

Feuille 4
Espaces L^p .

Exercice 1. Continuité de la norme comme fonction de p

1. Donner la définition de $\|f\|_\infty$.
2. Soit f une fonction intégrable et bornée sur \mathbf{R} . Montrer que l'application $p \mapsto \|f\|_p$ est continue sur $[1, \infty)$, et que $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

Exercice 2. La convergence dans L^p entraîne la convergence presque partout d'une sous-suite

Soit $p \in [1, \infty[$, et (f_n) une suite de fonctions de $L^p(\mathbf{R})$ tendant vers f dans L^p , c'est-à-dire telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p = 0$. Montrer qu'il existe une sous-suite (f_{n_k}) qui converge presque partout vers f .

Indication : Choisir (n_k) telle que la série $\sum_k \|f_{n_k} - f\|_p^p$ converge.

On peut aussi faire le cas $p = \infty$ (en exercice).

Exercice 3. Inclusions

Soit (X, \mathcal{F}, μ) un espace mesuré.

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes
 - (a) $\mu(X) < \infty$.
 - (b) Pour tous $1 \leq p < q \leq \infty$, on a $L^p(X, \mathcal{F}, \mu) \supset L^q(X, \mathcal{F}, \mu)$.

Exercice 4. Approximations de l'unité

On note $|\cdot|$ la norme euclidienne usuelle sur \mathbf{R}^d . On considère une *suite régularisante*, c'est-à-dire une suite de fonctions (ρ_n) de classe C^∞ de \mathbf{R}^d dans \mathbf{R}^+ telle que

- (i) $\rho_n(x) = 0$ si $|x| > 1/n$.
- (ii) $\int \rho_n(x) dx = 1$.

1. Soit $\psi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$\psi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Montrer que ψ est de classe C^∞ . Construire une suite régularisante à l'aide de ψ .

2. Soit $f : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ continue. Montrer que $(\rho_n * f)$ converge vers f uniformément sur tout compact.
3. Soit $f \in L^p$ pour $1 \leq p < \infty$. Montrer que $(\rho_n * f)$ converge vers f dans L^p (on utilisera le fait que les fonctions continues à support compact sont denses dans L^p ; c'est un résultat de théorie de la mesure).
4. Soit f une fonction intégrable et g une fonction de classe C^1 à support compact. Montrer que $f * g$ est de classe C^1 et que, pour tout $1 \leq i \leq d$, on a

$$\frac{\partial(f * g)}{\partial x_i} = f * \frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

5. Montrer que les fonctions C^∞ à support compact forment une partie dense de L^p si $1 \leq p < \infty$.

Exercice 5. Fonctions de référence

On note $|\cdot|$ la norme euclidienne sur \mathbf{R}^d . A quelles conditions sur $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$ et $p \in [1, \infty]$ est-ce que la fonction f définie sur \mathbf{R}^d par

$$f(x) = \frac{1}{(1 + |x|^\alpha)(1 + |\ln|x||)^\beta}$$

est dans $L^p(\mathbf{R}^d)$?