4- Convergence uniforme et série entière

<u>Th 20:</u> Une SE $\sum a_n z^n$ converge normalement, donc uniformément sur toute partie compacte incluse dans le disque de convergence.

<u>Rmq 21:</u> En général, il n'y a pas convergence uniforme sur le DCV.

<u>Contre-ex. 22:</u> La série entière $\sum z^n$.

<u>Prop 23:</u> Si $R \neq +\infty$, les SE qui CVU sur le DCV D sont celles qui CVU sur le disque fermé $\bar{D}$.

II - PROPRIÉTÉS DE LA SOMME

1- Régularité de la fonction somme

<u>Déf 24:</u> On appelle série entière dérivée d'une SE $\sum a_n z^n$, la SE $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$.

<u>Prop 25:</u> La série entière dérivée d'une SE a le même RDC que celle-ci.

<u>Corollaire 26:</u> La fonction somme S de la SE $\sum a_n z^n$ est de classe C^∞ sur le disque de convergence et on peut la dériver terme à terme: $\forall z \in D = DCV$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $S^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{k!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}$

et $a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$

<u>Ex 27:</u> La SE $\sum z^n$ est de RCV 1, et $\forall z \in D(0,1)$. $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1/1-z$

d'où $\frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{k!\,n!} z^n \quad \forall z \in D(0,1)$.

2- Intégration

Ici, on se place dans $\mathbb{R}$.

<u>Th 28:</u> Soit $\sum a_n x^n$ une SE complexe de variable réelle, de RCV $R>0$. Si $[a,b]$ est un segment inclus dans l'intervalle de CV $]-R,R[$, alors: $\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b x^n\,dx$

<u>Cor. 29:</u> La fonction somme S de la SE $\sum a_n x^n$ a donc comme primitives les fonctions de la forme $x \longmapsto \alpha + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ où $\alpha \in \mathbb{C}$

<u>Ex 30:</u> Les primitives de $x \mapsto \sum x^n/n!$ sont de la forme $x \to \alpha + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1}$

III - ANALYTICITÉ ET HOLOMORPHIE

1- généralités

<u>Déf 31:</u> Soit f une fonction complexe de variable complexe, définie sur une partie X de $\mathbb{C}$. f est développable en série entière en 0 (DSE en 0) s'il existe une SE $\sum a_n z^n$ de RDC $R>0$ et un nombre $r \in]0;R]$ avec $D(0,r) \subset X$ /

$\forall z \in D(0,r)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

<u>Rmq 32:</u> On dit que f est DSE en un point z_0 si la fonction $z \to f(z-z_0)$ est DSE en 0.

<u>Ex 33:</u> Nous verrons plus tard que: $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, donc exp. est DSE en 0.

<u>Rmq 34:</u> Tout polynôme est DSE en tout point x_0 de $\mathbb{R}$.

<u>Rmq 35:</u> Si f est DSE en z_0, alors son DSE $f(z) = \sum a_n (z-z_0)^n$ est unique, c-à-d la suite (a_n) de ses coefficients est unique.

<u>Prop 36:</u> Si f est de classe C^∞ sur un intervalle de la forme $I =]-\alpha,\alpha[$ où $\alpha>0$, et s'il existe $\rho>0$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall x \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f^{(n)}(x)| \leq \frac{M\,n!}{\rho^n}$; Alors f DSE(0) sur $]-R,R[$ où $R = \min(\alpha,\rho)$.

2- Lien avec l'holomorphie

<u>Th 37:</u> Si f est holomorphe sur $D(z_0,r)$ alors f est DSE et le RCV est au moins r. On a $\forall z \in D(z_0,r)$, $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-z_0)^n$.

Réciproquement, si f est DSE en $z_0 \in \mathbb{C}$, alors elle est holomorphe au voisinage de z_0.

<u>Prop 38:</u> Soit une SE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = f(z)$ dont le RCV $R \neq 0$.

En tout point z_0 / $|z_0|<R$, si l'on forme la série de Taylor de f: $g(w) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} w^k$, alors cette SE possède toujours un RCV >0 au moins égal à $R-|z_0|$. De plus, on a:

$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n \quad \forall z \in \mathbb{C} / |z-z_0| < R-|z_0|$

<u>Ex 39:</u> $z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} z^n/n!$ est donc holomorphe.

Leçon 243 : SÉRIES ENTIÈRES. PROPRIÉTÉS DE LA SOMME. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Trinôme A : Lucie JOUX, Méline LUTZ, Sarah CUVILLIER.

Références : Suites et séries numériques. Suites et séries de fonctions (M. El Amrani)

I- SÉRIES ENTIÈRES, DISQUE DE CONVERGENCE

1- Définitions et premières propriétés

Déf 1 : On appelle série entière complexe (=SE) toute série de fonctions $\sum f_n$ dans laquelle f_n est une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $z \to a_n z^n$, où $(a_n)_n$ est une suite donnée de nombres complexes.
Une telle série est notée $\sum a_n z^n$, et $(a_n)_n$ est la suite des coefficients de la SE.

Déf 2 : On appelle somme de la SE $\sum a_n z^n$ l'application S définie en tout point où cela a un sens par :
$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Prop 3 (Lemme d'Abel) : Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Supposons que la suite $(a_n z_0^n)_n$ soit bornée. Alors pour tout $z \in \mathbb{C} / 0 \leq |z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument (=CVA)

Th 4 : Il existe un nombre R et un seul tel que :
1- $|z| < R \Rightarrow$ la série $\sum a_n z^n$ CVA.
2- $|z| > R \Rightarrow$ la série $\sum a_n z^n$ DV.

