Leçon 159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications

Trinôme G. Réf : Gourdon Algèbre, Rouvière, Avez, CVA

I - Espace dual et bidual

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n

def 1 : On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.
On appelle espace dual de E et on note E^* le $\mathbb{K}$-ev $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$

Notation 2 : crochet de dualité : Soit $x \in E$, $\varphi \in E^*$
On note parfois $\varphi(x) = \langle \varphi, x \rangle$

Ex 3 : La trace est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$

Def 4 : Soit B une base de E $(e_1 \dots e_n)$. On définit la forme linéaire coordonnée d'indice i par $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ $\forall j$

Thm 5 : $(e_1^* \dots e_n^*)$ est une base de E^* appelée base duale de $(e_1 \dots e_n)$. On a donc $\dim E = \dim E^*$, et $\forall \varphi \in E^*$, on a $\varphi = \sum \varphi(e_i) e_i^*$

Rq 6 : On a un isomorphisme entre E et E^*, mais celui-ci dépend du choix d'une base

Def 7 : On appelle bidual de E l'espace dual de E^*, noté E^{**}

Thm 8 : On a un isomorphisme canonique entre E et E^{**} :
$ev : \left| \begin{array}{l} E \to E^{**} \\ x \mapsto ev_x : \left| \begin{array}{l} E^* \to \mathbb{K} \\ \varphi \mapsto \langle \varphi, x \rangle \end{array} \right. \end{array} \right.$

prop 9 : Soit $(f_1 \dots f_n)$ une base de E^*. $\exists! \, (e_1 \dots e_n)$ base de E / $e_i^* = f_i$ $\forall i$. On l'appelle base antéduale de $(f_1 \dots f_n)$

Ex 10 : Soient $a_0 \dots a_n \in \mathbb{K}$ 2 à 2 distincts. On pose $\forall k \in [\![0,n]\!]$
$\varphi_k(P) = P(a_k)$, $Q_k = \prod_{j \neq k} \frac{X - a_j}{a_k - a_j}$

Alors $(\varphi_k)_k$ est une base de E^* dont la base antéduale est $(Q_k)_k$. On retrouve la formule des polynômes interpolateurs de Lagrange : $P = \sum_{k=0}^{n} P(a_k) Q_k$

II - Orthogonalité

Def 11 : $x \in E$ et $\varphi \in E^*$ sont dits orthogonaux si $\langle \varphi, x \rangle = 0$
Si $A \subset E$, on pose $A^\perp = \{ \varphi \in E^* \,/\, \langle \varphi, x \rangle = 0 \ \forall x \in A \}$ l'orthogonal de A
Si $B \subset E^*$, on pose $B^\circ = \{ x \in E \,/\, \langle \varphi, x \rangle = 0 \ \forall \varphi \in B \}$ l'orthogonal de B
Ce sont des sev, respectivement de E^* et E

Rq 12 : Pour $B \subset E^*$, $B^\perp$ est aussi défini et c'est un sev de E^{**}.
En dimension finie, lorsqu'on a identifié E et E^{**}, B° et $B^\perp$ coïncident.

Prop 13 : - Si $A_1 \subset A_2 \subset E$, alors $A_2^\perp \subset A_1^\perp$
- Si $A \subset E$, alors $A^\perp = (\text{vect} A)^\perp$
- idem avec $^\circ$

Thm 14 : Soit F un sev de E. Alors $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ et $F^{\perp\circ} = F$. Idem avec $^\circ$ pour un sev de E^*

Ex 15 : Soit $F = \text{vect}(e_1 \dots e_k)$ où $(e_1 \dots e_n)$ est une base de E. Alors $F^\perp = \text{vect}(e_{k+1}^* \dots e_n^*)$

Cor 16 : $A_1, A_2 \subset E$. • $(A_1 + A_2)^\perp = A_1^\perp \cap A_2^\perp$
• $(A_1 \cap A_2)^\perp = A_1^\perp + A_2^\perp$
idem avec $^\circ$

Thm 17 : Tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle et réciproquement.

prop 18 : Equations d'un sev

- Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in E^*$ / $rg(\varphi_1, \dots \varphi_p) = n$. Alors $F = \{x \in E / \forall i\ \varphi_i(x) = 0\} = \bigcap \ker \varphi_i$ est de dimension $n-n$.

- Réciproquement, si F est un sev de dimension d, alors $\exists\ n-d$ formes linéaires lin. indep. $\varphi_1, \dots \varphi_{n-d}$ / $F = \bigcap \ker(\varphi_i)$

Ex 19 : $F = vect(e_1, \dots e_d) = \bigcap_{i=d+1}^{n} \ker(e_i^*)$

App 20 : Soit $u \in O(E)$, E euclidien. $F_u := \{x / u(x) = x\}$
$p_u := n - \dim F_u$. Alors u est produit d'au moins p_u réflexions.

