4.2 Corrigé de l'épreuve écrite d'Analyse et Probabilités

Exercices préliminaires

1. D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de polynômes qui converge uniformément vers g sur $[0,1]$. Ensuite, plusieurs démonstrations sont possibles, en voilà une : d'après les hypothèses et par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}\int_0^1 g^2(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \left(g^2(t)-g(t)P_n(t)\right)\mathrm{d}t\\ &\leqslant \|g-P_n\|_{\infty,[0,1]}\int_0^1 |g(t)|\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 g^2(t)\mathrm{d}t = 0$. Donc, comme $t\mapsto g^2(t)$ est continue et positive sur $[0,1]$, d'intégrale nulle, on obtient que g est l'application nulle.

2. Pour tout $\xi\in\mathbf{R}^N$, $|e^{-ix\cdot\xi}f(x)|\leqslant|f(x)|$, avec $f\in L^1(\mathbf{R}^N)$, donc $\widehat{f}$ est bien définie sur $\mathbf{R}^N$. De plus
— $\forall\xi\in\mathbf{R}^N$, $x\mapsto e^{-ix\cdot\xi}f(x)$ est mesurable sur $\mathbf{R}^N$
— $\forall x\in\mathbf{R}^N$, $\xi\mapsto e^{-ix\cdot\xi}f(x)$ est continue sur $\mathbf{R}^N$
— $\forall x\in\mathbf{R}^N$, $\forall x\in\mathbf{R}^N$, $|e^{-ix\cdot\xi}f(x)|\leqslant|f(x)|$, avec $f\in L^1(\mathbf{R}^N)$.
Ainsi, par le théorème de continuité sous le signe intégral, $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbf{R}^N$. Enfin,

$$\forall\xi\in\mathbf{R}^N,\ |\widehat{f}(\xi)|\leqslant\int_{\mathbf{R}^N}|f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

ce qui prouve que $\widehat{f}$ est bornée sur $\mathbf{R}^N$.

3. Soit $\varepsilon>0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers u donc

$$\forall x\in D,\ \exists n_{x,\varepsilon}\in\mathbf{N},\ |u_{n_{x,\varepsilon}}(x)-u(x)|\leqslant\varepsilon/2.$$

On traduit alors la continuité de $t\mapsto(u_{n_{x,\varepsilon}}-u)(t)$:

$$\exists r_{x,\varepsilon}>0,\ \forall t\in D,\ \|x-t\|<r_{x,\varepsilon},\ |u_{n_{x,\varepsilon}}(t)-u(t)|\leqslant\varepsilon.$$

La famille $\left\{B(x,r_{x,\varepsilon})\cap D,\ x\in D\right\}$ constitue un recouvrement du compact D, on peut donc en extraire un sous-recouvrement fini : $(B(x_i,r_{x_i,\varepsilon})\cap D)_{i\in\{1,..,p_\varepsilon\}}$. On pose $N_\varepsilon=\max_{i\in\{1,..,p_\varepsilon\}}n_{x_i,\varepsilon}$, qui est donc fini. Soit $x\in D$ et $n\geqslant N_\varepsilon$. Alors il existe $i\in\{1,..,p_\varepsilon\}$ tel que $x\in B(x_i,r_{x_i,\varepsilon})\cap D$ et la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ étant décroissante, on en déduit

$$0\leqslant u_n(x)-u(x)\leqslant u_{N_\varepsilon}(x)-u(x)\leqslant u_{n_{x_i,\varepsilon}(x)}-u(x)\leqslant\varepsilon$$

Ainsi, on a exhibé un entier N_ε tel que

$$\forall x\in D,\ \forall n\geqslant N_\varepsilon,\ |u_n(x)-u(x)|\leqslant\varepsilon,$$

qui prouve bien la convergence uniforme de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sur D.

Autour de la transformée de Laplace

1. Soit $s\in\Lambda(f)$, alors $\forall s'>s$, $\forall t\geqslant 0$, $e^{-s't}\leqslant e^{-st}$ et donc $|f(t)|e^{-s't}\leqslant|f(t)|e^{-st}$. Ainsi $t\mapsto f(t)e^{-s't}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et donc $s'\in\Lambda(f)$. Enfin, si $\Lambda(f)$ est non vide, on a par ce qui précède que $\forall(s,s')\in\Lambda(f)$, $[s,s']\in\Lambda(f)$, donc $\Lambda(f)$ est un convexe de $\mathbf{R}$ et de plus $[s,+\infty[\in\Lambda(f)$, ce qui prouve que $\Lambda(f)$ est un intervalle non borné à droite.

2. Soit $z \in P_{\sigma(f)}$. Alors, comme $\forall t \geqslant 0$ on a $|e^{-zt}f(t)| = e^{-\mathrm{Re}(z)t}|f(t)|$ qui est intégrable sur $\mathbf{R}_+$, $L(f)$ est bien définie sur $P_{\sigma(f)}$.
3. On vérifie les points suivants :
   — $\forall t \in \mathbf{R}_+$, $z \mapsto e^{-zt}f(t)$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $\dfrac{\partial^n}{\partial z^n}\left(e^{-zt}f(t)\right) = (-1)^n t^n e^{-zt} f(t)$.
   — $\forall z \in P_{\sigma(f)}$, $t \mapsto e^{-zt}f(t)$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+$
   — Soit K un compact de $P_{\sigma(f)}$ alors il existe $\gamma \in \mathbf{R}$, tel que $e^{-\gamma t}|f(t)|$ est $L^1(\mathbf{R})$ et tel que $\forall z \in K$, $\mathrm{Re}(z) > \gamma$. Il s'ensuit que $\forall z \in K$, $\forall t \in \mathbf{R}_+$
   $$\left|e^{-zt}f(t)\right| = e^{-\mathrm{Re}(z)t}|f(t)| = e^{-(\mathrm{Re}(z)-\gamma)t}e^{-\gamma t}|f(t)|.$$
   Or, dans ces conditions, $t \mapsto e^{-(\mathrm{Re}(z)-\gamma)t}$ est bornée par 1. Ainsi $\forall z \in K$, $\forall t \in \mathbf{R}_+$
   $$\left|e^{-zt}f(t)\right| \leqslant e^{-\gamma t}|f(t)|$$
   et le majorant est intégrable sur $\mathbf{R}_+$.

   On peut appliquer le théorème d'holomorphie sous le signe intégral et on obtient que $L(f)$ est holomorphe sur $P_{\sigma(f)}$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall z \in P_{\sigma(f)}$,
   $$L(f)^{(n)}(z) = \int_{\mathbf{R}} (-1)^n t^n e^{-zt} f(t)\,\mathrm{d}t = L\Big((-1)^n t^n f(t)\Big)(z)$$
4. Soit $b \in \mathbf{R}_+$. Par intégration par parties, pour $z \in P_\beta$
   $$\int_0^b f'(t)e^{-zt}\,\mathrm{d}t = \left[f(t)e^{-zt}\right]_0^b + z\int_0^b f(t)e^{-zt}\,\mathrm{d}t$$
   Mais comme $\beta > \sigma(f')$, $\displaystyle\int_0^b f'(t)e^{-zt}\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand b tend vers $+\infty$, et l'intégrale $\displaystyle\int_0^b f(t)e^{-zt}\,\mathrm{d}t$ admet aussi une limite quand b tend vers $+\infty$, donc $t \mapsto f(t)e^{-zt}$ admet une limite finie en $+\infty$ et cette limite ne peut vérifier que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)e^{-zt} = 0$ puisque $t \mapsto f(t)e^{-zt}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+$. Ainsi $\forall z \in P_\beta$
   $$L(f')(z) = zL(f)(z) - f(0).$$
5. On distingue les cas suivants :
   (a) — Si $\omega = 0$, la fonction est nulle et donc $\sigma(f) = -\infty$ et $L(f) = 0$.
   — Si $\omega \neq 0$, $t \mapsto \sin(\omega t)$ est continue sur $\mathbf{R}_+$ et $\forall t \geqslant 0$, $\forall z \in P_0$, $|\sin(wt)e^{-zt}| = |\sin(\omega t)|e^{-\mathrm{Re}(z)t} \leqslant e^{-\mathrm{Re}(z)t}$, et ce majorant est intégrable sur $\mathbf{R}_+$, donc $\sigma \leqslant 0$. De plus, $t \mapsto \sin(\omega t)$ n'est pas intégrable sur $\mathbf{R}_+$, donc $\sigma \geqslant 0$. Il s'ensuit que $\sigma = 0$ et $\forall z \in P_0$, on a
   $$\begin{aligned} L(\sin(\omega t))(z) &= \int_0^{+\infty} \sin(\omega t)e^{-zt}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})e^{-zt}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2i}\left[\frac{e^{t(i\omega - z)}}{i\omega - z} + \frac{e^{-t(i\omega+z)}}{i\omega + z}\right]_0^{+\infty}. \end{aligned}$$
   Or lorsque $\mathrm{Re}(z) > 0$ on a
   $$|e^{t(i\omega - z)}| = e^{-t\mathrm{Re}(z)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0,$$

et

$$|e^{-t(i\omega+z)}| = e^{-t\mathrm{Re}(z)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi, $\forall z \in P_0$, on

$$\begin{aligned} L(\sin(\omega t))(z) &= -\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{i\omega - z} + \frac{1}{i\omega + z}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{i\omega + z}{\omega^2 + z^2} + \frac{i\omega - z}{\omega^2 + z^2}\right) \\ &= \frac{\omega}{\omega^2 + z^2}. \end{aligned}$$

Les pôles sont $\pm i\omega$ et on obtient bien une fonction méromorphe comme fraction rationnelle.

