226 groupe D

Suite vectorielles et réelles définies par relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$
Exemples, applications à la résolution approchée d'équation

I Suites réelles récurrentes

1) Définitions

On suppose que f est une fonction continue définie sur un intervalle $J \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

[1] **Def 1** Un intervalle $I \subset J$ est dit stable par f si $f(I) \subset I$

On suppose que I est f-stable

[1] **Def 2** Une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles est appelé suite récurrente si elle est définie par un élement initial $u_0 \in I$ et par une relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$

Ex 3 1) Suite géométrique : $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = q u_n$
2) Suite arithmétique : $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = u_n + r$
3) Suite arithmético-géométrique $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = q u_n + r$

On suppose $(u_n)_n$ récurrente de premier terme u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$

2) Monotomie

[1] **Prop 4** (i) Si I est borné, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée
(ii) Si $\forall x \in I \quad f(x) \geq x$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
(iii) Si $\forall x \in I \quad f(x) \leq x$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

[1] **Prop 5** Si f est croissante alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, elle est croissante si $f(u_0) \geq u_0$ et décroissante si $f(u_0) \leq u_0$

[1] **Cor 6** Si f est décroissante alors les deux sous suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens de variation contraire.

Ex 7 $I = [0, +\infty[\quad f(x) = qx \qquad q > 1 \Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante
$0 < q < 1 \Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante
$I = \mathbb{R} \quad f(x) = qx \qquad q < 0 \Rightarrow (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \ (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ monotone de sens opposé

3) Point fixe

[1] - **Prop 8** Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ alors $f(\ell) = \ell$

Def 9 Un point fixe de f est une solution de $f(x) = x$ [1]

Prop 10 Si $I = [a,b]$ un intervalle fermé borné (et I stable par f) alors f admet un point fixe sur I [1]

Def 11 Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang. [1]
i.e. $\exists a \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N \quad u_n = a$

Prop 12 Soit f une fonction dérivable sur I (stable par f) et α un point fixe tq $|f'(\alpha)| > 1$. Si la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers α alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire [1]

Ex 13 Soit $f : \left| \begin{array}{l} [-1,1] \to [-1,1] \\ x \mapsto 2x^2 - 1 \end{array} \right.$ les points fixes de f sont 1 et $\frac{-1}{2}$ [1]
On a $f'(1) = 4$ et $f'(-1/2) = 2$. Alors aucune suite récurrente ne peut converger vers $-1/2$ et 1 autrement qu'en étant stationnaire

Def 14 Un point fixe est attractif si $|f'(\alpha)| < 1$ [2]
" superattractif si $f'(\alpha) = 0$
" répulsif si $|f'(\alpha)| > 1$

Annexe 15 [2]

Remarque 16 un point fixe répulsif ne se laisse approcher que par la ruse. Par exemple en remplaçant F par sa fonction réciproque. En effet, sa dérivée F' ne s'annule pas sur I, donc garde un signe constant, par suite F est une bijection strictement monotone de I dans un intervalle K. Alors $|(F^{-1})'(a)| = \frac{1}{|F'(a)|} < 1$ et a est donc point fixe attractif sur K de la fonction réciproque F^{-1}. [2]

Déf 17 Une fonction $f : I \to I$ est contractante si : [1]
$\exists k \in]0,1[$ telque $\forall (x,y) \in I^2 \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$

Prop 18 Si f est C^1 sur I et $\sup_{x\in I} |f'(x)| < 1$ alors f est contractante [1]

Th. 19 Si f est contractante et I un intervalle fermé stable alors il existe un unique point fixe α. De plus $|x_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0|$. [2]

[1] **Prop 20** si f est contractante et α le point fixe. Alors $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, u_0 \in I : u_{n+1} = f(u_n)$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

[2] **Contre Ex 21** 1) Si $I =]0,1[$ et $f(x) = \frac{x}{2}$ alors f est contractante mais sans point fixe

2) Si $I = [0,1]$ et $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ f est contractante

I est fermé. Mais f n'admet pas de point fixe car I n'est pas stable.

3) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ n'admet pas de point fixe en effet même si $|f(x) - f(y)| < |x-y|$ $\forall x \neq y$ f n'est pas contractante.

4) $\forall I \subset \mathbb{R}$ $f(x) = x$ a I tout entier comme ensemble des points fixe et f n'est pas contractante.

II Suites vectorielles

ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Def 22 une suite récurrente de vecteurs est la donné de $v_0 \in \mathbb{K}^k$ et de $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$ avec $v_{n+1} = A v_n$

Ex 23 Les suites récurrentes d'ordre p sont un cas particulier des suites vectorielles récurrentes.