III Applications transposées et réduction

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions respectives n et m.

Def 21 : Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On définit l'application transposée par ${}^t u : \left| \begin{array}{l} F^* \to E^* \\ f \mapsto f \circ u \end{array} \right.$

prop 22 : Soit e (resp. f) une base de E (resp. F).
On a $Mat_{e^*, f^*}({}^t u) = {}^t Mat_{f,e}(u)$

prop 23 : (i) $rg(u) = rg({}^t u)$
(ii) $Im({}^t u) = (\ker u)^\perp$
(iii) $\ker({}^t u) = Im(u)^\perp$

Ex 24 : Si $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, alors $rg(M) \leq n \wedge m$

prop 25 : E, F, G trois $\mathbb{K}$-ev. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,G)$
Alors ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$

App 26 : Variations sur le lemme des noyaux
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.
On a que $\ker(P \vee Q(u)) = \ker P(u) + \ker Q(u)$ et en dualisant, $Im(P \vee Q(u)) = Im\, P(u) \cap Im\, Q(u)$

prop 27 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev de E
F est stable par u ssi $F^\perp$ est stable par ${}^t u$

La dualité permet de montrer d'importants résultats de réduction des endomorphismes :

(*)
thm 28 (trigonalisation) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, χ_u son polynôme carac.
u est trigonalisable ssi χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$

thm 29 (décomposition de Frobenius). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

- $\forall x \in E$, on définit $\mu_{u,x} \in \mathbb{K}[X]$ le polynôme unitaire qui engendre l'idéal $\{P \in \mathbb{K}[X] / P(u)(x) = 0\}$
- Il existe une famille de polynômes unitaires non constants $P_1, \dots P_s \in \mathbb{K}[X]$ tels que :
  - $P_s | P_{s-1} | \dots | P_1$
  - $E = \bigoplus_{k=1}^{s} \mathbb{K}[u].x_k$ où $\mu_{u,x_k} = P_k$

(*) prop 27 3/4 : $\chi_u = \chi_{{}^t u}$ et $\mu_u = \mu_{{}^t u}$

DV.

IV. Espace euclidien

1. Formes bilinéaires

def 30 : Une application $b : \left| \begin{array}{l} E \times E \to \mathbb{K} \\ (x,y) \mapsto b(x,y) \end{array} \right.$ est une forme bilinéaire si elle est linéaire en chacune de ses 2 variables.
On note $Bil(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires sur E

prop 31 : $Bil(E) \simeq \mathcal{L}(E, E^*)$ via l'isomorphisme $b \mapsto \varphi_b$
où $\varphi_b : \left| \begin{array}{l} E \to E^* \\ x \mapsto b(x, .) \end{array} \right.$

On peut donc définir par dualité la matrice, le rang, le déterminant d'une forme bilinéaire :

def 32 :
- $Mat_e(b) := Mat_{e^*,e}(\varphi_b) = (b(e_i,e_j))_{ij}$
- $rg(b) := rg(\varphi_b)$
- $det(b) := det(\varphi_b)$
- $ker(b) := ker(\varphi_b)$

prop 33 : (formule de changement de bases)
Soient e et f deux bases de E.
$$Mat_f(b) = {}^tP\, Mat_e(b) P \quad \text{où } P = Mat_{e,f}(id)$$

Si E est un espace euclidien, on a un produit scalaire $\langle . | . \rangle$. On note T_x la forme linéaire $y \mapsto \langle x | y \rangle$ $\forall x \in E$

prop 34 : L'application $x \mapsto T_x$ fournit un isomorphisme entre E et E^*

Rq 35 : Dans un espace euclidien, le produit scalaire donne un isomorphisme canonique entre E et E^*.
On a que $\langle T_x, y \rangle = \langle x | y \rangle$ $\forall x, \forall y$. L'orthogonalité au sens du dual coïncide donc avec l'orthogonalité au sens du produit scalaire.

