$, ce qui conduit à $\sqrt{2 \, E_j}$. On conclut alors comme ci-dessus.

Conclusion . — L'intérêt de cette méthode par enchaînement de couplages optimaux est de permettre des extensions à des situations où les variables aléatoires X_i ne sont plus indépendantes, mais seulement asymptotiquement indépendantes en un certain sens (par exemple, une classe de chaînes de Markov), ou encore dépendent les unes des autres par des mécanismes d'interaction locale (systèmes de particules).

La partie I a permis à tous les candidats de s'exprimer. Tout candidat ayant préparé l'agrégation aurait dû savoir la traiter sans erreur.

Pour les questions I.2.a et I.2.b, beaucoup de candidats ont à bon escient construit un tableau de variations. Mais signalons de trop fréquentes erreurs dans le calcul de dérivées ! Ces erreurs ont été sévèrement sanctionnées. Signalons aussi que pour la question de démarrage, on attendait l'utilisation de critères simples, et pas le retour aux racines de la convexit.

La question I.3 requiert un minimum de familiarité avec l'intégrale de Lebesgue sur les réels. La question I.3.a a en général été traitée correctement. Par contre la question I.3.b, abordée par une grande majorité des candidats, s'est révélée très sélective. On note beaucoup d'erreurs élémentaires concernant l'emploi de a_+, a_- et $|a|$. De nombreux candidats ont construit de faux raisonnements pour montrer qu'ici on avait ici $\sup\limits_{0\leq f\leq 1} |A(f)| = \sup\limits_{0\leq f\leq 1} A(f)$. L'idée d'introduire $f = \mathbf{1}_{q\geq r}$ a rencontré davantage de succès.

La partie II a permis elle aussi à presque tous les candidats d'accumuler des points, et a été sélective. La question II.1 a permis de vérifier la compréhension de la notion de "presque partout". Rappelons que les densités ℓ_i et k_i (i=1, 2) ne sont pas nécessairement bornées, et que par conséquent on ne peut pas choisir $f = \ell_i - k_i$, comme cela a été fait assez régulièrement.

La question II.2 a testé la compréhension de ce qu'est une CNS. On y attendait une démonstration de ce que les conditions $\phi \geq 0$ p.p. et $\psi \geq 0$ p.p. sont nécessaires. Cette attente a bien souvent été déçue.

Les questions II.3 et II.4 demandent une bonne compréhension de l'énoncé, ainsi qu'un peu de dynamisme. Pour II.3.a, relativement peu de candidats ont pensé à introduire $h(x,\, y) = f(x) - f(y)$, f étant une fonction quelconque à valeurs dans $[0,\, 1]$, puis à utiliser la positivité de Π. Quant à II.3.b, il fallait vérifier que Λ_0 est bien une forme linéaire positive telle que $\Lambda_0(\mathbf{1}) = 1$, puis calculer ses densités marginales, et enfin calculer $\Lambda_0(\mathbf{1}_{x\neq y})$. On devait utiliser l'identité $\min(a,\, b) + [a-b]_+ = a$. Pour être complet dans II.3.c, il aurait fallu montrer que (12) restait vraie dans le cas $d_{\mathrm{VT}}(q,\, r) = 0$, même si l'énoncé suggérait implicitement, en raison de la formulation de la question II.3.b, de se limiter au cas $d_{\mathrm{VT}}(q,\, r) > 0$.

Pour II.4, il fallait prendre l'initiative d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales : trop peu de candidats ont mené à bien le traitement de cette question, qui est pourtant plutôt facile.

La partie III est une partie autonome contenant des questions de théorie des probabilités. La plupart des candidats l'ont abordée. L'inégalité de Chernoff est admise et rappelée. Son utilisation, combinée avec le passage à la valeur absolue, est simple mais demande un peu de savoir-faire. Des questions préparatoires utilisent des séries entières et la convexité, et testent des connaissances élémentaires sur les équations différentielles et l'analyse asymptotique. Ces questions préparatoires (III.1.a et b, III.2.a et b) n'ont aucun rapport avec la théorie des probabilités. Elles ont été redoutablement sélectives. La question III.2.c est nettement plus difficile.

Rappelons, à propos de la question III.1.a, que les rayons de convergence du développement en série entière de $\exp(\lambda^2/2)$ et $\mathrm{ch}\lambda$ sont infinis, et qu'il ne faut pas confondre développement en série entière et développement limité ... La question III.1.b a donné lieu à un surprenant phénomène collectif : de très nombreux candidats ont cru qu'il fallait ici aussi comparer des développement en série entière. Malheureusement, ils ont alors appuyé leur comparaison sur la proposition : " $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [-1,\, 1]$, $x^n \leq x$ ". Mais l'inégalité est fausse lorsque $-1 \leq x < 0$ et n impair ! L'argument de convexité n'a été proprement utilisé que dans une minorité de copies.

Dans les questions III.1.c, d et e, on ne suppose pas que la loi de X_i admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. On conclut III.1.c en considérant la probabilité de la réunion de deux événements, d'où le facteur 2, ce qui n'a été clairement explicité que relativement peu souvent. Dans III.1.d, quelques candidats ont judicieusement pensé à indiquer que le trinôme du second degré $-\lambda^2/2 + \lambda a$ atteint son maximum en $\lambda = a$, où il vaut $a^2/2$, et que c'est là la raison de ce choix de λ. Dans III.1.e, des candidats ont envisagé d'appliquer l'inégalité (20) à la variable aléatoire centrée $Z = n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} X_i$, mais elle prend ses valeurs dans l'intervalle $[-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$ et ne vérifie donc pas les hypothèses de III.1.d. D'autres ont appliqué l'inégalité (20) à $\bar{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$, qui vérifie les hypothèses. Mais cela les conduisait à

$$\mathbb{P}\{|Z| \geq a\} \leq 2 \exp\left(-\frac{a^2}{2n}\right) \quad \text{avec } n \geq 1\,,$$

ce qui ne convenait pas puisque $\exp(-a^2/2n) \geq \exp(-a^2/2)$ pour $n \geq 1$. D'autres encore ont essayé de suivre les pistes partant de $\mathbb{P}\{|\sum_{i=1}^{n} X_i| \geq a\} \leq \mathbb{P}\{\sum_{i=1}^{n} |X_i| \geq a\}$, mais leurs chemins se sont ensablés : par exemple, il est *faux* que $\mathbb{P}\{\sum_{i=1}^{n} |X_i| \geq a\} \leq \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n}\{|X_i| \geq a\})$! Ou encore, s'il est vrai que $\mathbb{P}\{\sum_{i=1}^{n} |X_i| \geq a\} \leq \mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n}\{|X_i| \geq a/n\})$, cela ne conduit via (20) qu'au majorant $2n \exp(-a^2/2n)$.

À la question III.2.a, on attendait que les candidats reconnaissent une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, et en déduisent directement la structure de l'ensemble des solutions, quitte à introduire le facteur intégrant $\exp(x^2/2)$. Or trop souvent on a seulement pu lire des réponses qui suivaient le schéma $y'/y = -x$ donc $\ln|y| = -x^2/2 +$ cte (la valeur absolue n'étant pas toujours présente !), donc $y = C\exp(-x^2/2)$, parfois agrémenté de l'évocation (ou de l'invocation) du théorème de Cauchy-Lipschitz, mais sans indication précise.

La question d'analyse asymptotique III.2.b a donné lieu à toutes sortes de graves erreurs. Typiquement : après intégration par parties, il s'agit de montrer que

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{t^2}\, dt = o\left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt\right)$$

quand $x \to +\infty$, ce qui est beaucoup plus exigeant que de montrer seulement que cette intégrale tend vers 0. Il est très surprenant de trouver autant de candidats à l'agrégation de mathématiques qui croient que pour montrer que $u \sim v$, il suffit de montrer que $u - v$ tend vers 0. De telles lacunes sont graves.