(b) De même qu'à la question précédente, le calcul donne $\sigma = 0$ et $\forall z \in P_0$, $L(\cos(\omega t))(z) = \dfrac{z}{\omega^2 + z^2}$. Ainsi les pôles sont $\pm i\omega$ et on a bien une fonction méromorphe comme fraction rationnelle.

(c) De même que précédemment, $\sigma = 0$. En utilisant les résultats de la question II.3, puisque toutes hypothèses sont validées, on a immédiatement

$$L(-t\sin(\omega t))(z) = L(\sin(\omega t))'(z) = \frac{-2z\omega}{(\omega^2 + z^2)^2},$$

et donc $L(t\sin(\omega t))(z) = \dfrac{2z\omega}{(\omega^2 + z^2)^2}$. Ainsi les pôles sont $\pm i\omega$, ce sont des pôles doubles et on a bien une fonction méromorphe comme fraction rationnelle.

(d) Ici $\sigma = +\infty$ car $\forall s \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{t^2 - st} = +\infty$, et la fonction n'admet pas de transformée de Laplace.

6. (a) Puisque f est continue, h est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+$. Une intégration par parties donne alors

$$\forall b > 0,\ \int_0^b f(t)e^{-(x+a)t}\mathrm{d}t = \int_0^b h'(t)e^{-at}\mathrm{d}t = \left[h(t)e^{-at}\right]_0^b + a\int_0^b e^{-at}h(t)\mathrm{d}t$$

Le membre de gauche admet une limite (égale à $Lf(x+a)$) quand $b \to +\infty$.
On a donc

$$Lf(x+a) = \lim_{b\to+\infty}\left(h(b)e^{-ab} + a\int_0^b e^{-at}h(t)\mathrm{d}t\right)$$

Par ailleurs, h admet une limite finie en $+\infty$ et $e^{-ab} \to 0$ quand b tend vers $+\infty$ (car $a > 0$). Ainsi,

$$Lf(x+a) = \lim_{b\to+\infty} a\int_0^b e^{-at}h(t)\ dt = a\int_0^{+\infty} e^{-at}h(t)\mathrm{d}t$$

L'existence de l'intégrale étant une conséquence de l'existence des autres limites.

(b) i. La fonction $u \mapsto -\ln(u)$ est C^1 et bijective de $]0,1[$ sur $\mathbf{R}_+^*$; on peut donc poser $u = e^{-t}$ pour obtenir (ce qui inclut l'existence de l'intégrale du membre de droite)

$$\int_0^{+\infty} e^{-t(n+1)}h(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 u^n h\left(-\ln(u)\right)\ \mathrm{d}u.$$

Par ailleurs le membre de gauche vaut $\dfrac{1}{n+1}Lf(x+(n+1))$ et est nul. Ainsi

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \int_0^1 u^n h\left(-\ln(u)\right)\ \mathrm{d}u = 0.$$

ii. La fonction $g : u \mapsto h(-\ln(u))$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0 (car h admet une limite finie en $+\infty$). On en déduit que g est nulle par la question 1 de la partie I appliquée à la partie réelle et imaginaire de g. Quand u varie dans $[0,1]$, $-\ln(u)$ varie dans $\mathbf{R}^+$ et h est donc nulle sur $\mathbf{R}^+$.

Soit $f \in \Sigma'$. Supposons que $Lf = 0$; la question précédente indique que $\forall x$, une primitive de $u \mapsto e^{-xu}f(u)$ est nulle sur $\mathbf{R}^+$. Pour tout x de E, $u \mapsto e^{-xu}f(u)$ est donc nulle sur $\mathbf{R}^+$; f est donc nulle sur $\mathbf{R}^+$. Ainsi L est injective sur Σ' puisque L est linéaire sur Σ', sous espace vectoriel de Σ.

7. (a) Il suffit d'énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.

(b) Tout d'abord, comme $f'' = -f + 2\cos$, on a $\sigma(f'') < +\infty$. On pose alors

$$\beta = \max(\sigma(f_1), \sigma(f_1'), \sigma(f_1''))$$

pour pouvoir utiliser les résultats de la question 4. Alors $\forall z \in P_\beta$, il vient

$$\begin{array}{rcl} L(f_1'')(z) & = & zL(f_1')(z) - f_1'(0) = zL(f_1')(z) - 1 \\ & = & z(zL(f_1)(z) - f_1(0)) - 1 \\ & = & z^2L(f_1)(z) - 1 \end{array}$$

Or $f_1'' = 2\cos(t) - f_1$; par linéarité de la transformée de Laplace et en utilisant la question 4 de cette partie, $\forall z \in P_{\beta'}$ avec $\beta' = \max(0, \beta)$, on obtient

$$L(f_1'')(z) = 2\frac{z}{z^2+1} - L(f_1)(z).$$

Ainsi

$$z^2L(f_1)(z) - 1 = 2\frac{z}{z^2+1} - L(f_1)(z)$$

soit, $\forall z \in P_\beta$,

$$(1+z^2)L(f_1)(z) = \frac{2z}{z^2+1} + 1.$$

Et donc $\forall z \in P_\beta$ on a

$$L(f_1)(z) = \frac{2z}{(z^2+1)^2} + \frac{1}{1+z^2}.$$

(c) Avec les questions 5, $\forall z \in P_0$ (P_0 convenant à toutes les fonctions considérées), on obtient

$$L(\sin(t))(z) = \frac{1}{1+z^2} \quad \text{et} \quad L(t\sin(t)) = \frac{2z}{(1+z^2)^2}.$$

On peut donc penser, par injectivité de L sur Σ', que $\forall t \in \mathbf{R}_+$, $f_1(t) = t\sin(t) + \sin(t)$ et on vérifie que f est définie sur $\mathbf{R}$ et est solution du $(PB1)$; on conclut par unicité. Ainsi, $\forall t \in \mathbf{R}$, $f_1(t) = t\sin(t) + \sin(t)$.

Transformée de Fourier en dimension 1

1. (a) On distingue les cas suivants, $\forall \xi \in \mathbf{R}$,

$$\begin{array}{rcl} \widehat{f_b}(\xi) & = & \displaystyle\int_{-b}^{b} e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x \\ & = & \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{2\sin(b\xi)}{\xi} & \text{si} \quad \xi \neq 0 \\ 2b & \text{si} \quad \xi = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

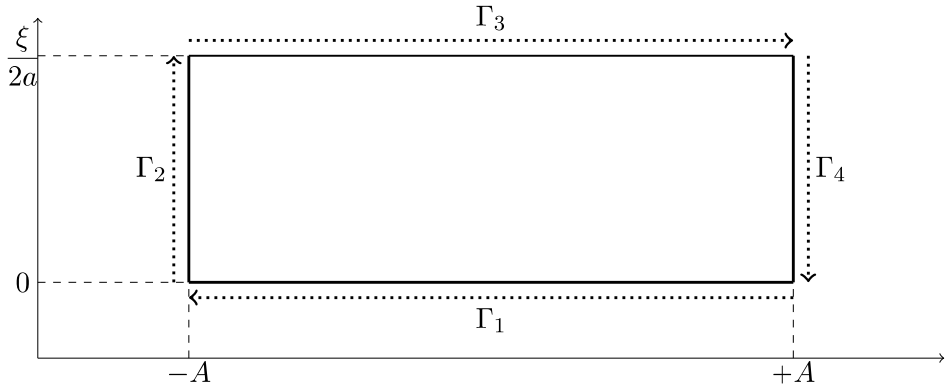

FIGURE 4.1 – Intégration sur le contour Γ.

(b) La fonction f_b est bien continue sur $\mathbf{R}$ mais par contre elle n'est pas intégrable :

$$\begin{aligned}\int_1^X \frac{|\sin(b\xi)|}{\xi}\,\mathrm{d}\xi &\geqslant \int_1^X \frac{|\sin(b\xi)|^2}{\xi}\,\mathrm{d}\xi\\ &\geqslant \int_1^X \frac{1}{2\xi}\,\mathrm{d}\xi - \int_1^X \frac{\cos(2b\xi)}{2\xi}\,\mathrm{d}\xi\\ &\geqslant \int_1^X \frac{1}{2\xi}\,\mathrm{d}\xi - \frac{\sin(2bX)}{4X} + \frac{\sin(2b)}{4X} - \int_1^X \frac{\sin(2b\xi)}{2b\xi^2}\,\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

avec le premier terme qui diverge et les autres qui convergent quand $X \to \infty$. Ainsi $\widehat{f_b}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ donc sur $\mathbf{R}$.

2. (a) La fonction f_a est continue sur $\mathbf{R}$, paire et $o(1/x^2)$ en $+\infty$ donc f_a est intégrable sur $\mathbf{R}$.