Déf 5 : L'élément R de $\overline{\mathbb{R}_+} = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ défini ci-dessus par $R = \sup \{r \in \mathbb{R}_+ / \text{la suite } (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\}$ s'appelle le rayon de convergence (=RDC) de la SE $\sum a_n z^n$.

Déf 6 : Le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C} / |z| < R\}$ est le disque de convergence de la SE. (=DCV)

Déf 7 : L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} / |z| = R\}$ est appelé le cercle d'incertitude. Si R est fini, on ne peut pas prévoir le comportement de la série sur ce cercle.

Ex 8 : 1- La SE $\sum z^n$, de RDC valant 1, DV en tout point $/|z|=1$.
2- La SE $\sum (z^n/n^2)$, dont le RDC vaut 1, CV en tout point $/|z|=1$.
3- La SE $\sum (z^n/n)$, dont le RDC vaut 1, DV au point $z=1$ mais CV en tout autre point tq $|z|=1$.

Th 9 (Abel angulaire) : Soit $\sum a_n z^n$ une SE de RDC ≥ 1 tq $\sum a_n$ CV, f la somme de cette SE sur $D(0,1)$. On fixe $\theta_0 \in [0, \pi/2[$ et on pose $\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1 \text{ et } \rho > 0, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$
Alors : $\lim_{z \in \Delta_{\theta_0}, z \to 1} f(z) = \sum a_n$

Th 10 (Taubérien faible) : Soit $\sum a_n z^n$ une SE de RCV $=1$, f la somme de cette SE sur $D(0,1)$. On suppose qu'il existe $S \in \mathbb{C} / \lim_{x \to 1^-} f(x) = S$. Si $a_n = o(1/n)$, alors $\sum_n a_n$ CV et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$. DEV 1

2- Détermination du RDC

Conventions : $1/R = 0$ si $R = +\infty$ et $1/R = +\infty$ si $R = 0$.

Th 11 (Formule de Hadamard) : Le RDC R d'une SE $\sum a_n z^n$ est donné par : $R = 1/L$ où $L = \limsup_{n \to +\infty} |a_n|^{1/n}$

Ex 12 : La SE $\sum 2^n z^{2n}$ a pour RCV $1/\sqrt{2}$.

Prop 13 (Règle de D'Alembert) : Soit $\sum a_n z^n$ une SE de RDC noté R. Si la suite de terme général $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ CV vers $L \in \overline{\mathbb{R}_+}$, alors $R = 1/L$.

Ex 14 : La SE $\sum z^n/n!$ a un RDC valant $+\infty$, car $\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = 0$

Rmq 15 : Si RDC $= +\infty$, $\sum a_n z^n$ CV pour tout $z \in \mathbb{C}$ et la somme de cette SE définit une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ dite fonction entière.

3- Opérations sur les séries entières

Déf 16 : Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont deux SE, on appelle série somme la SE $\sum (a_n + b_n) z^n$.

Th 17 : Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux SE, de RDC respectifs Ra et Rb. Alors le RCV R de la série somme vérifie $R \geq \min(Ra, Rb)$, avec égalité si $Ra \neq Rb$. De plus, si $|z| < \min(Ra, Rb)$:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n.$$

Déf 18 : Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont deux SE, on appelle série produit (ou produit de Cauchy) la SE $\sum c_n z^n$ définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \; c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Th 19 : Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux SE, de RDC respectifs Ra et Rb. Alors le RDC R de la série produit vérifie $R \geq \min(Ra, Rb)$. De plus, si $|z| < \min(Ra, Rb)$, on a :
$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$
où c_n est défini par la déf 18.

3- Exemples

Déf 40: On appelle fonction exponentielle complexe, notée $\exp : z \to e^z$, la fonction somme de la série entière $\sum z^n/n!$:
$$\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n/n!$$

Rmq 41: le RCV R de cette SE vaut $+\infty$, donc exp est bien définie pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Rmq 42: Pour $z \in \mathbb{R}$, on retrouve l'exponentielle réelle usuelle.

Prop 43: (a) $z \to e^z$ est holomorphe et $(e^z)' = e^z$
(b) $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2,\ e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$
(c) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$
(d) $\forall z \in \mathbb{C},\ |e^z| = e^{Re(z)}$; $\arg(e^z) = \mathrm{Im}(z) \pmod{2\pi}$
(e) l'exponentielle est périodique, de période $2i\pi$

Déf 44: On peut définir pour $z \in \mathbb{C}$:
$$\cos(z) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \text{ et } \sin(z) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Déf 45: Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle $\log(z)$ un nombre complexe u tel que $e^u = z$.

Déf 46: La détermination principale du logarithme est définie sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ par la formule $\log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$ et $\arg(z) \in]-\pi, \pi[$. C'est une fonction holomorphe.

Prop 47: Nous avons le développement suivant :
$$\forall |z|<1 : \log(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$$

IV - APPLICATIONS

1. Séries entières et équations différentielles

Prop 48: Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconque.
$$\forall x \in]-1;1[: (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \times \cdots \times (\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

Appli 49: Les fonctions solutions de l'équation différentielle $x^2(1-x)y'' - x(1-x)y' + y = 0$, qui sont DSE au voisinage de 0 sont les fonctions de la forme λf_1 où $f_1(x) = \frac{x}{1-x}$

2- Séries entières et dénombrement

Th 50 (Nombres de Bell) DEV 2
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n le nombre de partitions de $[\![1;n]\!]$, et par convention $B_0 = 1$. On a alors $B_n = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty} k^n/k!$

3- Séries entières et intégration

Appli 51: l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{ch}\,x}$ est convergente, et :
$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{ch}\,x}dx = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$