La question III.2.c a été assez largement abordée, mais elle n'a été traitée correctement que dans un très petit nombre de copies. Les candidats qui ont abordé cette question ont en général compris que le théorème de la limite centrale (curieusement appelé "loi des grands nombres" dans quelques copies) était en jeu. Mais la question de la variance a beaucoup trop souvent été oubliée, comme si $n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} X_i$ convergeait en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$ dans tous les cas. Il fallait en fait considérer des variables aléatoires X_i à valeurs dans $[-1, 1]$, indépendantes et de même loi, centrées et de variance 1. Or, il n'était pas donné a priori que de telles variables aléatoires existent : il fallait en construire. D'autre part, il n'était pas question de partir de variables aléatoires X_i gaussiennes de loi commune $\mathcal{N}(0, 1)$, ce qui a été proposé plus d'une fois, puisqu'on exigeait que $-1 \leq X_i \leq 1$. Enfin, rappelons que la loi d'une variable aléatoire rélle n'a pas toujours une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, et que l'incompatibilité de deux événements n'est pas l'indépendance !

Peu de candidats ont abordé de manière substantielle les parties IV et V. Souvent, ils n'ont pas eu le temps de dépasser IV.1.a et b. Parmi ceux qui ont cherché à traiter la question IV.1.a, beaucoup ont fait des erreurs de signe (par exemple, lors de la multiplication des deux membres d'une inégalité par une quantité négative) qui ont invalidé leur solution. Quelques-uns ont trouvé le temps de traiter correctement plusieurs questions de IV et de V. La question IV.4, très technique et donc longue à rédiger en détail, surtout en fin d'épreuve, n'a été traitée complètement que dans deux ou trois excellentes copies.

Conclusion

Une fois de plus, on constate qu'à côté d'une minorité de bonnes, très bonnes et excellentes copies, la majorité des candidats à l'agrégation manquent de pratique et d'autonomie. Ils ne sont pas habitués depuis le DEUG à faire, seuls ou en petits groupes, des exercices et des problèmes pour s'entraîner. C'est pourtant la seule manière d'apprendre l'*artisanat mathématique*, d'en acquérir les savoir-faire et les tours de main. On constate aussi le manque de familiarité de cette majorité de candidats avec les équations différentielles ordinaires, l'analyse asymptotique élémentaire et les bases du calcul différentiel des fonctions de plusieurs variables. Il faudrait que les étudiants en licence et maîtrise soient mieux encadrés et disposent de quantités suffisantes d'heures de TD (ou toute autre forme d'encadrement donnant accès à la pratique) afin de devenir capables de *mettre en œuvre* les méthodes qui leur sont exposées en cours.

Bibliographie

L'énoncé a été élaboré à partir de l'article

P.-M. Samson, Concentration of measure inequalities for Markov chains and ϕ-mixing processes. *The Annals of Probability* **28**–1, 416–461, 2000.

Sur le même sujet, mais avec de nouvelles techniques, doit paraître

P.-M. Samson, Concentration of measure inequalities for convex functions on product spaces. Dans *Stochastic Inequalities and Applications, Proceedings of the Euroconference in Barcelona (June 2002)*, Birkhaüser.

On peut conseiller les deux ouvrages de synthèse

Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques. Panoramas et Synthèses **10**, S.M.F., 2001.

M. Ledoux, *The Concentration of Measure Phenomenon.* Mathematical Surveys and Monographs, Vol. **89**, American Mathematical Society, 2001.

Remarques détaillées sur les
Epreuves Orales

1. Comportement général en Algèbre et Analyse

1.1. **Plan et la défense:** Dans l'ensemble, les plans photocopiés donnent satisfaction. Ils sont bien écrits, tiennent en 3 pages comme demandé. Précisons, que le candidat doit laisser **une marge pour la photocopie de 1 cm environ**. Ce n'est pas toujours le cas, bien que cela soit rappelé aux candidats lors des tirages. Les photocopies sont alors souvent coupées... ce qui nuit à la compréhension du jury.

Nous confirmons que le plan doit tenir en 3 pages maximum, et que la limite de deux pages n'est pas pas exigée.

Principaux Défauts:

- Le candidat relit de manière monotone son plan in extenso, avec tous les détails. Cela n'a pas grand intérêt, car le jury dispose déjà de la copie du texte.

- es plans qui se veulent exhaustifs. On rappelle que ce n'est pas le but de cette épreuve et que cela nuit certainement au candidat, car il est alors très difficile de dégager des grands axes de synthèse ou de mettre en valeur le travail de réflexion personnelle du candidat. Mieux vaut faire des choix et les expliquer.

- Le candidat n'arrive pas à faire une synthèse, ni à mettre en perspective résultats et méthodes. Il ne décolle pas de son plan qu'il a souvent recopié ou appris lors de la préparation.

Principales Qualités:

- Le candidat fait une synthèse de son texte, sans s'attarder sur les détails inutiles ou élémentaires. Il explique les résultats importants, ajoute oralement des précisions qui ne figurent pas dans le texte. Par exemple, il explique que l'hypothèse du théorème est nécessaire un citant un contre-exemple. Bref, le plan semble maîtrisé. Il prend la craie pour expliquer un exemple pertinent, sans perdre de temps. Il explique comment utiliser ses résultats pour résoudre d'autres problèmes mathématiques.

- Le candidat explique l'articulation de son plan, la finalité et les difficultés principales rencontrées. Il fait part de ses réflexions sur le sujet et la manière dont il a compris les choses.

Cette année, et mieux que les années précédentes, la quasi-totalité des candidats présentent leur plan en 8 mn. Ce qui montre qu'ils sont dans l'ensemble bien préparés.

1.2. **Développement.** Il importe que tous les (2 ou 3) développements proposés soient en rapport avec le sujet de la leçon. Le hors-sujet est pénalisé, et le jury tient à disposer d'une possibilité réelle de choisir parmi les propositions.

Le jury constate une recrudescence dans les développements de la tactique consistant à isoler le point difficile dans un lemme préliminaire admis, c'est à dire dont le candidat ne propose pas la démonstration. Le jury sanctionne sévèrement cette pratique, dans la mesure ou elle tend à vider le développement de sa substance.

Les développements sont souvent trop peu structurés. Le jury préfère que les candidats commencent par expliquer la stratégie de preuve et les principaux résultats intermédiaires structurant la démonstration.

Le jury et les préparateurs apprécient les développements élégants et techniques. Toutefois, il est regrettable que des candidats qui ne possèdent pas l'assurance et la maîtrise du sujet essaient de les reproduire, alors qu'ils sont trop sophistiqués pour leurs moyens. Le résultat est souvent décevant. Les préparateurs devraient permettre aux candidats d'évaluer leurs capacités et les entraîner à présenter des developpements où ils soient à l'aise, d'un niveau suffisant. Un exemple de cette situation concerne les développements sur les invariants de similitude.

1.3. **Préparation.** Comme les années passées, des candidats que l'on devine brillants font trop confiance en leurs moyens intellectuels et pensent que trois heures de préparation peuvent remplacer la maturité qui s'acquiert par une préparation méthodique.

2. Oral d'algèbre

2.1. **Généralités.** Beaucoup d'énoncés demandent des "exemples d'application". On constate malheureusement que peu de plans fournissent ces exemples.

2.2. **Structures algébriques.**

(1) D'une manière générale, les leçons sur les groupes sont plutôt bien traitées. Par contre, les plans d'algèbre linéaire sont souvent recopiés et mal maîtrisés; ceux sur les polynômes manquent de substance.
(2) Certaines notions sur les groupes (produit semi-direct, groupes résolubles), qui ne paraissaient pas comprises voici deux ou trois ans, sont maintenant mieux connues des candidats.
(3) Un homomorphisme d'anneaux $\phi : A \to B$ envoie, **par définition**, l'élément unité de A sur celui de B. On peut alors trouver sans difficulté tous les homomorphismes d'anneaux de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
(4) Si on parle "du" groupe diédral, il faut être capable d'en proposer une caractérisation.
(5) Dans la leçon sur les corps finis, les candidats confondent parfois $\mathbb{F}_q$ et $\mathbb{F}_p$ avec p premier et $q = p^n$. Certains résultats relatifs à $\mathbb{F}_p$ (comme la description des carrés) sont adaptés imprudemment à $\mathbb{F}_q$. Il serait bon de préciser dans quel circonstances on peut assimiler $\mathbb{F}_q$ à un sous-corps de $\mathbb{F}_{q'}$.
(6) Si l'on termine la leçon "Corps finis" par l'énoncé du théorème de Wedderburn, il faut s'assurer qu'on ne l'a pas utilisé avant. Il est fréquent qu'un énoncé précédent décrive "tous" les corps finis.
(7) Si l'on a décrit tous les corps finis, il faut être capable de présenter explicitement un corps à 9 éléments, ainsi que de décrire $\mathbb{F}_4$ et $\mathbb{F}_8$.
(8) La construction explicite des tables additives et multiplicatives des corps $\mathbb{F}_4$, $\mathbb{F}_8$,... n'est pas sans intérêt, notamment en vue des applications en codage et cryptographie.
(9) Pour traiter des corps finis, il est inutile de plonger d'emblée un tel corps dans une extension algébriquement close. Si on le fait, il faut donner quelques arguments pour l'existence d'une telle extension. Il faut pouvoir énoncer un résultat d'unicité "du" corps de décomposition d'un polynôme.
(10) Pour la leçon "Nombres premiers" il faut prendre garde aux prérequis et à l'ordre d'introduction des notions et résultat.
(11) Le candidat doit connaître les polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ et savoir exprimer $\mathrm{Im}(z)$ en termes de z et $\bar{z}$.
(12) Il n'est pas nécessaire d'invoquer les théorèmes de Sylow pour montrer qu'un sous-groupe distingué de A_5 qui contient un 5-cycle contient tous les 5-cycles. Il faut pouvoir dire combien de classes de conjugaison de 5-cycles A_5 possède.
(13) La leçon sur $k\,[X_1, ..., X_n]$ est très mal traitée: le théorème de structure sur les polynômes symétriques est souvent énoncé de manière imprécise et sans aucune application. Quand sa preuve est proposée, elle est presque toujours entachée d'erreurs. Les sommes de Newton