Ex 36 : Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\forall \varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$, $\exists! A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
$\varphi(X) = tr(AX)$ $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

App 37 : Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible

2. Calcul différentiel

prop 38 : Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est différentiable, alors $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $Df(x)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$

Rq 39 : On appelle gradient de f en x l'unique vecteur de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie $\langle \nabla f(x) | h \rangle = Df(x)(h)$

thm 40 : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f, g_1 \dots g_k : U \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :
- $\forall x \in U$, les $Dg_i(x)$ sont linéairement indépendantes
- $f|_M$ possède un extremum lié en $m \in M$

où $M = \{x \in U / g_i(x) = 0 \ \forall i\}$
Alors $\exists \lambda_1 \dots \lambda_k \in \mathbb{R}$ / $Df(m) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i Dg_i(m)$

App 41 : (thm spectral) $E = (\mathbb{R}^n, \langle . | . \rangle)$
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique (i.e. $\langle u(x) | y \rangle = \langle x | u(y) \rangle$ $\forall x \forall y$)
Alors E possède une base orthogonale de vecteurs propres de u.

DV2

Décomposition de Frobenius

Référence : NH2G2 tome I, p 148-154

On travaille sur un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E de dimension n, muni d'un endomorphisme u. On note μ_u son polynôme minimal.

Pour tout $x \in E$, on définit $I_x = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u)(x) = 0\}$. C'est un idéal (non vide puisque $\mu_u \in I_x$) de $\mathbb{K}[X]$ donc il existe un unique polynôme unitaire que l'on note $\mu_{u,x}$ qui l'engendre (l'existence provient de la principalité, l'unicité du fait qu'on le choisit unitaire). On remarque déjà que $\mu_{u,x}$ divise μ_u.
Si d est le degré de $\mu_{u,x}$, on a classiquement que $(x, u(x), ..., u^{d-1}(x))$ est une base de $\mathbb{K}[u]\cdot x$.

Les sous espaces $\mathbb{K}[u] \cdot x$ sont appelés sous-espaces *cycliques.* L'objectif de ce qui va suivre va être de décomposer E en sous-espaces cycliques.

Lemme. *Il existe $x \in E$ tel que $\mu_{u,x} = \mu_u$.*

Démonstration. On décompose μ_u en facteurs irréductibles : $\mu_u = \prod_i P_i^{\alpha_i}$ $(\alpha_i > 0)$. On pose $K_i := \ker P_i^{\alpha_i}(u)$. Alors, d'après le lemme des noyaux, on a $E = \bigoplus_i K_i$. Comme K_i est stable par u, on peut considérer l'endomorphisme u_i induit par u sur K_i.

Montrons qu'il existe $x_i \in K_i$ tel que $\mu_{u_i,x_i} = \mu_{u_i}$.

Par définition de u_i, $P_i^{\alpha_i}(u_i) = 0$, donc μ_{u_i} divise $P_i^{\alpha_i}$. Si on suppose que $\mu_i \neq P_i^{\alpha_i}$, alors par irréductibilité de P_i, on a donc que $P_i^{\alpha_i-1}(u_i) = 0$, soit $\ker P_i^{\alpha_i-1}(u) \supset K_i$, et l'autre inclusion est évidente.
Si l'on revient à μ_u, que l'on écrit $\mu_u = P_i^{\alpha_i} M$ avec M premier avec P_i, le lemme des noyaux donne $E = \ker P_i^{\alpha_i}(u) \oplus \ker M(u) = \ker P_i^{\alpha_i-1}(u) \oplus \ker M(u) = \ker P_i^{\alpha_i-1} M(u)$ donc $P_i^{\alpha_i-1} M(u) = 0$ ce qui contredit la minimalité de μ_u.
On a alors que $\mu_i = P_i^{\alpha_i}$, et donc si l'on suppose que pour tout $x_i \in K_i$, μ_{u_i,x_i} divise strictement μ_i, on obtient que $P_i^{\alpha_i-1}(u_i)(x_i) = 0$ pour tout $x_i \in K_i$, ce qui est impossible par minimalité de $\mu_i = P_i^{\alpha_i}$.

On passe maintenant du local (les K_i) au global (E entier).
Posons $x = \sum_i x_i$. Montrons que $\mu_{u,x} = \mu_u$.
$0 = \mu_{u,x}(u)(x) = \sum_i \mu_{u,x}(u)(x_i)$ et comme la somme des K_i est directe, on a que $\forall i$ $\mu_{u,x}(u)(x_i) = 0$, d'où μ_{u,x_i} divise $\mu_{u,x}$.

Mais $\mu_{u,x_i} = \mu_{u_i,x_i} = \mu_{u_i} = P_i^{\alpha_i}$, et les $P_i^{\alpha_i}$ sont premiers entre eux, donc leur produit divise $\mu_{u,x}$, i.e. μ_u divise $\mu_{u,x}$ d'où l'égalité.