(b) On considère le rectangle $\Gamma = [-A, A] \times [0, \frac{\xi}{2a}]$ et on note $\Gamma_1 = [-A, A] \times \{0\}$, $\Gamma_2 = \{A\} \times [0, \frac{\xi}{2a}]$, $\Gamma_3 = [-A, A] \times \{\frac{\xi}{2a}\}$, $\gamma_4 = \{-A\} \times [0, \frac{\xi}{2a}]$ parcouru dans le sens trigonométrique Ce contour Γ est fermé et g est holomorphe sur $\mathbf{C}$ donc $\int_\Gamma g(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

On a alors

$$\int_{\Gamma_1} g(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-A}^{A} e^{-at^2}\,\mathrm{d}t$$

et

$$\int_{\Gamma_3} g(z)\,\mathrm{d}z = \int_{A}^{-A} e^{-a(x+i\frac{\xi}{2a})^2}\,\mathrm{d}t = -\int_{-A}^{A} e^{-(\sqrt{a}x+i\frac{\xi}{2\sqrt{a}})^2}\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_{\Gamma_2} g(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(A+it)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-aA^2} e^{-i2aAt} e^{-at^2}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma_2} g(z)\,\mathrm{d}z\right| &\leqslant e^{-aA^2} \textstyle\int_0^{\frac{\xi}{2a}} \left|e^{-i2aAt} e^{-at^2}\right|\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant e^{-aA^2} \int_0^{+\infty} e^{-at^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

et

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{\Gamma_2} g(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

On obtient la même conclusion pour Γ_4. Ainsi, en faisant tendre A vers $+\infty$ et en utilisant que $\int_\Gamma g(z)\,\mathrm{d}z = 0$, on obtient

$$\lim_{A\to+\infty} \left(\int_{-A}^{A} e^{-at^2}\,\mathrm{d}t - \int_{-A}^{A} e^{-(\sqrt{a}x+i\frac{\xi}{2\sqrt{a}})^2}\,\mathrm{d}t\right) = 0$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}} e^{-(\sqrt{a}x+i\frac{\xi}{\sqrt{a}})^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbf{R}} e^{-at^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{\mathbf{R}} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}.\end{aligned}$$

(c) Pour tout $\xi \in \mathbf{R}$ on a

$$\begin{aligned}\widehat{f_a}(\xi) &= \int_{\mathbf{R}} e^{-ax^2}e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbf{R}} e^{-(\sqrt{a}x+i\frac{\xi}{2\sqrt{a}})^2}e^{(i\frac{\xi}{2\sqrt{a}})^2}\,\mathrm{d}x \\ &= e^{(i\frac{\xi}{2\sqrt{a}})^2}\int_{\mathbf{R}} e^{-(\sqrt{a}x+i\frac{\xi}{2\sqrt{a}})^2}\,\mathrm{d}x \\ &= e^{-\frac{\xi^2}{4a}}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} = f_a\left(\frac{\xi}{2a}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}.\end{aligned}$$

(d) Ainsi, comme f_a admet une transformée de Fourier, on déduit de ce qui précède que $\widehat{f_a}$ admet aussi une transformée de Fourier et on écrit, $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}\widehat{\widehat{f_a}}(x) &= \int_{\mathbf{R}} e^{-ix\xi}\widehat{f_a}(\xi)\ d\xi \\ &= \int_{\mathbf{R}} e^{-ix\xi}f_a\left(\frac{\xi}{2a}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\ d\xi \\ &= 2a\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\int_{\mathbf{R}} e^{-i2axy}f_a(y)\ dy \\ &= 2\sqrt{\pi a}\int_{\mathbf{R}} e^{-i2axy}f_a(y)\ dy \\ &= 2\sqrt{\pi a}\check{f}_a(2ax) \\ &= 2\sqrt{\pi a}f_a(x)\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} \\ &= 2\pi f_a(x).\end{aligned}$$

On retrouve ainsi la formule d'inversion de Fourier. D'ailleurs on pouvait aussi établir cette question en utilisant la formule d'inversion de Fourier en justifiant bien que $\widehat{f}$ est intégrable.

3. La fonction K est continue sur $\mathbf{R}$, paire et intégrable sur $[0,+\infty[$ comme fonction de référence, donc K est intégrable sur $\mathbf{R}$ et admet une transformée de Fourier. On a alors, $\forall \xi \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}\widehat{g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{0} e^{x}e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} e^{-x}e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{e^{x}e^{-ix\xi}}{1-i\xi}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-x}e^{-ix\xi}}{-1-i\xi}\right]_{0}^{+\infty} \\ &= \frac{1}{1-i\xi} + \frac{1}{1+i\xi} \\ &= \frac{2}{1+\xi^2}.\end{aligned}$$

On remarquera que les passages à la limite sont justifiés car $|e^{x}e^{-ix\xi}| = e^{x} \underset{x\mapsto-\infty}{\longrightarrow} 0$ et $|e^{-x}e^{-ix\xi}| = e^{-x} \underset{x\mapsto+\infty}{\longrightarrow} 0$.

4. (a) i. Soit y une solution de $y''-y=f$, soit $y''=f+y \in \mathscr{S}(\mathbf{R})$ donc y'' admet une transformée

de FOURIER et $\forall \xi \in \mathbf{R}$ on peut écrire

$$\begin{aligned}
\widehat{y''}(\xi) &= \int_{\mathbf{R}} e^{-ix\xi} y''(x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad \text{par double IPP, licite puisque } y \in \mathscr{S}(\mathbf{R}) \\
&= (i\xi)^2 \int_{\mathbf{R}} e^{-ix\xi} y(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\xi^2 \widehat{y}(\xi).
\end{aligned}$$

Et ainsi, si y est solution du problème, on a $\forall \xi \in \mathbf{R}$

$$\widehat{y''}(\xi) - \widehat{y}(\xi) = \widehat{f}(\xi)$$

soit

$$-\xi^2 \widehat{y}(\xi) - \widehat{y}(\xi) = \widehat{f}(\xi),$$

ou encore

$$\widehat{y}(\xi) = -\frac{1}{1+\xi^2}\widehat{f}(\xi)$$

ii. On va procéder par analyse et synthèse. Supposons que l'équation admet une solution y dans $\mathscr{S}(\mathbf{R})$, alors y admet une transformée de FOURIER, qui par la question précédente, vérifie $\forall \xi \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned}
\widehat{y}(\xi) &= -\frac{1}{1+\xi^2}\widehat{f}(\xi) = -\frac{1}{2}\widehat{g}(\xi)\widehat{f}(\xi) \\
&= -\frac{1}{2}\widehat{g * f}(\xi).
\end{aligned}$$

Comme la transformée de FOURIER est un isomorphisme sur $\mathscr{S}(\mathbf{R})$, on obtient

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbf{R}, \quad y(x) &= -\frac{1}{2} g * f(x) \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} e^{-|x-t|} f(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Pour l'étape de synthèse, on pose, $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}
y(x) &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} e^{-|x-t|} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2}e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}e^{x}\int_{x}^{\infty} e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Ainsi y appartient à $\mathscr{S}(\mathbf{R})$ et est bien solution du problème donné.

(b) i. Pour tout $\xi \in \mathbf{R}$, on a $|g(\xi)| \leqslant |\widehat{f}(\xi)|$. Donc $g \in L^2(\mathbf{R})$ et comme la transformée de FOURIER est un isomorphisme sur $L^2(\mathbf{R})$, il existe un unique $y \in L^2(\mathbf{R}^2)$ tel que $\widehat{y} = g$.

ii. D'après la question précédente, $\forall \xi \in \mathbf{R}$, $-(1+\xi^2)\widehat{y}(\xi) = \widehat{f}(\xi)$. Ainsi, $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$, par l'isomorphisme de PLANCHEREL, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}} y(x)(-\varphi(x) + \varphi''(x))\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \widehat{y}(\xi)(-\widehat{\varphi}(\xi) + \widehat{\varphi''}(\xi))\mathrm{d}\xi \\
&\quad \text{on utilise alors que } \xi^2\widehat{\varphi}(\xi) = -\widehat{\varphi''}(\xi) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \widehat{y}(\xi)(-\widehat{\varphi}(\xi) - \xi^2\widehat{\varphi}(\xi))\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} -\widehat{y}(\xi)(1+\xi^2)\widehat{\varphi}(\xi)\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \widehat{f}(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbf{R}} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Transformée de Fourier en dimension 2

1. Par le théorème de Fubini-Tonelli, on a $h \in L^1(\mathbf{R}^2)$:
$$\int_{\mathbf{R}^2} h(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} e^{-ax_1^2}\,\mathrm{d}x_1 \times \int_{\mathbf{R}} e^{-ax_2^2}\,\mathrm{d}x_2 < +\infty.$$
Et de même par le théorème de Fubini-Lebesgue, $\forall \xi \in \mathbf{R}$
$$\begin{aligned}\widehat{h}(\xi) &= \int_{\mathbf{R}^2} e^{-i(x_1\xi_1+x_2\xi_2)} e^{-(ax_1^2+ax_2^2)}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \\ &= \int_{\mathbf{R}} e^{-ix_1\xi_1} e^{-ax_1^2}\,\mathrm{d}x_1 \times \int_{\mathbf{R}} e^{-ix_1\xi_2} e^{-ax_2^2}\,\mathrm{d}x_2 \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\xi_1^2}{4a}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\xi_2^2}{4a}} \\ &= \frac{\pi}{a} e^{-\frac{(\xi_1^2+\xi_1^2)}{4a}}.\end{aligned}$$

2. (a) Comme $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ sont continues et à support compact, elles appartiennent à $L^1(\mathbf{R}^2)$ et admettent une transformée de Fourier. On a de plus par intégration par parties, licites puisque les fonctions sont à support compact, $\forall \xi \in \mathbf{R}^2$
$$\begin{aligned}\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_1}}(\xi) &= \int_{\mathbf{R}^2} e^{-ix\cdot\xi} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\mathbf{R}^2} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(e^{-ix\cdot\xi}\right) f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= +i\xi_1 \widehat{f}(\xi).\end{aligned}$$
(b) De même, on a
$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_2}}(\xi) = +i\xi_2 \widehat{f}(\xi).$$
Ainsi, d'après ce qui précède,
$$|\xi_1 \widehat{f}(\xi)| = \left|\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_1}}(\xi)\right| \leqslant \left\|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right\|_1$$
et
$$|\xi_2 \widehat{f}(\xi)| = \left|\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_2}}(\xi)\right| \leqslant \left\|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\|_1.$$
Alors, on obtient
$$|\widehat{f}(\xi)|^2(\xi_1^2+\xi_2^2) \leqslant \left\|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right\|_1^2 + \left\|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\|_1^2 = C_f^2.$$
Il s'ensuit que, $\forall \xi \in \mathbf{R}^2$ non nul, on a
$$|\widehat{f}(\xi)| \leqslant \frac{C_f}{\|\xi\|},$$