sont rarement connues, tout comme les propriétés arithmétiques de $k[X_1, ..., X_n]$ par rapport à $k[X]$.

2.3. **Algèbre Linéaire.**

(1) Une matrice diagonalisable n'est pas forcément une matrice diagonale. Le jury n'a pas de difficulté pour montrer que le théorème de Dunford ne facilite pas le calcul de l'exponentielle d'une matrice.
(2) Trop de candidats confondent encore la réduction de Gauss de formes quadratiques avec la diagonalisation de la matrice associée à la forme.
(3) Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice nilpotente, on peut justifier l'égalité $\exp(\ln(I_n + A)) = I_n + A$ sans passer par une équation différentielle. Les candidats ne pensent pas à exploiter la théorie des développements limités. Beaucoup de candidats ne parviennent pas au résultat.
(4) A propos de la leçon "Endomorphismes nilpotents", de nombreux candidats exposent une version incomplète de la réduction de Jordan tirée d'un ouvrage de grande diffusion. Ceci provoque des catastrophes lorsqu'on leur demande de dire si les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont semblables.
(5) A propos d'endomorphismes nilpotents, les candidats devraient être capables de faire le lien entre la forme de Jordan et les noyaux emboités.
(6) L'énoncé du théorème de Jordan ne devrait jamais être omis des leçons sur les endomorphismes nilpotents. Dans cet énoncé, il faut préciser la structure en terme de blocs de Jordan $J_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}}_{\leftarrow 1..n \rightarrow}$ et non en se contentant d'indiquer que la première diagonale supérieure est remplie de 0 et de 1 sans autre précision.
(7) Les exposés sur la réduction des endomorphismes gagneraient à être illustrés par des exemples matriciels judicieusement choisis, c'est-à-dire d'une taille suffisante pour être révélateurs.
(8) Les candidats butent très souvent sur la diagonalisabilité éventuelle des rotations planes.
(9) A propos de la leçon sur les formes quadratiques, le jury regrette que les candidats se limitent le plus souvent au cas ou $\mathbb{R}$ est le corps sous-jacent ou aux espaces euclidiens. Le contexte plus général des corps commutatifs de caractéristique distincte de 2 devrait être traité.
(10) La géométrie a de nombreuses relations avec l'algèbre linéaire. Ceci n'apparaît pas suffisamment dans les plans proposés.
(11) Certains candidats paraissent avoir fait des impasses importantes sur des pans entiers du programme, apparemment sûrs de tirer au moins une leçon d'algèbre linéaire. Certains couplages ne comportaient pas d'algèbre linéaire, et le jury tient à rappeller que son objectif est de tester la maîtrise de l'ensemble du programme par les candidats.

2.4. **Géométrie.** Les jurys ont un préjugé favorable à l'égard des rares candidats qui présentent une leçon de géometrie. Il regrette toutefois le manque de précision dans les plans et les développements.

Un sujet aussi vaste que les coniques nécessite que l'on restreigne son propos. Il n'est pas possible de faire le tour de la question en trois pages.

3. Oral d'analyse et probabilités

3.1. **Généralités.** Le niveau général des leçons d'analyse reflète une bonne préparation des candidats. On relève notamment les points positifs:

- Les candidats ont plus que par le passé le souci d'illustrer les leçons dont le libellé indique "exemple et applications". Certains développements plaçent le thème de la leçon "en situation", et l'enrichissent ainsi, même lorsqu'elle est consacrée à des notions de base (prolongement d'applications, intégrales dépendant d'un paramètre, espaces complets, méthodes hilbertiennes, bases hilbertiennes,....). On regrette toutefois la disparition des exemples empruntés aux équations aux dérivées partielles simmples (équation de la chaleur, des ondes, du pendule,...)
- Les plans sont en général conçus avec un souci de cohérence bien défendu.

Toutefois les remarques suivantes indiquent des directions dans lesquelles les candidats devraient essayer d'améliorer leurs connaissances et leurs prestations:

(1) Le jury constate que trop peu de plans sont défendus. La plupart des candidats lisent mot à mot leur plan photocopié, ou le survolent de façon trop sommaire à grande vitesse. A l'inverse, le jury apprécie que les candidats mettent en évidence les idées qui ont guidé la construction de leur plan et qu'ils mettent en lumière les hypothèses clé des résultats mentionnés.
(2) L'illustration d'un raisonnement par un dessin ou par un diagramme manque souvent cruellement, et c'est fort dommage.
(3) Les candidats devraient s'attacher à présenter l'idée clef ou la démarche qui sous-tend leur développement dès le début, de manière synthétique. Ceci améliorerait grandement l'aspect didactique de leur prestation.
(4) Souvent un développement trop ambitieux, pour lequel le candidat manque manifestement de recul, est proposé et n'aboutit pas. Il faudrait conseiller aux candidats des développements plus élémentaires, qui mieux maîtrisés et conduits, seront mieux jugés.
(5) A l'inverse, certains candidats moyens ont tendance à choisir la leçon la plus élémentaire d'un couplage et de plus la traitent à un niveau trop élémentaire. Dans le cas du couplage "séries numériques" et "etude de courbes", le choix typique est "série numérique". Pour traiter cette dernière leçon au niveau du concours d'agrégation, on peut inclure: inégalité de Carleman, séries trigonométriques, Euler Mac Laurin à l'ordre 1 ou 2, ...
(6) La durée du développement ne peut être étendue au dela de 15 minutes, même si le développement est (trop) substanciel.
(7) Il paraît nécessaire d'insister sur le fait que tous les résultats figurant dans le plan doivent être compris du candidat.
(8) Les candidats gagneraient à plus utiliser le tableau pendant le dialogue avec le jury, pour s'aider à répondre aux questions.
(9) Les candidats qui utilisent des techniques inusuelles pour insérer leur exposé dans un contexte didactique particulier, gagnent à exposer leur motivation et leur approche en préalable. Ainsi, le candidat qui a utilisé une preuve longue et complexe de la croissance de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, dont l'intérêt résidait dans le fait qu'elle n'utilisait que les outils disponibles en classe de terminale, eut gagné à préciser sa motivation.

En outre, les candidats doivent rechercher des références adaptées à leur prestation: il ne s'agit ni de présenter des plans spectaculaires que l'on ne maîtrise pas, ni de présenter des résultats simples par des méthodes lourdes et inadaptées. Ils doivent prendre assez de recul pour éviter de reproduire sans esprit critique les expositions inexactes qu'ils peuvent trouver dans la littérature.

3.2. **Aspects scientifiques et techniques.**

(1) Les leçons sur les problèmes d'interversion de limites, ou de limites et d'intégrales, ne doivent pas se limiter à un catalogue de théorèmes assortis de quelques exemples triviaux. Le jury attend que le candidat montre son aptitude à faire de l'analyse en appliquant les théorèmes du plan à des exemples suffisamment consistants.