□

Proposition 1. *Soit x tel que $\mu_{u,x} = \mu_u$. Alors $\mathbb{K}[u] \cdot x$ possède un supplémentaire stable par u.*

Démonstration. On note $d = \deg(\mu_u)$. $(x, u(x), ..., u^{d-1}(x))$ forme une base de $\mathbb{K}[u] \cdot x$.
Soit $f \in E^*$ telle que
$f(x) = f(u(x)) = ... = f(u^{d-2}(x)) = 0$ et $f(u^{d-1}(x)) = 1$.

Alors $(f, f \circ u, ..., f \circ u^{d-1})$ forme une famille libre de E^*.
En effet, si $\sum_{k=0}^{d-1} a_k f \circ u^k = 0$, en évaluant cette expression en les $u^i(x)$ (pour i allant de 0 à $d-1$), on obtient successivement $a_{d-1} = 0 \ldots a_1 = 0$. On note F le sous-espace engendré par cette famille. Alors :

- $F^{\perp}$ est stable par u

Soit $y \in F^{\perp}$. Alors $f(u^k(y)) = 0$ $\forall k \in [\![0; d-1]\!]$ donc $f(u^k(u(y))) = 0$ $\forall k \in [\![0; d-2]\!]$. Reste à montrer que $f(u^{d-1}(u(y))) = 0$ pour avoir $u(y) \in F^{\perp}$. Mais $f(u^d(y)) = 0$ puisque $u^d(y)$ est combinaison linéaire des $u^k(y), (k < d)$, donc $u(y) \in F^{\perp}$.

- $F^{\perp} \oplus \mathbb{K}[u] \cdot x = E$

Soit $y \in F^{\perp} \cap \mathbb{K}[u] \cdot x$. Alors y s'écrit $y = \sum_{k=0}^{d-1} a_k\ u^k(x)$. On applique successivement $f \circ u^i$ (pour i allant de 0 à $d-1$), pour obtenir $a_{d-1} = 0 \ldots a_0 = 0$, d'où $y = 0$.
On conclut avec l'égalité des dimensions : $\dim \mathbb{K}[u] \cdot x = d$ et $\dim F^{\perp} = \dim E^* - \dim F = n - d$.

□

Théorème 1. *Il existe une famille de polynômes unitaires $P_1 \ldots P_s$ de $\mathbb{K}[X]$ telle que :*
- $P_s \mid P_{s-1} \mid \ldots \mid P_1$
- $E = \bigoplus_{k=1}^{s} \mathbb{K}[u] \cdot x_k$ *où* $\mu_{u,x_k} = P_k$

Démonstration. On choisit (grâce au lemme[1]) $x_1 \in E$ vérifiant $\mu_{u,x_1} = \mu_u$. On a alors d'après la proposition que $E = \mathbb{K}[u] \cdot x \oplus S$ avec S stable par u. Le polynôme minimal de l'endomorphisme induit u_S divise μ_u, donc on recommence avec u_S, et on obtient par récurrence une décomposition dite *de Frobenius* : $E = \bigoplus_{k=1}^{s} \mathbb{K}[u] \cdot x_k$.

□

Corollaire 1. *Il existe une famille de polynômes unitaires $P_1 \ldots P_s$ de $\mathbb{K}[X]$ telle que :*
- $P_s \mid P_{s-1} \mid \ldots \mid P_1$
- *il existe une base e de E telle que* $Mat_e(u) = \begin{pmatrix} C_{P_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{P_s} \end{pmatrix}$,

où C_P désigne la matrice compagnon du polynôme P.

Démonstration. Il suffit de considérer la décomposition donnée par le théorème, $E = \bigoplus_{k=1}^{s} \mathbb{K}[u] \cdot x_k$ avec $\mu_{u,x_k} = P_k$ et de prendre pour base
$e = (x_1, u(x_1), ..., u^{d_1-1}(x), ..., x_s, u(x_s), ..., u^{d_s-1}(x))$ où d_k désigne le degré de P_k. □

1. Pas le lemme de Zorn, hein

Extrema liés.

Avez p 103
p 98

<u>Théorème</u> Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f, g_1, \dots, g_k : U \to \mathbb{R}^n$ des fonctions de classe C^k. Soit $M = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0\}$.
On suppose que les ~~g~~ $D_x g_1 \dots D_x g_k$ sont linéairement indépendantes pour tout x dans U et que f admet un extremum lié en m sur M.
Alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des constantes telles que :

$$D_m f = \lambda_1 D_m g_1 + \dots + \lambda_k D_m g_k$$

Commençons par le lemme suivant :

<u>Lemme</u> Soient $v, u_1, \dots, u_k$ des formes linéaires sur un e-v E de dimension n. Supposons que $u_1 \dots u_k$ soient linéairement indépendantes et que $\bigcap_{i=1}^k \mathrm{Ker}\, u_i \subset \mathrm{Ker}\, v$. Alors v est combinaison linéaire des u_i.