3. Le résultat de la question précédente est vrai pour f de classe C^1 à support compact. Ensuite, on raisonne par densité des fonctions C^1 à support compact dans $L^1(\mathbf{R})$. Soit $f \in L^1(\mathbf{R}^2)$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\phi_\varepsilon \in C^1$ et à support compact telle que $\|f - \phi_\varepsilon\|_1 < \varepsilon$ et, $\forall \xi \in \mathbf{R}^2$, on a
$$\begin{aligned}|\widehat{f}(\xi)| &\leqslant |\widehat{f}(\xi) - \widehat{\phi_\varepsilon}(\xi)| + |\widehat{\phi_\varepsilon}(\xi)| \\ &\leqslant \|f - \phi_\varepsilon\|_1 + |\widehat{\phi_\varepsilon}(\xi)|.\end{aligned}$$
Or il existe $A_\varepsilon > 0$ tel que $\|\xi\| > A_\varepsilon$ implique $|\widehat{\phi_\varepsilon}(\xi)| \leqslant \varepsilon$. Ainsi, $\forall \xi \in \mathbf{R}^2$ tel que $\|\xi\| > A_\varepsilon$ on a $|\widehat{f}(\xi)| \leqslant 2\varepsilon$. Ceci montre bien que $\lim\limits_{\|\xi\| \mapsto +\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.

4. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question précédente, il existe $A_\varepsilon > 0$ tel que si $\xi \in \mathbf{R}^2$ vérifie $\|\xi\| > A_\varepsilon$ alors $|\widehat{f}(\xi)| \leqslant \varepsilon$. La fonction $\widehat{f}$ est continue sur le compact $B(0, A_\varepsilon + 1)$, donc d'après le théorème de Heine, $\widehat{f}$ est uniformément continue sur $B(0, A_\varepsilon + 1)$. On en déduit qu'il existe $\eta \in]0, 1[$ tel que $\forall (\xi, \mu) \in B(0, A_\varepsilon + 1)$, la condition $\|\xi - \mu\| < \eta$ implique $|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\mu)| \leqslant \varepsilon$.
   Soit $(\xi, \mu) \in \mathbf{R}^2$ tel que $\|\xi - \mu\| < \eta$. On a alors
   — Soit $\|\xi\| > A_\varepsilon$ et $\|\mu\| > A_\varepsilon$, et dans ce cas $|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\mu)| \leqslant |\widehat{f}(\xi)| + |\widehat{f}(\mu)| \leqslant 2\epsilon$.
   — Soit $\|\xi\| \leqslant A_\varepsilon$ ou $\|\mu\| \leqslant A_\varepsilon$; comme $\|\xi - \mu\| \leqslant \eta < 1$, ξ et μ appartiennent à $B(0, A_\varepsilon + 1)$ et donc $|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\mu)| \leqslant \varepsilon$.
   On a donc montré que $\forall \epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\|\xi - \mu\| \leqslant \eta$ implique $|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\mu)| \leqslant 2\varepsilon$. Ainsi $\widehat{f}$ est bien uniformément continue.

Etude d'un espace de Hilbert

1. On a $\forall h \in \mathbf{R}^2$

$$|e^{-ix\cdot h} - 1|^2 = |\cos(x \cdot h) - 1|^2 + |\sin(x \cdot h)|^2 \leqslant |x \cdot h|^2 + |x \cdot h|^2 \leqslant 2\|x\|^2 \, \|h\|^2$$

   Donc, $\forall n \in \mathbf{N}$ et $\forall x \in B(0, R)$, on a

$$|e^{-ix\cdot h_n} - 1|^2 \leqslant 2R^2 \, \|h_n\|^2$$

   ce qui prouve la convergence uniforme demandée.

2. On effectue la changement de variable en polaire, de jacobien r ; on a donc, en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli (qui s'applique puisque toutes les fonctions considérées sont positives),

$$\int_{\mathbf{R}^2} \frac{1}{1 + \|\xi\|^{2\alpha}} d\xi = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{r}{1 + r^{2\alpha}} \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{r}{1 + r^{2\alpha}} \, \mathrm{d}r.$$

   Cette dernière intégrale converge par critère de Riemann si et seulement si $2\alpha - 1 > 1$ c'est-à-dire $\alpha > 1$.

3. (a) Toutes les fonctions considérées étant à valeurs positives, il n'y a pas d'obstacle à manipuler leurs intégrales dans les calculs suivants. Soit $f \in H^\alpha$ avec $\alpha > 1$. On a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^2} |\widehat{f}(\xi)| \, \mathrm{d}\xi &= \int_{\mathbf{R}^2} |\widehat{f}(\xi)| \left(1 + \|\xi\|^{2\alpha}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{1 + \|\xi\|^{2\alpha}}\right)^{1/2} d\xi \\
&\quad \text{on utilise alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\
&\leqslant \int_{\mathbf{R}^2} |\widehat{f}(\xi)|^2 (1 + \|\xi\|^{2\alpha}) d\xi \times \int_{\mathbf{R}^2} \frac{1}{1 + \|\xi\|^{2\alpha}} d\xi \\
&\leqslant \|f\|_{H^\alpha} \times \int_{\mathbf{R}^2} \frac{1}{1 + \|\xi\|^{2\alpha}} d\xi \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

   (b) Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^2)$, alors par l'isométrie de Plancherel, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^2} f(x)\overline{\varphi(x)} \mathrm{d}x &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbf{R}^2} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{\varphi}(\xi)} \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbf{R}^2} \widehat{f}(\xi) \overline{\left(\int_{\mathbf{R}^2} e^{-ix\cdot\xi} \varphi(x) \mathrm{d}x\right)} \mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

   Or $\forall (x, \xi) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$, on a

$$\left|\widehat{f}(\xi)\overline{e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)}\right| = |\widehat{f}(\xi)||\varphi(x)|$$

où le terme de droite est intégrable sur $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ puisque $\xi \mapsto \widehat{f}(\xi)$ est intégrable sur $\mathbf{R}^2$ par la question précédente et $x \mapsto \varphi(x)$ est intégrable sur $\mathbf{R}^2$ puisque φ est à support compact. On peut appliquer le théorème de Fubini-Lebesgue et on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^2} f(x)\overline{\varphi(x)}\mathrm{d}x &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbf{R}^2} \widehat{f}(\xi)\overline{\left(\int_{\mathbf{R}^2} e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)\mathrm{d}x\right)}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbf{R}^2} \widehat{f}(\xi)\left(\int_{\mathbf{R}^2} e^{ix\cdot\xi}\overline{\varphi(x)}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbf{R}^2} \overline{\varphi(x)}\left(\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbf{R}^2} \widehat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le rappel en début de sujet, f est égale presque partout à $\dfrac{1}{(2\pi)^2}\displaystyle\int_{\mathbf{R}^2} \widehat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}\mathrm{d}\xi$ qui n'est rien d'autre que la transformée de Fourier de $\widehat{f}$ évaluée en $(-\xi)$ et à un facteur multiplicatif près, et qui est bien continue et bornée sur $\mathbf{R}^2$ d'après la question 2 de la partie I.

4. (a) On définit le produit scalaire comme

$$(f,g) \in H^\alpha \mapsto \int_{\mathbf{R}^2} (1+\|\xi\|^{2\alpha})\widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\,\mathrm{d}\xi.$$

qui est bien défini car $\left|\widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(|\widehat{f}(\xi)|^2 + |\widehat{g}(\xi)|^2\right)$. Ensuite, il n'y a aucune difficulté pour le produit scalaire en utilisant le théorème de Plancherel pour le caractère défini.

(b) i. On remarque tout d'abord, grâce au théorème de Plancherel et à la définition de la norme sur H^α que $\forall f \in L^2$

$$\|f\|_{L^2} = \frac{1}{2\pi}\|\widehat{f}\|_{L^2} \leqslant \frac{1}{2\pi}\|f\|_{H^\alpha}$$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans H^α. D'après ce qui précède, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbf{R}^2)$ qui est complet, donc il existe $g \in L^2$ telle que $\|f_n - g\|_{L^2}$ tend vers 0.

ii. On commence par remarquer que, comme $g \in L^2(\mathbf{R}^2)$, g admet une transformée de Fourier. On présente deux approches possibles. Dans les deux cas, on utilise le fait que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite de Cauchy dans H^α, elle est bornée : il existe $C > 0$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $\|f_n\|_{H^\alpha} \leqslant C$.