(2) Dans la leçon "fonctions monotones, fonctions convexes", les candidats ne font jamais le lien entre les deux notions.
(3) Dans les leçons sur les équations différentielles linéaires, les candidats omettent fréquemment de mentionner la dimension de l'espace affine des solutions. Lorqu'ils citent ce résultat, ils ne savent pas toujours le déduire du Théorème de Cauchy-Lipschitz.
(4) On constate que souvent les leçons relevant de l'analyse numérique, ou les développements qui en sont inspirés ne présentent pas suffisamment tôt l'idée clef qui motive la démarche. Par exemple, dans les développements touchant à la méthode de Newton, du gradient,... gagneraient à être accompagnées de figures permettant de dégager la démarche.
(5) La vision géométrique reste toujours au second plan. Pour des applications de $U \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, beaucoup de candidats pensent que "a critique" signifie que $df(a) = 0$ et non rang $(df(a)) < m$. Les lemmes de Sard et Morse offrent d'intéressants développements aux bons candidats.
(6) Les exemples classiques sont maintenant mieux placés dans leur contexte et apparaissent moins artificiels. Cependant, certaines leçons d'exemples, prises à un niveau très élémentaire, font apparaître un plan non structuré, consistant en une simple liste d'exemples sans fil directeur.
(7) Les leçons "Courbes" et "Etude locale de surfaces" sont malheureusement évitées le plus souvent par les candidats.
(8) Les leçons liées aux fonctions holomorphes sont prises assez fréquemment, souvent par de bon candidats qui les exploitent intelligemment.
(9) Les leçons sur la transformation de Fourier ne doivent pas omettre la théorie L^2.
(10) Le cadre naturel de l'égalité de Parseval est l'espace de Hilbert $L^2_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ plutôt que l'espace dit "de Dirichlet" $E_{2\Pi}$, souvent utilisé par les candidats.

4. Oral de modélisation

4.1. **Epreuve orale de Modélisation.**

D'une manière générale, on constate que les candidats sont maintenant bien préparés à cette épreuve. Toutefois, l'épreuve reste exigeante car elle demande un certain recul par rapport aux connaissances acquises et met particulièrement en avant l'utilisation de résultats en "aval" des développements théoriques usuels.

On doit conseiller aux candidats de mieux faire la distinction entre le processus de "Modélisation" et celui de "Simulation". Toutefois, la discussion de propriétés quantitatives des modèles aboutit très fréquemment à une simulation qu'il s'agit alors de bien conduire.

4.1.1. *Calcul Scientifique.*

Comme l'an passé, les connaissances de nombreux candidats dans le domaine des méthodes numériques et de l'algèbre linéaire se sont souvent révélées insuffisantes. Par exemple, certains candidats concernés ont été en peine de traiter de manière satisfaisante la méthode d'Euler d'approximation de systèmes d'équations différentielles ordinaires.

Concernant l'étude des équations différentielles, on constate que de plus en plus de candidats n'en maîtrisent pas les bases. Ainsi, il est indispensable que tous les candidats connaissent parfaitement le théorème de Cauchy-Lipschitz, comprennent l'articulation entre l'étude locale et globale des solutions, et puissent etudier la stabilité autour d'un point fixe.

Ainsi que l'on peut s'y attendre, le calcul différentiel est un outil important dans l'étude de nombreux modèles mathématiques. Il est donc essentiel que les candidats y accordent une attention soutenue, dès l'étude des programmes de licence et de maîtrise. Les points suivants, qui devraient être acquis au niveau de la licence, continuent à présenter des difficultés:

- utilisation de la différentielle d'une fonction de $\mathbb{R}^d \Rightarrow \mathbb{R}^d$ dans la méthode de Newton,
- rapport entre différentielle et gradient, signification géométrique du gradient (surfaces, courbes de niveau).
- application du théorème des fonctions implicites,

Sur les points suivants, les candidats devraient être mieux exercés à mettre en relations propriétés locales et globales:

- notion de convexité (parties de $\mathbb{R}^n$, fonctions de variables réelles), et son utilisation dans les problèmes de minimisation.
- existence locale et prolongement des solutions d'équations différentielles ordinaires.

L'analyse numérique est moins bien acquise que par le passé, entrainant des performances médiocres sur des questions faciles:

- analyse numérique linéaire, allant de la résolution des systèmes à la réduction des opérateurs linéaires,
- algorithmique non linéaire, par exemple méthode de Newton,
- schémas de résolution d'équations différentielles ordinaires.

4.1.2. *Probabilités et Statistiques.*

Il est indispensable que tous les candidats qui choisissent cette option aient assez de recul pour pouvoir expliquer de manière convaincante les notions de base. Par exemple ce qu'est une variable aléatoire.

Concernant les chaînes de Markov, il importe que les candidats sachent faire la classification des états, sur des exemples simples. Le jury a constaté cette année encore des réponses absurdes. Les préparateurs aideront les candidats en leur présentant des exemples concrets simples.

Parmi les notions mal maîtrisées, figurent également les tests statistiques, l'utilisation dans le contexte probabiliste des convolutions et fonctions génératrices.

Les textes et leçons faisant intervenir des vecteurs gaussiens (lois normales multidimensionnelles) se sont révélés un test exigeant des connaissances en algèbre linéaire des candidats, et de leur capacité à les appliquer. Les points suivants en sont des exemples:

- réduction de formes quadratiques en relation avec la simulation de vecteurs gaussiens dont la matrice de covariance est donnée,
- utilisation de la réduction des formes quadratiques, et plus précisément de la détermination des axes d'un ellipsoïde, dans l'analyse en composantes principales d'une loi normale multidimensionnelle,
- utilisation des notions liées à la projection orthogonale, par exemple dans les méthodes de moindres carrés et celles d'analyse en composantes principales.
- utilisation de la réduction des matrices et plus particulièrement du théorème de Perron-Frobenius dans l'étude des chaînes de Markov à espace d'états fini.

Liste des textes et leçons
Session 2003

Leçons d'Algèbre

101	Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
102	Sous-groupes discrets de $\mathbf{R}^n$. Réseaux.
103	Sous-groupes distingués, groupes quotients. Exemples et applications.
104	Groupes finis. Exemples et applications.
105	Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
106	Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.
107	Sous-groupes finis de $\mathrm{O}(2, \mathbf{R})$, de $\mathrm{O}(3, \mathbf{R})$. Applications.
108	Exemples de parties génératrices d'un groupe.
109	Congruences dans $\mathbf{Z}$, anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.
110	Nombres premiers. Applications.
111	Idéaux d'un anneau commutatif unitaire. Exemples et applications.
112	Corps finis. Applications.
113	Groupe des nombres complexes de module 1. Applications.
114	Équations diophantiennes du premier degré $ax + by = c$. Autres exemples d'équations diophantiennes.
115	Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.
116	Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.
117	Algèbre des polynômes à n indéterminées ($n \geq 2$). Polynômes symétriques. Applications.
118	Racines des polynômes à une indéterminée. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme. Exemples et applications.
119	Polynômes orthogonaux. Exemples et applications.
120	Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.
121	Matrices équivalentes. Matrices semblables. Applications.
122	Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Résolution d'un système d'équations linéaires. Exemples et applications.
123	Déterminant. Exemples et applications.
124	Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
125	Sous-espaces stables d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
126	Endomorphismes diagonalisables.
127	Exponentielle de matrices. Applications.
128	Endomorphismes nilpotents.
129	Polynômes d'endomorphismes. Applications.
130	Exemples de décompositions remarquables dans le groupe linéaire. Applications.
131	Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
132	Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.