En effet on a : $v_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{p-1} \end{pmatrix}$ $v_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1\,0 \\ a_1 & \cdots & \cdots & a_p \end{pmatrix} v_n$

on a bien $u_{n+p} = a_p u_{n+p-1} + \dots + a_1 u_n$

[3] **Def 24** On dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}^k$ converge vers $v \in \mathbb{K}^k$ si $\lim_{n\to+\infty} \|v_n - v\| = 0$ avec $\|.\|$ une norme de $\mathbb{K}^k$

[3] **Rq 25** $\mathbb{K}^k$ est de dimension finie donc toutes les normes sont équivalentes

On va s'interesser à "$\lim_{n\to+\infty} A^n$" pour connaitre des conditions de convergence des suites récurentes vectorielles.

Prop 26 Si A est diagonalisable alors : $\exists P \in GL_k(\mathbb{K})$ et D diagonale tel que : $A = PDP^{-1}$ et $A^n = PD^nP^{-1}$

App. 27 $\boxed{\text{DEV 1}}$

Soit $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, n points du plan complexe donnés par leur affixe. Ils définissent, dans cet ordre, un polygone P donné par la liste de ses sommets. On définit par récurrence une suite de polygones (P_k) avec $P_0 = P$ et où les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arêtes de P_k. Alors (P_k) converge vers l'isobarycentre de P.

Annexe 28

Th 29 soit E un $\mathbb{K}$-ev de dim finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple $(d,n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que d soit diagonalisable, n nilpotent, $u = d+n$ et $don = nod$ de plus $(d,n) \in \mathbb{K}[u]^2$ [5]

Def 30 Le rayon spectral d'une matrice A est le nombre positif défini par $\rho(A) = \max\{|\lambda_i(A)| ; 1 \leq i \leq k\}$ avec $\lambda_i(A)$ les valeurs propre de A [3]

Th 31 Soit A une matrice carrée, les conditions suivantes sont équivalentes : [5]

(i) $\lim_{n\to+\infty} A^n = 0$

(ii) $\lim_{n\to+\infty} A^n v = 0$ $\forall$ vecteur v

(iii) $\rho(A) < 1$

(iv) $\|A\| < 1$ pour au moins une norme matricielle subordonné.

Rq 32 Si $\rho(A) \geq 1$ la suite peut converger, cela va dépendre des conditions initiales

Ex 33 soit $v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ on a $\rho(A) \geq 1$ mais $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Rq 34 Si $A^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} B$ alors $B^2 = B$ i.e. B est un projecteur.

III Vitesse de convergence et algorithme

Def 35 On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge géométiquement vers 0 si elle est dominée par une suite géométrique (k^n) avec $0<k<1$ [4]

Th. 36 Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue monotone telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés. Il existe un unique c tel que $f(c)=0$

on pose $\begin{cases} u_0=(a_0,b_0)=(a,b) \\ u_{n+1}=g(u_n) \end{cases}$

avec $g(x,y)=\begin{cases} (x,\frac{x+y}{2}) & \text{si } f(x)f(\frac{x+y}{2})\leq 0 \\ (\frac{x+y}{2},y) & \text{sinon} \end{cases}$

Alors (u_n) converge vers un zéro de f

Rq 37 La convergence est géométrique avec $k=\frac{1}{2}$

[4] **Def 38** On dit qu'une suite de réels positifs converge lentement vers 0 si elle est minorée par une suite du type A/n^{α}, avec A et α des nombres réels strictement positif.

[4] **Def 39** On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 avec une convergence (au moins) quadratique si elle est dominée par une suite (k^{2^n}) avec $0<k<1$

[2] **Th 40** Soit $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 vérifiant $f(c)<0<f(d)$ et $f'(x)>0$ $\forall x\in[c,d]$. f admet donc un unique zéro en a dans l'intervalle $]c,d[$. On définit F sur $[c,d]$ par $F(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$ On a $F(a)=a$. Le problème de zéro est ramené à un problème de point fixe.

Pour $x_0\in[c,d]$ on pose tant qu'on peut $x_{n+1}=F(x_n)$

1) Il existe un intervalle $J=[a-\alpha,a+\alpha]$ stable par F. En prenant $x_0\in J$, la suite définie par $x_{n+1}=F(x_n)$ converge de façon quadratique (d'ordre 2) vers le point fixe a.

2) Si de plus on suppose que $f''>0$ sur $[c,d]$ et $x_0>a$ alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, $\forall n\in\mathbb{N}$ $x_n>a$

Dans ce cas on a l'équivalent $x_{n+1}-a\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n-a)^2$

[2] **Annexe 41**

Bibliographies :

[1] Initiation aux suites, aux intégrales et à l'algèbre linéaire en L1 - Sylvie Guerre-Delabrière p51-58

[2] Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation - François Rouvière p137-146

[3] Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation - P.G. Ciarlet p21

[4] Suites et séries numériques. Suites et série de fonctions M. El Amrani p. 60.62

[5] Algèbre - Gourdon p191