<u>preuve</u> On complète les u_i en $(u_1 \dots u_n)$ une base de E^*, et soit $(e_1 \dots e_n)$ la base antéduale. Il existe alors $\lambda_1 \dots \lambda_n$ telles que $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$. D'autre part, l'intersection des noyaux est engendrée par les $e_{k+1}, \dots, e_n$. On a donc $0 = v(e_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i(e_j) = \lambda_j$ si $j = k+1, \dots, n$. Ainsi $v = \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i$

<u>preuve du Théorème :</u> M est les zéros de fonctions dont les différentielles sont libre pour tout $x \in U$: c'est une sous-variété de dimension $n-k$

- Soit $T_m M$ l'espace tangent à M en m montrons que $T_m M = \bigcap_{i=1}^k \mathrm{Ker}\, D_m g_i = T$.

  Comme les $D_m g_i$ sont linéairement indépendantes, $\dim(\mathrm{Vect}(D_m g_1, \dots, D_m g_k)) = k$. De plus $\bigcap_{i=1}^k \mathrm{Ker}\, D_m g_i = (\mathrm{Vect}(D_m g_1 \dots D_m g_k))^\circ$

  D'où $\dim T = n - k = \dim T_m M$.

  Soit $v \in T_m M$, Alors il existe un intervalle I contenant 0 et γ une application différentiable $I \to M$ tq $\gamma(0) = m$ et $\gamma'(0) = v$.

  Soit $i \in [\![1, k]\!]$. On a $g_i(\gamma(t)) = 0 \quad \forall t \in I \quad (\gamma(I) \subset M)$.

  Ainsi $g_i \circ \gamma$ est la fonction nulle. En particulier.

  $0 = \frac{d}{dt} g_i(\gamma(t)) = D_{\gamma(t)} g_i(\gamma'(t))$. D'où en évaluant en $t=0$

  $D_m g_i(v) = 0$ i.e $v \in \mathrm{Ker}\, D_m g_i$. On en conclut $T_m M = T$.

- Montrons que $T_m M \subset \mathrm{Ker}\, D_m f$.
Soit $v \in T_m M$, $\gamma : I \to M$ differentiable telle que $\gamma(0) = m$ et $\gamma'(0) = v$.
On a $f_{|M} \circ \gamma(t) = f \circ \gamma(t)$ pour tout $t \in M$. De plus, $f \circ \gamma$ admet un extremum en 0 par hypothèse. Ainsi $(f \circ \gamma)'(t) = 0$
On obtient $0 = D_{\gamma(0)} f(\gamma'(t)) = D_m f(v)$. D'où $v \in \mathrm{Ker}\, D_m f$.

- On a montré que $\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}\, D_m g_i = T_m M \subset \mathrm{Ker}\, D_m f$. On conclut grâce au lemme.

$\square$

<u>Application.</u> Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclien E. Alors E possède une base de vecteurs propres de u.

<u>preuve</u> La fonction $f : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle u(x), x \rangle$ est differentiable
Elle atteint donc un maximum sur la sphère unité S (qui est compacte) en un point e_1. Montrons que e_1 est un vecteur propre de u.
Posons $g : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle x, x \rangle$ et $M = \{x \in E \text{ tq } g(x) = 1\} = S$
On a pour $(x, h) \in E \times E$ $\quad g(x+h) = g(x) + 2\langle x, h \rangle + \langle h, h \rangle$.
D'où $D_x g \cdot h = 2\langle x, h \rangle$ qui n'est pas la fonction nulle
On peut alors appliquer le theorème ~~avec~~ à f, g et la sous variété S : il existe λ tel que $D_{e_1} f = \lambda D_{e_1} g$. $(*)$
Calculons $D_x f$; On a $f(x+h) = f(x) + 2\langle u(x), h \rangle + \langle u(h), h \rangle$.
D'où $D_x f \cdot h = 2\langle u(x), h \rangle$.
Ainsi $(*) \Rightarrow 2\langle u(e_1), h \rangle = 2\lambda\langle e_1, h \rangle$ pour tout h.
D'où $u(e_1) = \lambda e_1$.

- Si maintenant $\langle y, e_1 \rangle = 0$, alors $\langle u(y), e_1 \rangle = \lambda\langle y, e_1 \rangle = 0$
Donc l'orthogonal de e_1 est stable par u. et la restriction de u à $e_1^\perp$ est symétrique.
Comme $\dim e_1^\perp = \dim E - 1$. On a, par recurrence l'existence d'une base de vecteurs propre de u.