133	Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie.
134	Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel hermitien de dimension finie.
135	Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Formes réduites. Applications.
136	Coniques.
137	Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie ; convexité. Applications.
138	Homographies de la droite complexe. Applications.
139	Applications des nombres complexes à la géométrie.
140	Utilisation des angles en géométrie.
141	Utilisation des groupes en géométrie.
142	Exemples de propriétés projectives et d'utilisation d'éléments à l'infini.
143	Constructions à la règle et au compas.
144	Problèmes d'angles et de distances en dimension 2 ou 3.
145	Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Leçons d'Analyse

201	Espaces de fonctions. Exemples et applications.
202	Exemples de parties denses et applications.
203	Utilisation de la notion de compacité.
204	Connexité. Exemples et applications
205	Espaces complets. Exemples et applications.
206	Utilisation de théorèmes de point fixe.
207	Prolongement de fonctions. Applications.
208	Utilisation de la continuité uniforme en analyse.
209	Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités.
210	Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés. Exemples et applications.
211	Utilisation de la dimension finie en analyse.
212	Méthodes hilbertiennes en dimension finie et infinie.
213	Bases hilbertiennes. Exemples et applications.
214	Applications du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites.
215	Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.
216	Étude de courbes. Exemples.
217	Étude locale de surfaces. Exemples.
218	Applications des formules de Taylor.
219	Problèmes d'extremums.
220	Équations différentielles $X' = f(t, X)$; exemples d'études qualitatives des solutions.
221	Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.
222	Exemples d'équations différentielles. Solutions exactes ou approchées.
223	Convergence des suites numériques. Exemples et applications.
224	Comportement asymptotique des suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.
225	Rapidité de convergence d'une suite. Exemples.
226	Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.
227	Développement asymptotique d'une fonction d'une variable réelle.
228	Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.
229	Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.
230	Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.
231	Illustrer par des exemples et des contre-exemples la théorie des séries numériques.
232	Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.
233	Intégrale d'une fonction d'une variable réelle. Suites de fonctions intégrables.
234	Espaces L^p, $1 \leq p \leq +\infty$
235	Interversion d'une limite et d'une intégrale. Exemples et applications.
236	Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.
237	Problèmes de convergence et de divergence d'une intégrale sur un intervalle de $\mathbf{R}$.
238	Méthodes de calcul des valeurs approchées d'une intégrale.
239	Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
240	Transformation de Fourier et produit de convolution. Applications.
241	Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
242	Exemples d'utilisation de fonctions définies par des séries.

243	Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.
244	Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications.
245	Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de **C**.
246	Développement d'une fonction périodique en série de Fourier. Exemples et applications.
247	Exemples de problèmes d'interversion de limites.
248	Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynomiales ou polynomiales par morceaux. Exemples.
249	Le jeu de pile ou face (suites de variables de Bernoulli indépendantes).
250	Loi binomiale, loi de Poisson. Applications.
251	Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.

Leçons de Modélisation, option calcul scientifique

301	Appliquer et comparer des méthodes numériques ou symboliques de réduction de matrices dans des problèmes issus de modélisations.
302	Utiliser et comparer des méthodes numériques ou symboliques de systèmes linéaires dans des problèmes issus de modélisations.
303	Dégager et étudier par des méthodes numériques ou symboliques des systèmes d'équations non linéaires - par exemple polynomiales - dans des problèmes issus de modélisations.
304	Utiliser dans des problèmes issus de modélisations des résultats relatifs à l'approximation ou à l'interpolation de fonctions
305	Utiliser et comparer des méthodes numériques ou symboliques de résolution de systèmes ou d'équations différentiels ou aux dérivées partielles dans des problèmes issus de modélisations.
306	Applications de la transformée ou des séries de Fourier - par exemple aux équations aux dérivées partielles.
307	Exemples de propriétés qualitatives d'une équation différentielle ou d'un système différentiel. Interprétation sur un exemple.
308	Utiliser et comparer des méthodes de factorisation et de recherche des racines d'un polynôme.
309	Appliquer et comparer des méthodes de minimisation dans des problèmes issus de modélisations.
310	Problèmes liés à la représentation des courbes et des surfaces.
311	Etudier la dépendance des solutions d'une équation par rapport à un paramètre dans des problèmes issus de modélisations.
312	PGCD, PPCM: méthodes de calcul et applications dans des problèmes issus de modélisations.
313	Application des congruences ou des corps finis à des problèmes issus de modélisations.
314	Application de la convexité dans des problèmes issus de modélisations.

Leçons de Modélisation, option probabilités et statistiques

401	Exemples d'applications de lois des grands nombres et du théorème de la limite centrale en situation de modélisation.
402	A partir d'exemples issus de la modélisation motiver, décrire et critiquer une méthode probabiliste pour le calcul approché d'une intégrale.
403	Utilisation de l'espérance conditionnelle dans différents modèles.
404	Exemples d'utilisation des martingales en modélisation.
405	Utilisation en modélisation de vecteurs aléatoires gaussiens.
406	Exemples d'utilisation du modèle linéaire gaussien en modélisation.
407	Exemples et principes de tests statistiques en modélisation.
408	Utilisation d'ensembles de confiance en modélisation
409	Utilisation en modélisation de la notion de fonction de répartition empirique.
410	Utilisation de lois exponentielles en modélisation.
411	Applications de méthodes de simulation de variables ou de vecteurs aléatoires à des problèmes de modélisation.
412	Exemples liés à la modélisation cd chaînes de Markov récurrentes ou transientes à espace d'états aux plus dénombrable.
413	A partir d'exemples liés à la modélisation décrire la convergence d'une chaîne de Markov vers une loi invariante.
414	Utilisation de la loi de Poisson en modélisation.
415	Utilisation(s) de la transformée de Laplace ou de la fonction génératrice dans des problèmes de modélisation.

Textes de modélisation, option calcul scientifique

507	La corde élastique.
511	Phénomènes de propagation et circulation automobile.
527	Codes correcteurs d'erreurs.
536	Un modèle de battement du coeur.
537	Système de deux espèces en compétition dans un environnement périodique.
539	Profils générés par certaines bactéries dans un milieu liquide.
542	Contrôle frontière de l'équation des ondes.
543	Modélisation de la pénétration d'anticorps dans des tumeurs.
544	Modélisation de l'influx nerveux.
547	Ondes de détente pour les lois de conservation.
551	Modélisation d'un réacteur biologique.
553	Débit d'une artère.
556	Agglomération des globules rouges dans le sang.
560	Résolutions de systèmes linéaires en entiers naturels.
561	Construction de carrés magiques.
562	Géométrie d'une molécule.
563	Tomographie.
571	Sac à dos et réseaux
575	La méthode des ellipsoïdes
577	Autour d'un théorème de Shannon
578	Stratégie de pénétration du virus de la fièvre aphteuse
583	Cryptographie et factorisation
584	Lemmes Chinois et calcul modulaire.
585	Sommation de séries alternées.
590	Construction explicite de surfaces algébriques dont la projection est imposée.
591	Transformations orthogonales et compression.

Textes de modélisation, option probabilités et statistiques

601	Modèles de population à reproduction sexuée
602	Modélisation du trafic d'un réseau de communication
603	Prédiction de séries financières
604	Modèle aléatoire de pénétration du virus de la fièvre aphteuse
606	Lois de type Pareto
607	Records sportifs
608	Flux d'appels en télécommunications
609	Transmission de données par liaison satellite avec erreurs aléatoires
610	Modélisation d'un central téléphonique avec réṕtitions d'appels
611	Compression de données par quantification
612	Réduction de dimension par analyse en composantes principales
613	Approximation exponentielle des gains d'une compagnie d'assurance
614	Méthodes de scores pour les séquences d'ADN
615	Un modèle en génétique des populations avec sélection
616	Un modèle en génétique des populations avec mutation
618	Convergence de modèles binomiaux en finance.
619	Un modèle de catastrophe fréquentes
620	La ruine des compagnies d'assurance.
621	Empilements aléatoires.
622	Coordination entre producteurs et maîtrise des aléas de demande.
623	Gestion de stock à demande aléatoire
624	Assurance du portefeuille financier et valeurs extrêmes.

Bibliothèque de l'Agrégation

La liste ci après indique l'état de la bibliothèque de l'agrégation durant les épreuves. Les candidats ont accès aux ouvrages durant leur temps de préparation, sans garantie que les ouvrages soient disponibles à tout moment puisqu'ils peuvent être déjà utilisés.

L'inscription dans cette liste ne constitue pas une garantie, et les candidats les utilisent sous leur entière responsabilité.