<u>Première méthode :</u> On suit l'indication du sujet. Soit $R > 0$, on note $B(0,R) = \{\xi \in \mathbf{R}^2,\ \|\xi\| \leqslant R\}$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,R)} (1+\|\xi\|^{2\alpha})|\widehat{g}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi &= \left|\int_{B(0,R)} (1+\|\xi\|^{2\alpha})|\widehat{g}(\xi) - \widehat{f}_n(\xi) + \widehat{f}_n(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\right| \\
&\quad \text{en utilisant pour } a,b \geqslant 0\ |a-b|^2 \leqslant 2(a^2+b^2) \\
&\leqslant 2\int_{B(0,R)} (1+\|\xi\|^{2\alpha})|\widehat{g}(\xi) - \widehat{f}_n(\xi)|^2 d\xi \\
&\quad +2\int_{B(0,R)} (1+\|\xi\|^{2\alpha})|\widehat{f}_n(\xi)|^2 d\xi \\
&\leqslant 2(1+R^{2\alpha})\left|\int_{B(0,R)} |\widehat{f_n}(\xi) - \widehat{g}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\right| + 2\|f_n\|_{H^\alpha} \\
&\quad \text{or } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} \\
&\leqslant (1+R^{2\alpha})\|\widehat{f_n} - \widehat{g}\|_{L^2}^2 + 2C \\
&\quad \text{on utilise alors le théorème de Plancherel} \\
&\leqslant (2\pi)^2(1+R^{2\alpha})\|f_n - g\|_{L^2}^2 + 2C < +\infty.
\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$\int_{B(0,R)} (1+\|\xi\|^{2\alpha})|\widehat{g}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi \leqslant 2C.$$

Cette majoration s'applique pour tout $R>0$, avec une constante C indépendante de R ; on conclut alors par le théorème de convergence monotone, en faisant tendre R vers $+\infty$, que $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^2} (1+\|\xi\|^{2\alpha})|\widehat{g}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi < +\infty$. Donc $g \in H^\alpha$.

<u>Deuxième méthode :</u> On procède par extraction d'une sous-suite convergeant presque partout. On a vu à la question précédente que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers g dans $L^2(\mathbf{R}^2)$. Par le théorème de Plancherel, on a aussi $(\widehat{f_n})$ qui converge vers $\widehat{g}$ dans L^2. On sait alors qu'on dispose d'une sous-suite $(\widehat{f_{\varphi(n)}})$ qui converge vers $\widehat{g}$ presque partout. D'après le lemme de Fatou

$$\int_{\mathbf{R}^2} \liminf_{n\mapsto+\infty} (1+\|\xi\|^{2\alpha}) \left|\widehat{f_{\varphi(n)}}(\xi)\right|^2 \,\mathrm{d}\xi \leqslant \liminf_{n\mapsto+\infty} \int_{\mathbf{R}^2} (1+\|\xi\|^{2\alpha}) \left|\widehat{f_{\varphi(n)}}(\xi)\right|^2 \,\mathrm{d}\xi$$

c'est à dire

$$\int_{\mathbf{R}^2} (1+\|\xi\|^{2\alpha})\widehat{g}(\xi) \,\mathrm{d}\xi \leqslant \liminf_{n\mapsto+\infty} \|f_n\|_{H^\alpha}$$

donc

$$\int_{\mathbf{R}^2} (1+\|\xi\|^{2\alpha})\widehat{g}(\xi) \,\mathrm{d}\xi \leqslant C.$$

Ainsi $g \in H^\alpha$.

iii. Il reste à montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers g dans H^α. On traduit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans H^α : soit $\varepsilon>0$, il existe $N(\varepsilon)\in\mathbf{N}$, $\forall n,p \geqslant N(\varepsilon)$,

$$\int_{\mathbf{R}^2} (1+\|\xi\|^{2\alpha})|\widehat{f_n}(\xi) - \widehat{f_p}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi \leqslant \varepsilon^2.$$

On peut alors reprendre les raisonnements amorcés au point précédent.

<u>Première méthode :</u> En procédant de même qu'à la question précédente, en raisonnant d'abord sur une boule $B(0,R)$, on obtient en faisant tendre p vers $+\infty$ que $\forall n \geqslant N(\varepsilon)$,

$$\int_{\mathbf{R}^2} (1+\|\xi\|^{2\alpha})|\widehat{g}(\xi) - \widehat{f_n}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi \leqslant \varepsilon^2,$$

soit $\forall n \geqslant N(\varepsilon)$,

$$\|g - f_n\|_{H^\alpha} \leqslant \varepsilon,$$

ce qui signifie bien que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers g dans H^α.

<u>Deuxième méthode :</u> On reprend la suite extraite à l'étape précédente : $\forall n \geqslant N(\varepsilon)$ fixé et pour $p \geqslant N(\varepsilon)$, $\varphi(p) \geqslant p$ donc

$$\int_{\mathbf{R}^2} (1+\|\xi\|^{2\alpha})|\widehat{f_n}(\xi) - \widehat{f_{\varphi(p)}}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi \leqslant \varepsilon^2$$

D'après le lemme de Fatou :

$$\int_{\mathbf{R}^2} \liminf_{p\mapsto+\infty} (1+\|\xi\|^{2\alpha})|\widehat{f_n}(\xi) - \widehat{f_{\varphi(p)}}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi \leqslant \liminf_{p\mapsto+\infty} \int_{\mathbf{R}^2} (1+\|\xi\|^{2\alpha})|\widehat{f_n}(\xi) - \widehat{f_{\varphi(p)}}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi$$

donc

$$\int_{\mathbf{R}^2} (1+\|\xi\|^{2\alpha})|\widehat{f_n}(\xi) - g(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi \leqslant \varepsilon^2$$

c'est à dire $\forall n \geqslant N(\varepsilon)$, $\|f_n - g\|_{H^\alpha} \leqslant \varepsilon$, ce qui signifie bien que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers g dans H^α.

Ainsi H^α est un espace de Hilbert.

5. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $L^2(\mathbf{R}^2)$: il existe $A \in \mathbf{R}_+$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\|f_n\|_{L^2} \leqslant A$. On fait aussi l'hypothèse, $\mathrm{supp}(f_n) \subset B(0,M)$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

   (a) Soit $\xi \in B(0,R)$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
|\widehat{f}_n(\xi)| &= \left|\int_{\mathbf{R}^2} f_n(x)e^{-ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_{B(0,M)} f_n(x)e^{-ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}x\right| \quad \text{car } \mathrm{supp}(f_n) \subset B(0,M) \\
&\quad \text{on utilise alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\
&\leqslant \left(\int_{B(0,M)} |f_n(x)e^{-ix\cdot\xi}|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_{B(0,M)} 1^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \\
&\leqslant \|f_n\|_{L^2} \times \mathrm{mes}(B(0,M))^{1/2} \\
&\leqslant A \times \mathrm{mes}(B(0,M))^{1/2}.
\end{aligned}$$

   Ainsi la suite $(\widehat{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien équibornée sur $B(0,R)$.
   Avec les mêmes idées que précédemment, on a $\forall \eta, \xi \in B(0,R)$

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{f}_n(\xi) - \widehat{f}_n(\eta)\right| &= \left|\int_{\mathbf{R}^2} f_n(x)\left(e^{-ix\cdot\xi} - e^{ix.\eta}\right)\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_{B(0,M)} f_n(x)\left(e^{-ix\cdot\xi} - e^{ix.\eta}\right)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \|f_n\|_{L^2} \times \left(\int_{B(0,M)} |e^{-ix\cdot\xi} - e^{-ix.\eta}|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

   Or

$$|e^{-ix\cdot\xi} - e^{ix.\eta}|^2 = |e^{-ix\cdot\xi}|^2|1 - e^{ix\cdot(\eta-\xi)}|^2 \leqslant 2\|x\|^2\|\xi-\eta\|^2.$$

   Ainsi,

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{f}_n(\xi) - \widehat{f}_n(\eta)\right| &\leqslant A\left(\int_{B(0,M)} 2\|x\|^2\|\xi-\eta\|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \\
&\leqslant A\sqrt{2}M\|\xi-\eta\| \times \mathrm{mes}(B(0,M))^{1/2} \\
&\leqslant C\,\|\xi-\eta\|
\end{aligned}$$

   pour une certaine constante $C > 0$ indépendante de ξ, η et n. Ainsi $(\widehat{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue dans $\left(C^0(B(0,R),\mathbf{C}), \|.\|_\infty\right)$.

   (b) On suppose de plus que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans H^α par une constante K_1. Soit $\epsilon > 0$ fixé. On écrit, pour $R > 0$ qu'on va déterminer,

$$\widehat{f}_n(\xi) = \underbrace{\widehat{f}_n(\xi)\mathbf{1}_{|\xi|\leqslant R}}_{\phi_n(\xi)} + \underbrace{\widehat{f}_n(\xi)\mathbf{1}_{|\xi|>R}}_{\psi_n(\xi)}.$$

   Alors, en exploitant le fait que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans H^α, on obtient

$$\|\psi_n\|_{L^2}^2 = \int_{\|\xi\|>R} \frac{1+\|\xi\|^{2\alpha}}{1+\|\xi\|^{2\alpha}}|\widehat{f}_n(\xi)|^2\mathrm{d}\xi \leqslant \frac{1}{1+R^{2\alpha}}\|f_n\|_{H^\alpha}^2 \leqslant \frac{K_1^2}{1+R^{2\alpha}},$$

   qui peut donc être rendu $\leqslant \epsilon$ pour un choix convenable de $R = R(\epsilon)$ assez grand.
   Maintenant, pour ce $R(\epsilon)$, on utilise la propriété établie à la question précédente qui assure que l'ensemble $\{\phi_n(\xi),\, n \in \mathbf{N}\}$ est relativement compact dans $C^0(B(0,R(\epsilon));\mathbf{C})$. On

rappelle que $L^\infty(X)$ s'injecte continuement dans $L^2(X)$ lorsque X est de mesure finie. L'ensemble $\{\phi_n(\xi),\, n \in \mathbf{N}\}$ est donc aussi relativement compact dans $L^2(\mathbf{R}^N)$ puisque toutes les fonctions qui le composent ont un support inclus dans le compact $B(0, R(\epsilon))$ qui est de mesure finie. On peut donc recouvrir cet ensemble, au sens de la norme L^2, par un nombre fini $N(\epsilon) \in \mathbf{N}$, de boules de rayon ϵ et de centres $\varphi_1, ..., \varphi_{N(\epsilon)}$, choisis parmi les ϕ_n. Il s'ensuit que $\bigcup_{n=1}^{N(\epsilon)} B(\varphi_n, 2\epsilon)$ réalise un recouvrement fini de l'ensemble $\{\widehat{f}_n,\, n \in \mathbf{N}\}$ dans $L^2(\mathbf{R}^N)$ par des boules de rayon 2ϵ. Cet ensemble est donc relativement compact dans $L^2(\mathbf{R}^N)$.

