Leçon 245. Fonctions d'une variable complexe. Exemples et Applications.
Trinôme B · DAL MOLIN Guillaume, MASSON Benjamin, MORIANI Alex.
Références : Analyse complexe et applications QUEFFELEC, ZUILY-QUEFFELEC, Objectif Agrégation, Analyse Complexe P. THUVL.

Pour toute la leçon $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

# I. Fonctions holomorphes

## 1) Séries entières et analyticité

**Def 1.** Une série entière est une série formelle $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$

**Prop 2.** Il existe $0 \leq R \leq +\infty$ tq $\sum_{n\geq 0} |a_n| r^n < +\infty$ $\forall r < R$ et $\sum |a_n| r^n$ diverge $\forall r > R$. On appelle $R$ le rayon de conv.

**Exemples 3.** $\sum_{n\geq 0} z^n$, $R = 1$ ; $\exp(z) := \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$, $R = +\infty$.

**Def 4.** Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$. $f$ est dite développable en série entière (DSE) au voisinage de $z_0 \in \Omega$ si il existe une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de conv. égal à $R > 0$ tq si $0 < r \leq R$, $\forall z \in D(z_0, r)$
$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z - z_0)^n.$$
De plus, $f$ est dite analytique sur $\Omega$ si elle est DSE en $z$, $\forall z \in \Omega$.

**Exemple 5.** Soit $P(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k$ une ~~fonction~~ polynomiale $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ alors $P$ est analytique sur $\mathbb{C}$.

## 2) Holomorphie

**Def 6.** Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$, on dit ~~que~~ $f$ est $\mathbb{C}$-dérivable en $a \in \mathbb{C}$ si $\lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$ existe ; on note alors $f'(a)$ cette limite.

On dit que $f$ est holomorphe sur $\Omega$ si elle est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de $\Omega$. On définit alors $f'$ la fonction dérivée de $f$ sur $\Omega$.

**ex 7.** $z \mapsto z^2$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ de dérivée $z \mapsto 2z$.
$z \mapsto \bar{z}$ est définie sur $\mathbb{C}$ mais nulle part $\mathbb{C}$-dérivable.

**Théorème 8** (Cauchy - Riemann) Soit $f = P + iQ : \Omega \to \mathbb{C}$ alors $f$ est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0$ si et seulement si $P$ et $Q$ (parties réelles et imaginaires) sont $\mathbb{R}$-différentiables en $z_0$ avec en ce point
$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

**Exemple 9** $f : z \mapsto z^2 - 3z + 4 = x^2 - y^2 - 3x + 4 + i(2xy - 3y)$ $[z = x + iy]$.
$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 2x - 3 = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)$$
$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -2y = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$$
donc $f$ est bien holomorphe sur $\mathbb{C}$.

**Théorème 10** • L'ensemble $\mathcal{H}(\Omega)$ des fonctions holomorphes sur $\Omega$ forme une algèbre : stable par $+, \times$ et multiplication par un scalaire, $\mathbb{1}$ = fonction constante égale à 1.
• Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et ne s'annule pas alors $\frac{1}{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$
• Si $f : \Omega' \to \Omega$, $g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe alors $g \circ f$ est holomorphe.

**Théorème 11** - Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de cv $R > 0$ dont on note $S$ la somme sur $D(0,R)$, alors on a
i) $S$ est $\mathbb{C}$-dérivable sur $D(0,R)$ et $S^{(k)}(z) = \sum_{n\geq k} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n z^{n-k}$
ii) Soit $a \in D(0,R)$ $z$ tq $|z - a| < R - |a|$ alors
$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k$$
i.e. $S$ est analytique et les coeff du DSE sont uniquement déterminés.

## 3) Logarithme complexe

**Def 12.** On appelle $\log(z)$ un nombre complexe $u$ tel que $e^u = z$.
Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ une fonction holomorphe. Une détermination holomorphe du logarithme de $f$ sur $\Omega$ est une fonction $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que $e^{g(z)} = f(z)$ $\forall z \in \Omega$.

**Prop. 13.** Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ une fonction holomorphe
• Si $g$ est une détermination holomorphe de $\log(f)$ sur $\Omega$ alors $g' = \frac{f'}{f}$.
• Si $\frac{f'}{f}$ admet une primitive sur $\Omega$, alors il existe une détermination holomorphe de $\log(f)$ sur $\Omega$.