ALAOUI Aziz el Kacini & QUEFFELEC H. Quelques aspects des mathématiques actuelles [Ellipses]

AHUÉS M. & CHATELIN F. Exercices de valeurs propres de matrices [Masson]

ANDLER M., BLOCH J.D et MAILLARD B. Exercices corrigés de Mathématiques [Edition Marketing]

1.A Analyse : Topologie
1.B Analyse : Fonctions numériques
2 Analyse : Suites et Séries numériques
3 Analyse : Analyse Fonctionnelle
5 Algèbre générale, polynômes
6 Algèbre linéaire 1ère partie
7 Algèbre linéaire 2ème partie

ANDREWS G. Number Theory [Dover Publications]

ARIBAUD F. & VAUTHIER J. Mathématiques. Première année de DEUG. [ESKA]

ARNAUDIES J-M., BERTIN J. Groupes, algèbres et géométrie, tomes 1 et 2 [Ellipses]

ARNAUDIES J-M., DELEZOIDE P. & FRAYSSE H. Cours de Mathématiques [Dunod]

1. Algèbre
2. Analyse
3. Compléments d'analyse
4. Algèbre bilinéaire et géométrie

ARNAUDIES J-M. & FRAYSSE H. Exercices résolus d'analyse [Dunod]

ARNOLD V. Equations différentielles ordinaires [MIR]

ARNOLD V. Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires [MIR]

ARTIN E. Algèbre géométrique [Gauthier-Villars]

ARTIN M. Algebra [Prentice Hall]

AUBIN J-P. Analyse fonctionnelle appliquée [PUF]

Tome 1
Tome 2

AUDIN M. De la licence à l'agrégation, Géométrie [Belin]

AVANISSIAN V. Initiation à l'analyse fonctionnelle [PUF]

AVEZ A. Calcul différentiel [Masson]

BAKHVALOV N. Méthodes numériques [MIR]

BARANGER J. Analyse numérique [Hermann]

BASILI B. & PESKINE C. Algèbre [Diderot, éditeur Arts et Sciences]

BASS J. Cours de Mathématiques [Masson]
Tome 1
Tome 2

BENDER C. & ORSZAG S. Advanced mathematical methods for scientists and engineers [Mac Graw Hill]
BENEDIR M. et BARRET M. Stabilité des filtres et des systèmes linéaires [Dunod]

BONNANS F. Optimisation numérique [Springer]

BONNANS F, GILBERT J.C., LEMARECHAL C. et SAGASTIZABAL C.
. Optimisation numérique [Springer]

BERGER M. Géométrie [Cédic/Nathan]
1. Action de groupes, espaces affines et projectifs
2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères
3. Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes
4. Formes quadratiques, quadriques et coniques
5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères

BERGER M., BERRY J-P., PANSU P. & SAINT RAYMOND X. [Cédic/Nathan]
Problèmes de géométrie commentés et rédigés

BERGER M. Géométrie tome 2 [Nathan]

BERGER M. & GOSTIAUX B. Géométrie différentielle [Armand Colin]

BICKEL and DOKSUM. Mathematical statistics [Prentice Hall]

BIGGS NORMAN L. Discrete mathematics [Oxford Science Publications]

BLANCHARD A. Les corps non commutatifs [PUF]

BOAS R. A primer of real functions [The mathematical association of America]

BON Jean Louis . Fiabilité des systèmes ; [Masson]

BONNANS, GILBERT, LE MARECHAL et SAGASTIZABAL
Optimisation numérique [Springer]

BOURBAKI N. Eléments de Mathématiques [Hermann]
Fascicule VII. Livre II. Algèbre. - 1044
Fascicule VIII. Livre III. Topologie générale. - 1045

Fascicule IX. Livre IV. Fonctions d'une variable réelle. - 1074
Fascicule X. Topologie générale. - 1084
Fascicule XIII Intégration 1175

BOUVIER A. & RICHARD D. Groupes
[Hermann]

BREMAUD P. Introduction aux probabilités [Springer]

BREZIS H. Analyse fonctionnelle, théorie et applications [Masson]

BROUSSE P. Mécanique MP - PC.- Spéciales A. A'. B. B'. [Armand Colin]

BRUCE J.W., GIBLIN P.J. & RIPPON P.J. Microcomputers and Mathematics [Cambridge]

CABANE R. & LEBOEUF C. Algèbre linéaire [Ellipses]
1. Espaces vectoriels , Polynômes
2. Matrices et réduction

CABANNES H. Cours de Mécanique générale [Dunod]

CAGNAC G. & THIBERGE L. Géométrie. Classes terminales C et T [Masson]

CALAIS J. Éléments de théorie des groupes [PUF]
Éléments de théorie des anneaux

CARTAN H. Formes différentielles [Hermann]

CARTAN H. Calcul différentiel [Hermann]

CARTAN H. Cours de calcul différentiel [Hermann]

CARTAN H. Théorie élémentaire des fonctions analytiques [Hermann]

CASTELMAN K.R. Digital Image Processing [Prentice Hall]

CHAMBERT-LOIR A., FERMIGIER S. et MAILLOT V.
Exercices de mathématiques pour l’agrégation, Analyse tomes 1, 2, 3 [Masson]

CHATELIN F. Valeurs propres de matrices [Masson]

CHEVALLARD Y. Théorie des séries 1. Séries numériques [Cédic/Nathan]

CHOQUET G. L’enseignement de la géométrie [Hermann]

CHOQUET G. Cours d’Analyse, Tome 2 Topologie [Masson]

CHILDS L. A concrete introduction to Higher Algebra [Springer-Verlag]

CHRISTOL G, PILIBOSSIAN Ph., et YAMMINE S. [Ellipses]
Algèbre I
Algèbre II

CIARLET P.G. Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation [Masson]

COHN P.M. Algebra Volume 1 [John Wiley]

COLLETT. Modelling binary data [Chapman Hall]

COMBROUZE A. Probabilités et statistiques [PUF]*

COTTRELL M., GENON-CATALOT V., DUHAMEL C. et MEYRE T.
Exercices de probabilités, [Cassini]

COURANT R. & HILBERT D. Methods of Mathematical Physics [John Wiley]
Volume 1
Volume 2

COUTY R. & EZRA J. Analyse ; MP deuxième année et spéciales A A' [Armand Colin]
Tome 1
Tome 2

COXETER H.S.M. Introduction to Geometry
[John Wiley]

CROUZEIX M. & MIGNOT A. Analyse numérique des équations différentielles [Masson]

CVITANOVIC P. Universality in Chaos
[Institute of Physics Publishing]

DACUNHA-CASTELLE D., REVUZ D. & SCHREIBER M.
Recueil de problèmes de calcul des probabilités [Masson]

DACUNHA-CASTELLE D. & DUFLO M. [Masson]
Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe
Exercices de Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe

DEHEUVELS P. L'intégrale [PUF]

DEHEUVELS P. L'intégrale [Que-sais-je? PUF]

DEHEUVELS R. Formes quadratiques et groupes classiques [PUF]

DEHORNOY P. Complexité et décidabilité [Springer]

DEHORNOY P. Mathématiques de l'informatique [Dunod]

DELTHEIL R. & CAIRE D. Géométrie et compléments [Jacques Gabay]

DEMAILLY J.P. Analyse numérique et équations différentielles [PU Grenoble]

DEMAZURE M. Catastrophes et bifurcations [Ellipses]

DEMAZURE M. Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes [Cassini]

DEMBO ZEITOUNI. Large deviations. [Springer]

DESCOMBES R. Éléments de théorie des nombres [PUF]

DIEUDONNE J. Calcul infinitésimal [Hermann]

DIEUDONNE J. Sur les groupes classiques [Hermann]

DIEUDONNE J. Algèbre linéaire et géométrie élémentaire [Hermann]

DIEUDONNE J. Éléments d'Analyse. Fondements de l'analyse moderne [Gauthier-Villars]

DIEUDONNE J. Éléments d'Analyse. 2 [Gauthier-Villars]

DIXMIER J. Cours de Mathématiques du premier cycle [Gauthier-Villars]
Première année
Deuxième année

DRAPER, SMITH. Applied regression analysis [Wiley and Sons]

DUBREIL P. & DUBREIL-JACOTIN M.L. Leçons d'Algèbre moderne [Dunod]

DUBUC S. Géométrie plane [PUF]

DYM H. & KEAN Mac H.P. Fouriers series and integrals [Academics Press]

EL KACIMI ALAOUI A. Quelques aspects des mathématiques actuelles [Ellipses]

EPISTEMON L. (OVAERT J.L. & VERLEY J.L.) Exercices et problèmes [Cédic/Nathan]
Analyse. Volume 1
Algèbre.

