leçon n° 224 Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

Livres : Gourdon Analyse / F. Rouvière / Zuily-Queffelec.

I) Développements limités et asymptotiques de fonctions.

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$. $f : I \to \mathbb{R}$.

1) Développements limités.

déf 1 : $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $g : I \to \mathbb{R}$.

- f est négligeable devant g au voisinage de x_0 si $\exists\, \varepsilon$ une fonction tel que $\lim\limits_{x_0} \varepsilon(x) = 0$; $f(x) = \varepsilon(x) g(x)$; on note $f = o_{x_0}(g)$
- $f \underset{x_0}{\sim} g$ au voisinage de x_0 ssi $f = g + o_{x_0}(g)$

déf 2 : on dit que f admet un $DL_n(x_0)$ si $\exists\, P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tel que $\varepsilon(x) \underset{x_0}{\longrightarrow} 0$ et $\forall x \in I$

$$f(x) = p(x - x_0) + o((x - x_0)^n)\,\varepsilon(x)$$

ou

$$f(x) = p(x - x_0) + o_{x_0}((x - x_0)^n)$$

ex 3 : $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$ $\quad$ • $\ln(1-x) = -\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k} + o(x^n)$

théo 4 : pour f donné, le $DL_n(x_0)$ est unique.

théo 5 :
- f C^0 en x_0 $\iff$ f admet un $DL_0(x_0)$
- f C^1 en x_0 $\iff$ f admet un $DL_1(x_0)$.

rq 6 : dans le cadre du théorème précédent, on a :
- $f(x_0) = 1^{er}$ terme du $DL_0(x_0)$ en x_0.
- $f'(x_0) = 2^{ème}$ terme du $DL_1(x_0)$ en x_0.

contre exemple 7 : $f(x) = x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) + 1 + x + x^2$ admet un $DL_2(0)$ mais n'est prolongeable que de manière C^1 en 0.

théo 8 : (Taylor-Young) si f est C^n sur un voisinage de x_0, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

théo 9 : si f est C^p ; $p \geq 1$ alors on peut dériver, intégrer terme à terme ses DL à l'ordre p.

ex 10 : $e^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} + o(x^n)$. On peut passer de $\dfrac{1}{1+x}$ à $\ln(1+x)$.

rq 11 : les DL sont compatibles avec les puissances et la composition.

rq 12 : on peut effectuer des changements de variables dans les DL.

théo 13 : on peut effectuer les opérations $+, \times$ sur les DL.

ex 14 : $\operatorname{ch}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k}}{2k!} + o(x^{2n})$.

2) Développements asymptotiques.

déf 15 : une échelle de comparaison au voisinage de x_0, un ensemble $\mathcal{E}$ de fonctions définis sur un voisinage de x_0 telque :
- $\forall f_1 \in \mathcal{E}$; $\forall V$ voisinage de x_0 ; $\exists\, x \in V \setminus \{x_0\}$ telque $f_1(x) \neq 0$.
- $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{E}$; $f_1 \neq f_2 \Rightarrow f_1 = o(f_2)$ ou $f_2 = o(f_1)$.

ex 16 :
- $\mathcal{E} = \{x^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ en 0.
- $\mathcal{E} = \{x^\alpha \log(x)^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ en $+\infty$
- $\mathcal{E} = \{x^\alpha \log(x)^\beta e^{x^\gamma} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ en $+\infty$

déf 17 : On dit que f admet un DA au voisinage de x_0 si $\exists\, f_1, \dots, f_n \in \mathcal{E}$ et $a_1, \dots, a_n$ tel que $f = a_1 f_1 + \dots + a_n f_n + o_{x_0}(f_n)$ avec $\forall i$; $f_{i+1} = o_{x_0}(f_i)$.

rq 18 : un DA relativement à $\mathcal{E} = ((x^n)_{n \geq 0})$ est un $DL_n(0)$.

théo 19 : le DA est unique pour un f donné.

rq 20 : les opérations $+, \times, \circ$ sont compatible avec les DA.

ex 21 : $\dfrac{x \ln|x|}{1 + \exp(x)} = \dfrac{x \ln|x|}{2} - \dfrac{x^2 \ln|x|}{4} + o(x^2 \ln|x|)$

rq 22 : $f(x) \underset{x_0}{\sim} a_1 f_1$.

II) DA, application à l'intégration.

1) Convergence des intégrales impropres.

prop 23 : soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$; $g : [a,b[\to \mathbb{R}^+$ $\mathcal{C}^0$ par morceaux.

- si $f = O_b(g)$ et g intégrable alors f l'est aussi.
- si $f \underset{b}{\sim} g$ alors f et g sont de même nature.

ex 24 : $e^{-|x|} = o(e^{-x^2})$; e^{-x^2} est intégrable donc $e^{-|x|}$ aussi.

théo 25 : soient $f : [a,b[\to \mathbb{R}$; $g : [a,b[\to \mathbb{R}^{+*}$; f, g mesurables.