(c) Ainsi il existe $g \in L^2(\mathbf{R}^2)$ et $\varphi : \mathbf{N} \mapsto \mathbf{N}$ strictement croissante tels que $\|\widehat{f}_{\varphi(n)} - g\|_2 \longrightarrow 0$. Par le théorème de Plancherel, il existe $h \in L^2(\mathbf{R}^2)$ tel que $\widehat{h} = g$. Alors on arrive à

$$\|f_{\varphi(n)} - h\|_2 = \frac{1}{2\pi}\|\widehat{f}_{\varphi(n)} - \widehat{h}\|_2 = \|\widehat{f}_{\varphi(n)} - g\|_2$$

qui tend vers 0 ; donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compact dans $L^2(\mathbf{R}^2)$.

Une propriété de régularisation

1. On a, vu le support de φ,

$$\begin{aligned}
|\rho_n(x)|^2 &= \left|\int_{\mathbf{R}^2} f_n(x,k)\varphi(k)\,\mathrm{d}k\right|^2 \\
&= \left|\int_{B(0,R)} f_n(x,k)\varphi(k)\,\mathrm{d}k\right|^2 \\
&\quad \text{par l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\
&\leqslant \int_{B(0,R)} |f_n(x,k)|^2\,\mathrm{d}k \times \int_{B(0,R)} |\varphi(k)|^2\,\mathrm{d}k \\
&\leqslant \mathrm{mes}(B(0,R)) \times \|\varphi\|_\infty^2 \times \int_{B(0,R)} |f_n(x,k)|^2\,\mathrm{d}k \\
&\leqslant \mathrm{mes}(B(0,R)) \times \|\varphi\|_\infty^2 \times \int_{\mathbf{R}^2} |f_n(x,k)|^2\,\mathrm{d}k.
\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant le théorème de Fubini, on obtient

$$\int_{\mathbf{R}^2} |\rho_n(x)|^2\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{mes}(B(0,R)) \times \|\varphi\|_\infty^2 \times \int_{\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2} |f_n(x,k)|^2\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}x$$

et avec l'hypothèse **(H1)**,

$$\int_{\mathbf{R}^2} |\rho_n(x)|^2\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{mes}(B(0,R))\|\varphi\|_\infty^2 M_0.$$

On en conclut $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien bornée dans $L^2(\mathbf{R}^2)$.

2. Avec l'hypothèse **(H1)** et le théorème de Plancherel, $\widehat{f}_n \in L^2(\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2)$, ainsi $k \mapsto \widehat{f}_n(\xi,k)\varphi(k)$ est intégrable sur $\mathbf{R}^2$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz puisque φ est à support compact. Et donc la formule définissant $\widehat{\rho}_n(\xi)$ a bien un sens.

3. (a) Voir la figure 4.2.

   (b) On note $B = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Par projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(\xi)$, on peut écrire

$$\forall k \in \mathbf{R}^2,\ k = \frac{k\cdot\xi}{\|\xi\|}\frac{\xi}{\|\xi\|} + \left(k - \frac{k\cdot\xi}{\|\xi\|}\frac{\xi}{\|\xi\|}\right)$$

   On note alors $B' = (u_1, u_2)$ la base orthonormée de $\mathbf{R}^2$, telle que $u_1 = \frac{\xi}{\|\xi\|}$.

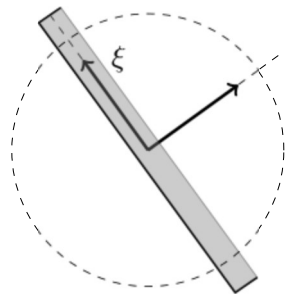

FIGURE 4.2 – Domaine $\mathcal{B}_\varepsilon(\xi)$ et disque de rayon R

On introduit alors le changement de variable

$$\Phi : \begin{array}{lcl} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ k = (k_1, k_2)_B & \longmapsto & (k_1', k_2')_{B'}. \end{array}$$

C'est une isométrie vectorielle donc son Jacobien est égal à ± 1 et par la formule ci-dessus on a $k_1' = \dfrac{k \cdot \xi}{\|\xi\|}$.

(c) Le changement de variable précédent est une isométrie et on a

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{mes}(\mathcal{B}_\epsilon(\xi) \cap B(0,R)) & = & \displaystyle\int_{\{k' \in \mathbf{R}^2, |k_1'| \leqslant \epsilon\} \cap \{k', \|k'\| \leqslant R\}} \mathrm{d}k' \\ & \leqslant & \displaystyle\int_{\{k' \in \mathbf{R}^2, |k_1'| \leqslant \epsilon\} \cap \{k', |k_2'| \leqslant R\}} \mathrm{d}k' \\ & & \text{on applique alors le théorème de FUBINI-TONELLI} \\ & \leqslant & \displaystyle\int_{|k_1'| \leqslant \epsilon} dk_1' \times \int_{|k_2'| \leqslant R} \mathrm{d}k' \\ & \leqslant & 2\epsilon \times 2R. \end{array}$$

(d) On utilise l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ et le fait que le support de φ est inclus dans $B(0,R)$:

$$\begin{array}{rcl} |\mu_n(\xi)| & \leqslant & \displaystyle\left(\int_{\mathcal{B}_\epsilon(\xi)} |\varphi(k)|^2 \, dk\right)^{1/2} \left(\int_{\mathcal{B}_\epsilon(\xi)} |\widehat{f_n}(\xi,k)|^2 \, \mathrm{d}k\right)^{1/2} \\ & \leqslant & \displaystyle\left(\int_{\mathcal{B}_\epsilon(\xi) \cap B(0,R)} |\varphi(k)|^2 \, dk\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbf{R}^2} |\widehat{f_n}(\xi,k)|^2 \, \mathrm{d}k\right)^{1/2} \\ & \leqslant & \|\varphi\|_\infty \left(\mathrm{mes}(\mathcal{B}_\epsilon(\xi) \cap B(0,R))\right)^{1/2} \displaystyle\left(\int_{\mathbf{R}^2} |\widehat{f_n}(\xi,k)|^2 \, \mathrm{d}k\right)^{1/2} \\ & \leqslant & \sqrt{\epsilon}\sqrt{C} \displaystyle\left(\int_{\mathbf{R}^2} |\widehat{f_n}(\xi,k)|^2 \, \mathrm{d}k\right)^{1/2}. \end{array}$$

On pose alors

$$H_n(\xi) = \left(C \int_{\mathbf{R}^2} |\widehat{f_n}(\xi,k)|^2 \, \mathrm{d}k\right)^{1/2}$$

et on a par le théorème de FUBINI-TONELLI

$$\int_{\mathbf{R}^2} |H_n(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi = C \int_{\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2} |\widehat{f_n}(\xi,k)|^2 \, \mathrm{d}k \, \mathrm{d}\xi \leqslant C M_0.$$

Donc $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien une suite bornée dans $L^2(\mathbf{R}^2)$.

(e) On a

$$\begin{aligned}
|\nu_n(\xi)| &= \left|\int_{\mathcal{G}_\epsilon(\xi)} \widehat{f}_n(\xi,k)\,\varphi(k)\,\mathrm{d}k\right| \\
&= \left|\int_{\mathcal{G}_\epsilon(\xi)} \widehat{f}_n(\xi,k)\,\varphi(k)\,\frac{|k\cdot\xi|}{|k\cdot\xi|}\mathrm{d}k\right| \\
&\leqslant \left(\int_{\mathcal{G}_\epsilon(\xi)} |\widehat{f}_n(\xi,k)|^2|k\cdot\xi|^2\,\mathrm{d}k\right)^{1/2} \times \left(\int_{\mathcal{G}_\epsilon(\xi)} |\varphi(k)|^2\frac{1}{|k\cdot\xi|^2}\,\mathrm{d}k\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Or on observe que

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathcal{G}_\epsilon(\xi)} |\widehat{f}_n(\xi,k)|^2|k\cdot\xi|^2\,\mathrm{d}k\right)^{1/2} &= \left(\int_{\mathcal{G}_\epsilon(\xi)} |k\cdot\xi\widehat{f}_n(\xi,k)|^2\,\mathrm{d}k\right)^{1/2} \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbf{R}^2} |k\cdot\xi\widehat{f}_n(\xi,k)|^2\,\mathrm{d}k\right)^{1/2} = \tilde{F}_n(\xi).
\end{aligned}$$

En utilisant la propriété de dérivation de la transformée de Fourier et le théorème de Plancherel, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^2} |\tilde{F}_n(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi &= \int_{\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2} |k\cdot\xi\widehat{f_n}(\xi,k)|^2\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2} |k\cdot\nabla_x f_n(\xi,k)|^2\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant M_1.
\end{aligned}$$