EXBRAYAT J.M. & MAZET P. Notions modernes de mathématiques [Hatier]
Algèbre 1 : Notions fondamentales de la théorie des ensembles
Analyse 1 : Construction des espaces fondamentaux de l'analyse
Analyse 2 : Éléments de topologie générale

FADDEEV D. & SOMINSKI I. Recueil d'exercices d'Algèbre Supérireure [MIR]

FARAUT J. & KHALILI E. Arithmétique [Ellipses]
Cours, Exercices et Travaux Pratiques sur Micro-Ordinateur

FAIRBANK X., BEEF C. Pox [Ellipses]

FELLER W. An introduction to probability theory and its applications [John Wiley]
Volume 1
Volume 2

FERRIER J.P. Mathématiques pour la licence [Masson]

FLORY G. Topologie et analyse [Vuibert]
Tome 1 Topologie
Tome 2 Topologie
Tome 4 Exercices avec solutions

FOATA D. & FUCHS A. Calcul des probabilités [Masson]

FRANCINOU S, GIANELLA H., NICOLAS S.
Exercices de Mathématiques, Oraux X-ENS Algèbre 1 [CASSINI]

FRANCINOU S. et GIANELLA H. Exercices de mathématiques pour l'agrégation [Masson]

FRANCHINI J. et JACQUENS J.C. [Ellipses]
Algèbre
Analyse tomes 1 et 2

FRENKEL J. Géométrie pour l'élève et le professeur [Hermann]

FRESNEL J. Géométrie [IREM de Bordeaux]

FRESNEL J. Géométrie algébrique [UFR Maths Bordeaux]

FRESNEL J. Méthodes modernes en géométrie [Hermann]

FRESNEL J. Anneaux [Hermann]

FRESNEL J. Groupes [Hermann]

FUHRMANN P. A. A polynomial approach to linear algebra [Springer]

GANTMACHER F.R. Théorie des matrices [Dunod]
Tome 1
Tome 2

GENET J. Mesure et intégration. Théorie élémentaire. Cours et exercices résolus [Vuibert]

GOBLOT R. Algèbre commutative [Masson]

GOBLOT R. Thèmes de géométrie [Masson]

GOLUB. et VAN LOAN Matrix computations [John Hopkins University Press]

GODEMENT R. Cours d'Algèbre [Hermann]

GODEMENT R. Analyse Mathématique, tomes 1, 2 et 3 [Springer]

GONNORD S. & **TOSEL N.** Thèmes d'Analyse pour l'agrégation [Ellipses]
I Topologie et Analyse fonctionnelle

GOSTIAUX B., Cours de Mathématiques Spéciales [PUF]
1 Algèbre
2 Topologie et Analyse Réelle
4 Géométrie affine et métrique
5 Géométrie : arcs et nappes

GOURDON X. Algèbre et Analyse [Ellipses]

GRAMAIN A. Géométrie élémentaire [Hermann]

GRAMAIN A. Intégration [Hermann]

GREUB W. Linear Algebra [Springer Verlag]

GRIMETT, WELSH. Probability : an introduction [Oxford Science Publications]

GUICHARDET A. Calcul intégral. Maitrise de Mathématiques C. 2 [Armand Colin]

GHIDAGLIA J.M. Petits problèmes d'analyse [Springer]

GUJARATI D.N. Basic Econometrics [Mc Graw Hill]

HABSIEGER L. MARTEL V. Exercices corrigés de mathématiques [Ellipses]
Analyse 1, Tomes 1 et 3,
Algèbre 1
Algèbre Géométrie 2 Tomes 1 et 2
Analyse 2 tome 4
Problèmes corrigés

HALMOS P. Problèmes pour mathématiciens petits et grands [Cassini]

HAMMAD P. Cours de probabilités [Cujas]

HAMMAD P. & TARANCO A. Exercices de probabilités [Cujas]

HAMMER R., HOCK M., KULISH U. & RATZ D. [Springer]
C++ Toolbox Basic Numerical Problems

HARDY G.H. & WRIGH E.M. An introduction to the theory of numbers [Oxford]

HENNEQUIN P.L. & TORTRAT A. Théorie des probabilités et quelques applications [Masson]

HENRICI P. Applied and computational analysis [Wiley]
Tome I
Tome II
Tome III

HERVE M. Les fonctions analytiques [PUF]

HIRSCH F. & LACOMBE G. Eléments d'analyse fonctionnelle [Masson]

HOUZEL C. Analyse mathématique [Belin]

HUBBARD J. et WEST B. Equations différentielles et systèmes dynamiques [Cassini]

ITARD J. Les nombres premiers [Que sais-je? PUF]

IRELAND K. & ROSEN M. A Classical Introduction to Modern Numbers Theory [Springer-Verlag]

IREM des Pays de Loire Exercices de géométrie élementaires

JACOBSON N. Basic Algebra [Freeman and Co]
Tome I
Tome II

KAHANE J.P., CARTIER, ARNOLD et al. Leçons de mathématiques d'aujourd'hui [Cassini]

KAHANE J.P. et GILLES P. Séries de Fourier et ondelettes [Cassini]

KENNETH, CASTLEMAN. Digital image processing [Prentice Hall]

KERBRAT Y. & BRAEMER J-M. Géométrie des courbes et des surfaces [Hermann]

KNUTH D.E. The art of computer programming [Addison-Wesley]
Volume 2 : Seminumerical algorithms
Volume 3 : Sorting and Searching

KOLMOGOROV A. & FOMINE S. [Ellipses]
Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle

De KONINCK J.M. et MERCIER A. Introduction à la théorie des nombres [Modulo]

KÖRNER T.W. Fourier Analysis [Cambridge]

KÖRNER T.W. Exercises for Fourier Analysis [Cambridge]

KREE P. Introduction aux Mathématiques et à leurs applications fondamentales M.P.2 [Dunod]

KRIVINE J.L. Théorie axiomatique des ensembles [PUF]

KRIVINE J.L. Théorie des ensembles [Cassini]

LAFONTAINE J. Introduction aux variétés différentielles [Presses Universitaires de Grenoble]

LANG S. Algèbre linéaire [InterEditions]
Tome 1
Tome 2

LANG S. Linear Algebra [Addison-Wesley]

LANG S. Algebra [Addison-Wesley]

LAVILLE Géométrie pour Capes et Agregation [Ellipses]

LAX P.D. Linear Algebra [Wiley]

LEBOEUF C. Exercices corrigés de probabilités [Ellipses]

LEBORGNE D. Calcul différentiel et géométrie [PUF]

LEBOSSE S. & HEMERY C. Géométrie. Classe de Mathématiques [Jacques Gabay]

LE BRIS G. Une initiation progressive à Maple [Cassini]

LEHMANN D. & SACRE C. Géométrie et topologie des surfaces [PUF]

LEHNING H. Mathématiques supérieures et spéciales [Masson]
1 : Topologie
3 : Intégration et sommation
4 : Analyse en dimension finie
5 : Analyse fonctionnelle

LEHNING H. & JAKUBOWICZ D. Mathématiques supérieures et spéciales [Masson]

2 : Dérivation

LELONG-FERRAND J. Les fondements de la géométrie [PUF]

LELONG-FERRAND J. Géométrie différentielle [Masson]

LELONG-FERRAND J. & ARNAUDIES J.M. Cours de Mathématiques [Dunod]
Tome 1 : Algèbre
Tome 2 : Analyse
Tome 3 : Géométrie et cinématique
Tome 4 : Equations différentielles, intégrales multiples

LESIEUR L. & LEFEBVRE J. Mathématiques [Armand Colin]
Tome 3 : Compléments d'analyse, statistiques et probabilités

LESIEUR L., MEYER Y., JOULAIN C. & LEFEBVRE J. [Armand Colin]
Algèbre linéaire, géométrie

Mac LANE S. & BIRKHOFF G. Algèbre [Gauthier-Villars]
1 : Structures fondamentales
2 : Les grands théorèmes

MACKI J. & STRAUSS A. Introduction to Optimal Control Theory [Springer]

MALLIAVIN P. Géométrie différentielle intrinsèque [Hermann]

MALLIAVIN M. P. Les groupes finis & leurs représentations complexes [Masson]

MALLIAVIN M. P. & WARUSFEL A. Algèbre linéaire et géométrie classique [Masson]
Exercices

MARTIN P. Applications de l'algèbre et de l'analyse à la géométrie [Armand Colin]

MASCART H. et STOKA M. Fonction d'une variable réelle, tome 2 [PUF]

MAZET P. Algèbre et géométrie pour le CAPES et l'Agrégation [Ellipses]

MAWHIN J. Analyse : fondements, technique, évolutions [De Boeck Université]

MERKIN D.R. Introduction to the Theory of Stability [Springer]

MÉTIVIER M. Notions fondamentales de la théorie des probabilités [Dunod]

MÉTIVIER M. Probabilités : dix leçons d'introduction . Ecole Polytechnique [Ellipses]

