Nom : Gentil   Prénom : Ivan   (1)

Leçon 223, Le 4/04/2017. Suites numériques. Convergence, valeur d'adhérence. Exemples et applications.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I) Définitions et premières propriétés

Déf : • $u : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ est une suite, on note $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)$, $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

• Si φ : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est st. croissante, $u\circ\varphi$ est une sous-suite.

• Si $\ell \in \mathbb{K}$, $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N$ $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Si elle ne CV pas on dit qu'elle diverge.

ex : • $u_n = (-1)^n$ DV

• Tout réel est limite d'une suite de rationnels.

Prop : • $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre, $\{u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, u \text{ CV}\}$ est aussi une $\mathbb{K}$-al.

• La limite est unique

Déf : λ est une valeur d'adhérence de u si $\exists \varphi$ st. $\nearrow$ tq $u\circ\varphi$ CV vers λ. On note $\Lambda(u)$ l'ensemble des v.a de u.

Prop : • $\Lambda(u)$ est un ensemble fermé et il peut être vide.

• Si u CV vers ℓ alors $\Lambda(u) = \{\ell\}$.

• $\forall F$ fermé de $\mathbb{K}$, $\exists u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tq $F = \Lambda(u)$

exo : Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\Lambda(u)$ est un intervalle dès que $u_{n+1} - u_n \to 0$

exemple : $\Lambda((\cos n)_{n\in\mathbb{N}}) = [-1, 1]$

Déf : $(x_n) \in [0,1[^{\mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 si $\forall\, 0 \leq a < b \leq 1$ $\frac{N_n(a,b)}{n} = \frac{\#\{k \in \{1,\dots,n\},\ x_k \in [a,b]\}}{n} \to b-a$

Théorème : Les prop. suivantes sont équivalentes.

(1) (x_n) est équirépartie modulo 1

(2) $\forall f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \to \int f(t)\,dt$, $f(0) = f(1)$

(3) $\forall p \in \mathbb{Z}^*$ $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p x_k} \to 0$

V1

app : $\forall\, \theta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, la suite $(\theta n \bmod 1)$ est équirépartie modulo 1

Leçon 223   (2)

II Théorèmes de convergence

Déf : (u_n) est de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \geq 0$ tq $\forall n, m \geq N$, $|u_n - u_m| \leq \varepsilon$.

Rq : (u_n) CV $\Rightarrow$ (u_n) de Cauchy

Prop. La réciproque est vraie car $\mathbb{K}$ est complet.

ex : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ est une suite divergente.

Prop (Suites adjacentes) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$ si (u_n) et (w_n) CV vers ℓ alors (v_n) aussi.

Déf On dit que $u_n \to +\infty$ si $\forall M > 0$, $\exists N \geq 0$ tq $\forall n \geq N$, $u_n \geq M$. De façon équivalente si $u_n \to -\infty$.

On note $\tilde{\Lambda}(u)$ l'ens. des v.a de u dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Prop. • $\tilde{\Lambda}(u)$ est non vide

• $L = \overline{\lim}\, u$, $\ell = \underline{\lim}\, u$ alors L (resp. ℓ) est la plus grande (resp. petite) v.a dans $\tilde{\Lambda}(u)$

• u CV ssi $\ell = L$.

Thm : Toute suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ bornée admet une v.a. ($\Lambda(u) \neq \emptyset$) (Bolzano-Weierstrass).

III Exemples de suites classiques

• **Cesaro** : Si $u_n \to \ell$ alors $\frac{u_1 + \dots + u_n}{n} \to \ell$.

• Suites homographiques $u_{n+1} = h(u_n)$ h une homographie.

$h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, $ad - bc \neq 0$ $c \neq 0$. Soit α, β les racines de l'équation $h(x) = x$.

• Si $\alpha \neq \beta$ $\left(\frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}\right)$ est une suite géométrique de raison $\frac{a - \alpha c}{a - \beta c}$

• Si $\alpha = \beta$ $\left(\frac{1}{u_n - \alpha}\right)$ est arithmétique de raison $q = \frac{c}{a - \alpha c}$.

. Suites à récurrence multiple et linéaire d'ordre p.

$u_{n} = a_1 u_{n-1} + \dots + a_p u_{n-p}$ $\quad a_1 \dots a_p \in \mathbb{C}$.

Si $r_1 \dots r_q \in \mathbb{C}$ sont les racines d'ordre $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ du polynôme $x^p - a_1 x^{p-1} \dots - a_p$.

alors l'ensemble des solutions est :

$\{ u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid u_n = P_1(n) r_1^n + \dots + P_q(n) r_q^n \; , \; P_i \in \mathbb{C}_{\alpha_i - 1}[X] \}$.

. Formule de Stirling

$$\frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

DV 2.

. Méthode de Newton

Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^2$ $c<d$ $f(c) < 0 < f(d)$, $f' > 0$, $x_0 \in [c,d]$

$x_{n+1} = F(x_n)$, $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, $f(a) = 0$ $\quad a \in [c,d]$.

Prop 1 : $\exists\, \alpha > 0$, A, $C \in [0,1]$ tq $\forall x_0 \in [a-\alpha, a+\alpha]$, $|x_n - a| \leq A C^n$

Prop 2 : Si de plus $f'' > 0$ sur $[a,d]$ alors

- $[a,d]$ est stable pour F
- $\forall x_0 \in [a,d]$, (x_n) est $\downarrow$ et $0 \leq x_n - a \leq A C^n$

et $x_{n+1} - a \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2$.

IV Applications

. Continuité des fonctions $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$

Prop : (f est continue en a) ssi $\forall u$ CV vers a $f(u_n)$ CV vers $f(a)$.

Prop : (f_n) suite de fonctions. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne CV pas uniformément sur $A \subset \mathbb{K}$ si $\exists\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de A tq $f_n(x_n) - f(x_n) \not\to 0$.

. Topologie

Définition des fermés, des compacts de $\mathbb{K}$.