Donc $(\tilde{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien bornée dans $L^2(\mathbf{R}^2)$. Ce sera la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à une constante près. Enfin, on dispose de l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{G}_\epsilon(\xi)} |\varphi(k)|^2\frac{1}{|k\cdot\xi|^2}\,\mathrm{d}k &= \int_{\{|k\cdot\xi|>\epsilon\|\xi\|\}\cap B(0,R)} |\varphi(k)|^2\frac{1}{|k\cdot\xi|^2}\,\mathrm{d}k \\
&\leqslant \frac{1}{\|\xi\|^2}\|\varphi\|_\infty^2\int_{\{|k\cdot\xi|>\epsilon\|\xi\|\}\cap B(0,R)} \frac{1}{|k.\frac{\xi}{\|\xi\|}|^2}\,\mathrm{d}k \\
&\quad \text{on effectue encore le changement de variable} \\
&\quad \text{de la question précédente} \\
&\leqslant \frac{1}{\|\xi\|^2}\|\varphi\|_\infty^2\int_{\{|k_1'|>\epsilon\}\cap B(0,R)} \frac{1}{|k_1'|^2}\,\mathrm{d}k' \\
&\leqslant \frac{1}{\|\xi\|^2}\|\varphi\|_\infty^2\int_{\{|k_1'|>\epsilon,\,|k_2'|\leqslant R\}} \frac{1}{|k_1'|^2}\,\mathrm{d}k' \\
&\quad \text{on applique Fubini-Tonelli} \\
&\leqslant \frac{1}{\|\xi\|^2}\|\varphi\|_\infty^2\left(\int_{\{|k_1'|>\epsilon\}} \frac{1}{|k_1'|^2}\,\mathrm{d}k_1'\right)\times\left(\int_{\{|k_2'|\leqslant R\}} \mathrm{d}k_2'\right) \\
&\quad \text{par parité} \\
&\leqslant \frac{1}{\|\xi\|^2}\|\varphi\|_\infty^2\left(2\int_{\{k_1'>\epsilon\}} \frac{1}{k_1'^2}\,\mathrm{d}k_1'\right)\times 2R \\
&\leqslant \frac{1}{\|\xi\|^2}\|\varphi\|_\infty^2 4R\left[-\frac{1}{k_1'}\right]_\epsilon^{+\infty} \\
&\leqslant \frac{1}{\epsilon\|\xi\|^2}\|\varphi\|_\infty^2 4R.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a obtenu

$$|\nu_n(\xi)| \leqslant \tilde{F}_n(\xi)\|\varphi\|_\infty 2\sqrt{R}\frac{1}{\sqrt{\epsilon}\|\xi\|}$$

On pose donc $F_n(\xi) = \tilde{F}_n(\xi)\|\varphi\|_\infty 2\sqrt{R}$ qui est bien bornée dans $L^2(\mathbf{R}^2)$ puisque les $\tilde{F}_n$ le sont.

(f) On pose $g(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}\|\xi\|}F_n(\xi) + \sqrt{\epsilon}\ H_n(\xi)$ L'étude par rapport à ϵ indique que g a une valeur optimale, là où la dérivée s'annule, pour $\epsilon_0 = \dfrac{F_n(\xi)}{\|\xi\|H_n(\xi)}$, qui est donc

$$g(\epsilon_0) = \frac{F_n(\xi)^{1/2}H_n(\xi)^{1/2}}{\|\xi\|^{1/2}}.$$

Il s'ensuit que

$$\forall \xi \in \mathbf{R}^2,\ |\widehat{\rho}_n(\xi)| \leqslant \frac{F_n(\xi)^{1/2}H_n(\xi)^{1/2}}{\|\xi\|^{1/2}}$$

Il reste à vérifier que $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^{1/2}$. D'une part, le théorème de Plancherel assure que

$$\int_{\mathbf{R}^2} |\widehat{\rho}_n(\xi)|^2 d\xi = \|\widehat{\rho}_n\|_{L^2}^2 = \|\rho_n\|_{L^2}^2$$

et ceci est borné par la question 1 de cette partie. D'autre part, par les questions précédentes, on a

$$\|\xi\| \times |\widehat{\rho}_n(\xi)|^2 \leqslant F_n(\xi)H_n(\xi) \leqslant \frac{1}{2}(F_n(\xi)^2 + H_n(\xi)^2).$$

Finalement, il vient

$$\int_{\mathbf{R}^2} \|\xi\|\,|\widehat{\rho}_n(\xi)|^2 d\xi \leqslant \frac{1}{2}(CM_0 + C'M_1).$$

Ainsi en sommant,

$$\|\rho_n\|_{H^{1/2}} = \int_{\mathbf{R}^2} (1 + \|\xi\|)\,|\widehat{\rho}_n(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi$$

est bien bornée : $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^{1/2}$.

L'idée de cette démonstration est de comprendre que dans le « bon ensemble » $\mathcal{G}_\varepsilon$, l'information « $k \cdot \nabla_x f_n$ bornée dans L^2 » est utile et fournit bien un gain de régularité (« on gagne une dérivée »), alors que le « mauvais ensemble » $\mathcal{B}_\varepsilon$ peut être rendu de mesure arbitrairement petite. La combinaison de ces deux informations fournit une estimation dans un espace de Sobolev fractionnaire.

4. Il suffit d'utiliser 5b et 5c de la partie V.

Une propriété de compacité

1. (a) Rien à signaler.

   (b) Soient $0 < \epsilon < \epsilon'$ et $(k, \zeta) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$. On a

$$\mathbf{1}_{|a(k)\cdot\zeta|\leqslant\epsilon} \leqslant \chi\left(\frac{|a(k)\cdot\zeta|}{\epsilon}\right).$$

Comme $0 < \epsilon < \epsilon'$, on a

$$\left(\frac{|a(k)\cdot\zeta|}{\epsilon'}\right) \leqslant \left(\frac{|a(k)\cdot\zeta|}{\epsilon}\right).$$

Par décroissance de χ sur $\mathbf{R}_+$, on obtient

$$\chi\left(\frac{|a(k)\cdot\zeta|}{\epsilon}\right) \leqslant \chi\left(\frac{|a(k)\cdot\zeta|}{\epsilon'}\right).$$

Enfin, par parité de χ, on a $\chi\left(\frac{|a(k)\cdot\zeta|}{\epsilon}\right) = \chi\left(\frac{a(k)\cdot\zeta}{\epsilon}\right)$. Ainsi

$$0 \leqslant \mathbf{1}_{|a(k)\cdot\zeta|\leqslant\epsilon} \leqslant \chi\left(\frac{a(k)\cdot\xi}{\epsilon}\right) \leqslant \chi\left(\frac{a(k)\cdot\xi}{\epsilon'}\right).$$

Par croissance de la mesure de Lebesgue, on en conclut que

$$\mathrm{mes}\big(\{k \in B(0,R),\ |a(k)\cdot\zeta| \leqslant \epsilon\}\big) = \int_{B(0,R)} \mathbf{1}_{|a(k)\cdot\zeta|\leqslant\epsilon}\,\mathrm{d}k \leqslant m_\epsilon(\zeta) \leqslant m_{\epsilon'}(\zeta).$$

(c) Soit $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante vers 0. Alors $(m_{\epsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante à valeurs positives par la question précédente. On commence par établir la convergence simple. Soit $\zeta \in \mathbf{S}$ fixé. On pose, $\forall k \in \mathbf{R}^2$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $g_n(k) = \chi\left(\dfrac{a(k)\cdot\zeta}{\epsilon_n}\right)$ qui converge presque partout vers la fonction nulle quand $n \to \infty$, étant donné que $\mathrm{mes}\left(\{k \in B(0,R),\ |a(k)\cdot\zeta| = 0\}\right) = 0$. De plus $|g_n(k)| \leqslant 1$ et la fonction constante $k \mapsto 1$ est intégrable sur $B(0,R)$. Donc, d'après le théorème de convergence dominée, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} m_{\epsilon_n}(\zeta) = 0$.

Ainsi la suite $(m_{\epsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fonctions positives qui converge simplement vers la fonction nulle qui est continue sur $\mathbf{S}$ et $\mathbf{S}$ est compact. On peut donc appliquer la question I.3, qui permet de conclure que la suite $(m_{\epsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbf{S}$.

2. (a) Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^2)$ telle que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset B(0,R)$. On a $\rho_n(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}^2} \widehat{f}_n(\xi,k)\varphi(k)\mathrm{d}k = \int_{\mathbf{B}(0,R)} \widehat{f}_n(\xi,k)\varphi(k)\mathrm{d}k$. On pose alors $\mathcal{B}_\epsilon(\xi) = \Big\{k \in B(0,R),\ |a(k)\cdot\xi| \leqslant \epsilon\|\xi\|\Big\}$ et $\mathcal{G}_\epsilon(\xi) = \Big\{k \in B(0,R),\ |a(k)\cdot\xi| > \epsilon\|\xi\|\Big\}$.

On a alors $\forall \xi \in \mathbf{R}^2$, $\rho_n(\xi) = \mu_n(\xi) + \nu_n(\xi)$ avec

$$\mu_n(\xi) = \int_{\mathcal{B}_\epsilon(\xi)} \widehat{f}_n(\xi,k)\varphi(k)\mathrm{d}k$$

et

$$\nu_n(\xi) = \int_{\mathcal{G}_\epsilon(\xi)} \widehat{f}_n(\xi,k)\varphi(k)\mathrm{d}k$$

On va majorer chacun des termes séparémment.