MIGNOTTE M. Mathématiques pour le calcul formel [PUF]

MNEIMNÉ R. & TESTARD F. Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques [Hermann]

MNEIMNÉ R. Eléments de géométrie, actions de groupes [Cassini]

MONJALLON A. Éléments de statistique mathématique [Vuibert]

MOISAN J. et VERNOTTE A. Topologie et séries [Ellipses]

MOISAN J., VERNOTTE A. et TOSEL N. Suites et séries de fonctions [Ellipses]

MONIER J.M. Analyse : tomes 1 - 4, cours et exercices corrigés

MUTAFIAN C. Le défi algébrique [Vuibert]
Tome 1
Tome 2

MORLET C. Algèbre & géométrie [Université de Nancy]
Module AG2. Techniques de calcul en Algèbre linéaire 1ère partie
Module AG2. Techniques de calcul en Algèbre linéaire 2ème partie
Module AG3. Géométrie euclidienne 1ère partie

NAUDIN P. & QUITTE C. Algorithmique algébrique avec exercices corrigés [Masson]

NEVEU J. Base mathématique du calcul des probabilités [Masson]

NIVEN I. Irrational numbers [The Mathematical Association of America]

NORRIS. Markov chains [Cambridge University Press]

OPREA J. Differential Geometry [Prentice Hall]

OUVRARD J.Y. Probabilités I et II [Cassini]

PAPINI O. Algèbre discrète et codes correcteurs [Springer]

PEDOE D. Geometry- A comprehensive course [Dover Publications]

PERKO L. Differential equations and dynamical systems [Springer]

PERRIN D. Cours d'Algèbre [Ellipses]

PERRIN-RIOU B. Algèbre arithmétique et Maple [Cassini]

PÓLYA G. & SZEGÖ G. Problems and Theorems in Analysis [Springer-Verlag]
Volume I
Volume II

POMMELLET A. Agrégation de Mathématiques. Cours d'Analyse [Ellipses]

RALSTON A. & RABINOWITCH P [International Student Edition]
A first curse in numerical analysis

RAMIS E., DESCHAMPS C. & ODOUX J. Cours de Mathématiques spéciales [Masson]
1- Algèbre
2- Algèbre et applications à la géométrie
3- Topologie et éléments d'analyse
4- Séries et équations différentielles
5- Applications de l'analyse à la géométrie

RAO. Linear statistical inference and its applications. [Wiley]

RIDEAU F. Exercices de calcul différentiel [Hermann]

RIESZ F. & NAGY SZ. B. Leçons d'analyse fonctionnelle [Gauthier-Villars]

RIO E. Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants [Springer]

ROLLAND R. Théorie des séries [Cédic/Nathan]
2- Séries entières

ROMBALDI Thèmes pour l'agrégation de mathématiques [EDP Sciences]
Analyse matricielle [EDP Sciences]

ROUVIERE Petit Guidede Calcul Différentiel [Cassini]

RUAUD J.F. et WARUSFEL A. Exercices de maths pour l'agrégation, Algèbre 3 [Masson]

RUDIN W. Analyse réelle et complexe [Masson]

RUDIN W. Real and complex analysis [Mac Graw-Hill]

RUDIN W. Functional analysis [Mac Graw-Hill]

SAKS S. & ZYGMUND A. Fonctions analytiques [Masson]

SAMUEL P. Théorie algébrique des nombres [Hermann]

SAMUEL P. Géométrie projective [PUF]

SAPORTA Probabilités Analyse de données et statistiques [Editions Technip]

SARMANT M. Cl., MERTIER T., PILIBOSSIAN P. et YAMMINI S.
Analyse 1 [Ellipses]

SAUVAGEOT F. Petits problèmes de géométrie et d'algèbre [Springer]

SAUX PICART, Cours de calcul formel [Ellipses]

SCHWARTZ L. Cours d'Analyse [Hermann]

SCHWARTZ L. Analyse [Hermann]
I Topologie générale et analyse fonctionnelle
II Calcul différentiel et équations différentielles

SCHWARTZ L. Méthodes Mathématiques pour les sciences physiques [Hermann]

SEDGEWICK R. Algorithms [Addison Wesley]

SELBERHERR , STIPPEL. Simulation of semi conductor Devices and Processes [Springer]

SERRE J.P. Cours d'arithmétique [PUF]

SERVIEN C. Analyse 3 et 4 [Ellipses]

STANLEY R.P. Enumerative combinatorics [The Waddworth and Brooks]
Volume I

STEWART I. Galois theory [Chapman and Hall]

SZPINGLAS A. Excercices d'algèbre [Cassini]

TAUVEL P. Mathématiques générales pour l'agrégation [Masson]

TAUVEL P. Exercices de mathématiques pour l'agrégation [Masson]

TENENBAUM G. Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres [Institut Elie Cartan]

TENENBAUM G. Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres T 1 [S. M. F.]

TENENBAUM G. Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres T 2 [S. M. F.]

TENENBAUM G. et MENDES France M. Les nombres premiers, Coll. Que Sais-je ? [PUF]

TISSIER A. Mathématiques générale : exercices avec solutions [Bréal]

TITCHMARSH E.C. The theory of functions [Oxford]

TORTRAT A. Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires [Masson]

TRUFFAUT B. Exercices de Géométrie élémentaire [IREM des Pays de la Loire]

VALIRON G. Cours d'analyse mathématique [Masson]
I Théorie des fonctions
II Equations fonctionnelles - Applications

VAUQUOIS B. Outils Mathématiques. Probabilités [Hermann]

VAUTHIER J.et **PRAT J-J.** Cours d'Analyse Mathématique de l'Agrégation [Masson]

VEIGNAU S. Approches impérative et fonctionnelle de l'algorithmique [Springer]

WARUSFEL A. Structures algébriques finies [Classiques Hachette]

WHITTAKER E.T. & WATSON G.N. A course of modern analysis [Cambridge]

WILF H. Generatingfunctionology [Academic Press]

WILLIAMS. Probability with martingales [Cambridge mathematical textbooks

YALE P.B. Geometry and Symmetry [Dover Publications]

YOUNG D.M. & GREGORY R.T. A survey of numerical mathematics [Dover Publications]

ZEHAR G., Cours de cryptographie [Cassini]

ZUILY QUEFFELEC . Analyse pour l'agrégation [Masson]

Ouvrages non autorisés pour l'Oral

Les ouvrages indiqués ci-après n'ont pas été autorisés pendant les épreuves d'oral de la session 2003. Le fait que ces ouvrages ne soient pas autorisés ne constitue pas un jugement sur la qualité des ouvrages. Les interdictions sont décidées par le jury en particulier dans les situations suivantes:

- Ouvrages constituant une compilation artificielle de leçons d'agrégation "prêtes à l'emploi".
- Ouvrages dont la disponibilité générale est trop récente. Dans ce cas on se base en général sur les dates de dépôt légal, et on exige que ces dépôt soient intervenus 6 mois au moins avant le début des épreuves orales.

AVEZ A.	Analyse pour l'agrégation	**[Masson]**
AVEZ A.	La leçon d'analyse à l'oral de l'agrégation	**[Masson]**
AVEZ A.	La leçon de géométrie à l'oral de l'agrégation	**[Masson]**
CHAMBERT-LOIR A.	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Tome 1, 1ère édition	**[Masson]**
CORTIER J.P.	Exercices corrigés d'algèbre et de géométrie	**[CRDP de Champagne Ardenne]**
DUMAS L.	Modélisation à l'oral de l'agrégation - Calcul scientifique	**[Ellipses]**
GUENARD F.	Vademecum de l'oral d'analyse, agrégation de mathématiques	**[Eska]**
MADERE K.	Préparation à l'oral de l'agrégation de mathématiques Leçon d'algèbre Leçon d'analyse	**[Ellipses]**
MADERE K.	Développement pour leçon d'algèbre, agrégation de mathématiques	**[Ellipses]**
MADERE K.	Développement pour leçon d'analyse, agrégation de mathématiques	**[Ellipses]**
MEUNIER P.	Exercices pour l'agrégation interne de mathématiques	**[PUF]**
MEUNIER P.	Préparation à l'agrégation interne, IREM de Montpellier	**[PUF]**
NOURDIN I.	Leçons d'analyse, probabilités, algèbre et géométrie	**[Dunod]**
TOULOUSE P.S.	Thèmes de probabilités et statistiques, agrégation de mathématiques	**[Dunod]**