- Si $\int_a^b g(t)\,dt$ diverge alors : $- f = o_b(g) \Rightarrow \int_a^x f(t)\,dt = o_b\left(\int_a^x g(t)\,dt\right)$

  $- f \underset{b}{\sim} g \Rightarrow \int_a^x f(t)\,dt \underset{b}{\sim} \int_a^x g(t)\,dt$

- Si $\int_a^b g(t)\,dt$ converge alors : $- f = o_b(g) \Rightarrow \int_x^b f(t)\,dt = o_b\left(\int_x^b g(t)\,dt\right)$

  $- f \underset{b}{\sim} g \Rightarrow \int_x^b f(t)\,dt \underset{b}{\sim} \int_x^b g(t)\,dt$

ex 26 : $\frac{1}{x} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^{1-\alpha}}\right)$ $\forall \alpha > 0$. donc $\ln(x) = o_{+\infty}(x^\alpha)$

contre exemple 27 : $\delta > 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\delta}$ converge, $\forall b > \delta$; $\frac{1}{t^b} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^\delta}\right)$

mais $\int_1^x \frac{1}{t^b}\,dt \neq o_{+\infty}\left(\int_1^x \frac{1}{t^\delta}\,dt\right)$ car

$\left(\int_1^x \frac{1}{t^b}\,dt\right)\times\left(\int_1^x \frac{1}{t^\delta}\,dt\right)^{-1} \not\to 0$

2) intégrales à paramètres :

théo 28 : (méthode de Laplace)

soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^2$ tel que f admet un unique maximum en $x_0 \in]a,b[$ tel que $f''(x_0) < 0$. On suppose que $\forall t$ que $\int_a^b e^{t f(x)}\,dx < +\infty$ alors :

$$\forall t \to +\infty \; ; \; \int_a^b e^{t f(x)}\,dx \underset{+\infty}{\sim} e^{t f(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{t|f''(x_0)|}}$$

III) DA de suite et séries.

1) Suites récurrentes

déf 29 : $I \subset \mathbb{R}$ intervalles ; $f : I \to \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset I$

une suite récurrente est une suite de la forme $U_0 \in I$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

ex 30 : On pose $U_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$; $U_{n+1} = \sin(U_n)$ alors :

$$U_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10}\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}$$

théo 31 : soit f définie au voisinage de 0 et continue tel que $f(x) = x - a x^\alpha + o(x^\alpha)$; $\alpha > 1$, $a > 0$

on pose $(U_n)_{n\geq 0}$ tel que : $U_{n+1} = f(U_n)$ alors si U_0 est proche de 0 et que $U_n \to 0$; on a

$U_n \sim (n a(\alpha - 1))^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

exc 32 : $U_{n+1} = \ln(U_n)$; $U_n = \frac{2}{n} + \frac{\ln(n)}{3n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$

théo 33 : (méthode de Newton)
soit P un polynôme réel a racine réelles $\lambda_1 < \dots < \lambda_p$
$\phi : x \in [\lambda_p, +\infty[\to x - \frac{P(x)}{P'(x)}$ est bien définie.
$\forall x_0 \in [\lambda_p, +\infty[$; $x_{n+1} = \phi(x_n)$ converge linéairement vers λ_p et quadratiquement à partir d'un certain rang avec
$x_{n+1} - \lambda_p \sim \frac{1}{2} \frac{P''(\lambda_p)}{P'(\lambda_p)} (x_n - \lambda_p)^2$.

2) série entières

def 34 : S_n est une serie entière si elle est de la forme
$\sum_{\mathbb{N}} a_n z^n$; $z \in \mathbb{C}$; $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

def 35 : soit S_n une serie entiere ; $R = \sup\{r \geq 0 \mid |a_n| r^n \text{ borné}\} \in \overline{\mathbb{R}}^+$
s'appelle le rayon de convergence et :
. $\forall |z| < R$; S_n CVA
. $\forall |z| > R$; S_n DV.

exc 36 : $S_n = \sum \frac{1}{n!} z^n$; $R = +\infty$

prop 37 : soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant un voisinage de 0
$f : I \to \mathbb{R}$ $\mathcal{E}^{\infty}$ est developpable en serie entière sur un voisinage de zéro ssi $\exists\, \alpha > 0$ tel que $(R_n) \to 0$ sur $]-\alpha, \alpha[$
avec $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

exc 38 : . $e^x = \sum \frac{1}{n!} x^n$
. $(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n-1)}{n!} x^n + \dots$

3) séries numériques.

théo 39 : soit $n_0 \in \mathbb{N}$; $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux positive et décroissante alors :
$\sum_{n \geq n_0} f(n)$ et $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature.

théo 40 : soient (U_n) (V_n) deux series a terme positif tel que $U_n \sim V_n$ alors :
. si $\sum U_n$ CV $\Rightarrow \sum V_n$ CV et $\sum_{k \geq n} U_k \sim \sum_{k \geq n} V_k$.
. si $\sum U_n$ DV $\Rightarrow \sum V_n$ DV et $\sum_{k \leq n} U_k \sim \sum_{k \leq n} V_k$.

exc 41 : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$] DEV 1

4) suite des zéros d'une equation differentielle.

théo 42 : soit $E : y'' + qy = 0$; $q \in \mathcal{E}^1([a, +\infty[, \mathbb{R}_+^*)$ tel que
$\int_a^{+\infty} \sqrt{q(u)}\,du = +\infty$ et $q'(x) = o_{+\infty}(q^{3/2}(x))$. alors on a
$N : x \to \mathrm{card}\{u \in [a, x] \mid y(u) = 0\} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi} \int_a^x \sqrt{q(u)}\,du$.