Soit $\xi \in \mathbf{R}^2$, $\xi \neq 0$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned}
|\mu_n(\xi)| &\leqslant \left(\int_{\mathcal{B}_\epsilon(\xi)} |\widehat{f}_n(\xi,k)|^2\mathrm{d}k\right)^{1/2} \left(\int_{\mathcal{B}_\epsilon(\xi)} |\varphi(k)|^2\mathrm{d}k\right) \\
&\leqslant \left(\int_{\mathcal{B}_\epsilon(\xi)} |\widehat{f}_n(\xi)|^2\mathrm{d}k\right)^{1/2} \|\varphi\|_\infty \left(\int_{\mathcal{B}_\epsilon(\xi)} 1\mathrm{d}k\right) \\
&\leqslant \left(\int_{\mathcal{B}_\epsilon(\xi)} |\widehat{f}_n(\xi)|^2\mathrm{d}k\right)^{1/2} \|\varphi\|_\infty \sqrt{\mathrm{mes}\big(\{k \in B(0,R),\ |a(k)\cdot\tfrac{\xi}{\|\xi\|}| \leqslant \epsilon\}\big)}.
\end{aligned}$$

où $H_n(\xi) = \left(\displaystyle\int_{\mathcal{B}_\epsilon(\xi)} |\widehat{f}_n(\xi)|^2\mathrm{d}k\right)^{1/2}$ est bien bornée dans $L^2(\mathbf{R}^2)$ par l'hypothèse **(H1)** et

l'équivalence des normes rappelés dans le sujet. Ensuite, on majore

$$\begin{aligned}
|\nu_n(\xi)| &\leqslant \int_{\mathcal{G}_{\epsilon(\xi)}} |\widehat{f}_n(\xi,k)|\ |a(k)\cdot\xi|\ |\varphi(k)| \frac{1}{|a(k)\cdot\xi|}\mathrm{d}k \\
&\leqslant \left(\int_{\mathcal{G}_{\epsilon(\xi)}} |\widehat{f}_n(\xi,k)|^2\ |a(k)\cdot\xi|^2\,\mathrm{d}k\right)^{1/2} \left(\int_{\mathcal{G}_{\epsilon(\xi)}} |\varphi(k)|^2 \frac{1}{|a(k)\cdot\xi|^2}\mathrm{d}k\right)^{1/2} \\
&\leqslant \left(\int_{\mathcal{G}_{\epsilon(\xi)}} |a(k)\cdot\xi\widehat{f}_n(\xi,k)|^2\,\mathrm{d}k\right)^{1/2} \left(\int_{\mathcal{G}_{\epsilon(\xi)}} \|\varphi\|_\infty^2 \frac{1}{\epsilon^2}\frac{1}{\|\xi\|^2}\frac{1}{\left|a(k)\cdot\frac{\xi}{\|\xi\|}\right|^2}\mathrm{d}k\right)^{1/2} \\
&\qquad \text{en utilisant les propriétés de dérivations de la transformée de Fourier} \\
&\leqslant \left(\int_{\mathcal{G}_{\epsilon(\xi)}} |a(k)\cdot\xi\widehat{f}_n(\xi,k)|^2\,\mathrm{d}k\right)^{1/2} \|\varphi\|_\infty \frac{1}{\epsilon\|\xi\|}\left(\int_{B(0,R)}\mathrm{d}k\right)^{1/2} \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbf{R}^2} |a(k)\cdot\xi\widehat{f}_n(\xi,k)|^2\,\mathrm{d}k\right)^{1/2} \|\varphi\|_\infty \frac{1}{\epsilon\|\xi\|}\mathrm{mes}(B(0,R)).
\end{aligned}$$

On a donc $\tilde{F}_n(\xi) = \|\varphi\|_\infty \mathrm{mes}(B(0,R))\left(\int_{\mathbf{R}^2} |a(k).\xi\widehat{f}_n(\xi,k)|^2\,\mathrm{d}k\right)^{1/2}$, et de plus

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^2} \tilde{F}_n(\xi)^2\,\mathrm{d}\xi &= \|\varphi\|_\infty^2 \mathrm{mes}(B(0,R))^2 \int_{\mathbf{R}^2}\int_{\mathbf{R}^2} |a(k).\xi\widehat{f}_n(\xi,k)|^2\,\mathrm{d}k\mathrm{d}\xi \\
&= \|\varphi\|_\infty^2 \mathrm{mes}(B(0,R))^2 \int_{\mathbf{R}^2}\int_{\mathbf{R}^2} |a(k)\cdot\nabla_x f_n(x,k)|^2\,\mathrm{d}k\mathrm{d}x \\
&\qquad \text{en utilisant le rappel sur les normes équivalentes} \\
&\qquad \text{et les propriétés de dérivations de la transformée de Fourier} \\
&\leqslant \|\varphi\|_\infty^2 \mathrm{mes}(B(0,R))^2 M_1.
\end{aligned}$$

Ainsi $\tilde{F}_n$ est bornée dans $L^2(\mathbf{R}^2)$.
Conclusion : On a montré que

$$|\widehat{\rho}_n(\xi)| \leqslant \frac{1}{\epsilon\|\xi\|}\tilde{F}_n(\xi) + \tilde{H}_n(\xi)\sqrt{\mathrm{mes}\big(\big\{k\in B(0,R),\ |a(k)\cdot\frac{\xi}{\|\xi\|}| \leqslant \epsilon\big\}\big)}$$

où les suites $\left(\tilde{F}_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ et $\left(\tilde{H}_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ sont bornées dans $L^2(\mathbf{R}^2)$.

(b) $\forall\xi\in\mathbf{R}^2$, $\xi\neq 0$, en utilisant $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$ pour a,b des réels positifs, on a

$$|\rho_n(\xi)|^2 \leqslant 2\left(\frac{1}{\epsilon^2\|\xi\|^2}|\tilde{F}_n(\xi)|^2 + |\tilde{H}_n(\xi)|^2\mathrm{mes}\big(\big\{k\in B(0,R),\ |a(k)\cdot\frac{\xi}{\|\xi\|}| \leqslant \epsilon\big\}\big)\right)$$

Ainsi, pour $A>0$

$$\begin{aligned}
&\int_{\|\xi\|\geqslant A} |\rho_n(\xi)|^2\ \mathrm{d}\xi \\
&\leqslant 2\left(\int_{\|\xi\|\geqslant A} \frac{1}{\epsilon^2\|\xi\|^2}|\tilde{F}_n(\xi)|^2 + |\tilde{H}_n(\xi)|^2\mathrm{mes}\big(\big\{k\in B(0,R),\ |a(k)\cdot\frac{\xi}{\|\xi\|}| \leqslant \epsilon\big\}\big)\,\mathrm{d}\xi\right) \\
&\leqslant \frac{2}{\epsilon^2A^2}\int_{\|\xi\|\geqslant A}|\tilde{F}_n(\xi)|^2\mathrm{d}\xi + 2\left\|m_\epsilon\big(\frac{\xi}{\|\xi\|}\big)\right\|_\infty \int_{\|\xi\|\geqslant A}|\tilde{H}_n(\xi)|^2\mathrm{d}\xi \\
&\leqslant \frac{2}{\epsilon^2A^2}\int_{\mathbf{R}^2}|\tilde{F}_n(\xi)|^2\mathrm{d}\xi + 2\left\|m_\epsilon\big(\frac{\xi}{\|\xi\|}\big)\right\|_\infty \int_{\mathbf{R}^2}|\tilde{H}_n(\xi)|^2\mathrm{d}\xi \\
&\leqslant \frac{2}{\epsilon^2A^2}M_1 + 2\left\|m_\epsilon\big(\frac{\xi}{\|\xi\|}\big)\right\|_\infty M_0
\end{aligned}$$

Soit $\delta > 0$. D'après la question 1.c de cette partie, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\left\| m_\epsilon\left(\frac{\xi}{\|\xi\|}\right)\right\|_\infty \leqslant \frac{\delta}{4M_0}$. Alors pour cet ϵ, on a $\forall n \in \mathbf{N}$

$$\int_{\|\xi\|\geqslant A} |\rho_n(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi \quad \leqslant \quad \frac{2}{\epsilon^2 A^2} M_1 + \frac{\delta}{2}$$

et donc

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \int_{\|\xi\|\geqslant A} |\rho_n(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi \quad \leqslant \quad \frac{2}{\epsilon^2 A^2} M_1 + \frac{\delta}{2}.$$

Comme $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{2}{\epsilon^2 A^2} M_1 = 0$, il existe A_0, tel que $\forall A \geqslant A_0$

$$\frac{2}{\epsilon^2 A^2} M_1 \leqslant \frac{\delta}{2}$$

Ainsi, $\forall A \geqslant A_0$, on a

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \int_{\|\xi\|\geqslant A} |\rho_n(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi \quad \leqslant \quad \delta.$$

On a donc bien prouvé que

$$\lim_{A\to\infty} \left\{ \sup_{n\in\mathbf{N}} \left(\int_{\|\xi\|\geqslant A} |\widehat{\rho}_n(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi \right) \right\} = 0.$$

3. Pour $A > 0$, on a $\forall \xi \in \mathbf{R}^2$

$$\widehat{\rho}_n(\xi) = \widehat{\rho}_n(\xi)\mathbf{1}_{\|\xi\|\geqslant A} + \widehat{\rho}_n(\xi)\mathbf{1}_{\|\xi\|<A} = \sigma_n^A(\xi) + \gamma_n^A(\xi).$$

Avec la question précédente, on a montré que $\sup_{n\in\mathbf{N}} \|\sigma_n^A\|_2 \leqslant \omega(A)$ avec $\lim\limits_{A\to+\infty} \omega(A) = 0$. Par ailleurs, $(\widehat{\rho}_n(\xi)\mathbf{1}_{\|\xi\|<A} = \gamma_n^A(\xi))_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compact, comme démontré dans la partie V question 5 ; on retrouve le même cas de figure car le support est inclus dans $B(0, A)$. Ainsi $(\widehat{\rho}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compact dans $L^2(\mathbf{R}^2)$ et par équivalence des normes, cela permet de conclure que $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compact dans $L^2(\mathbf{R}^2)$.