**Def 14.** On appelle détermination principale du log la fonction
$\log : \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_- \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \ln|z| + i\arg(z)$
où $\arg : \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_- \to ]-\pi, \pi[$

**Proposition 15.** $\forall |z| < 1$ $\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$.

# II - Intégration sur un chemin

## 1) Introduction

**Def 16.** On appelle chemin une application $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On dit que c'est un lacet si $\gamma(a) = \gamma(b)$. On note $\gamma^* \subset \mathbb{C}$ l'image de $\gamma$.
Pour $f$ continue sur $\gamma^*$ on définit alors
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.$$

**Déf 16.** On définit la longueur d'un chemin par
$$L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$$

**Prop 17.** Soient $\gamma$ un chemin et $f$ une application $\Omega \to \mathbb{C}$, continue sur $\gamma^*$ alors $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \sup_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))| \cdot L(\gamma)$.

**Ex 18.** $\gamma(t) := Re^{it}$ pour $t \in [0,2\pi]$ ; $R>0$ $\int_\gamma \frac{1}{z}dz = 2\pi i$.

**Théorème 19.** Soit $f$ continue sur $\Omega$. Si $f$ admet une primitive et $\gamma$ un lacet alors $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

**Déf 20.** Soit $\gamma$ un chemin, $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\gamma^*$. On définit l'indice de $z_0$ par rapport à $\gamma$ : $\mathrm{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}$.

**Prop 21.** La fonction $a \mapsto \mathrm{Ind}(\gamma, a)$ est continue de $\mathbb{C}\setminus\gamma^* \to \mathbb{Z}$, nulle sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$.

**Exemple 22.** $\gamma(t) := Re^{it}$ pour $t\in[0,2\pi]$, $R>0$.
$$\mathrm{Ind}(\gamma,z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in \mathring{D}(0,R) \\ 0 & \text{si } z \notin D(0,R)\end{cases}$$

## 2) Théorèmes de Cauchy et analyticité

**Théorème 23 (Goursat).** Soit $\Delta$ un triangle inclus dans $\Omega$, $a\in\Omega$. Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega\setminus\{a\}) \cap \mathcal{C}(\Omega)$ alors $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$.

**Théorème 24 (Cauchy).** On suppose $\Omega$ étoilé, $\gamma$ lacet ($\gamma^* \subset \Omega$) $f$ holo sur $\Omega\setminus\{a\}$, $a\in\Omega$ alors $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

**Théorème 25. (Formule de Cauchy).** $\Omega$ étoilé, $\gamma$ lacet, $f\in\mathcal{H}(\Omega)$
$\forall z \in \Omega\setminus\gamma^*$ $f(z)\,\mathrm{Ind}(\gamma,z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(u)}{u-z}du$
et $f^{(n)}(z)\,\mathrm{Ind}(\gamma,z) = \frac{n!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(u)}{(u-z)^{n+1}}du$

**Théorème 26.** $f$ holomorphe sur $\Omega \Rightarrow f$ analytique sur $\Omega$.

**Théorème 27 (Inégalité de Cauchy).** Soient $z_0\in\mathbb{C}$, $f$ holomorphe au voisinage de $\overline{D}(z_0,r)$ alors $|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n}\sup_{C(z_0,r)}|f|$.

**Application 28.** Soit $a\in\mathbb{R}$, $a>0$. Alors $\forall \xi\in\mathbb{R}$
$$\mathcal{F}(e^{-ax^2})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(\frac{-\xi^2}{4a}\right).$$
Dev 1.

## 3) Conséquences de la théorie de Cauchy.

**Théorème 29 (Liouville)** $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$. Si $f$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et bornée alors $f$ est constante.

**Corollaire 30. (d'Alembert-Gauß).** Soit $P\in\mathbb{C}[z]$ un polynôme. Si $P$ ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$, alors il est constant.

**Théorème 31 (Morera).** Soit $f:\Omega\to\mathbb{C}$ continue sur $\Omega$, si $\forall\Delta\subset\Omega$ $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ alors $f$ est holomorphe.

**Théorème 32 (Holomorphie sous le signe $\int$).** Soit $(T,\mu)$ un espace mesuré et soit la fonction $F(z) = \int_T f(z,t)\,d\mu(t)$ où $f:\Omega\times T\to\mathbb{C}$ vérifie
(1) $\forall z\in\Omega$, la fonction $t\mapsto f(z,t)$ est dans $L^1(\mu)$
(2) il existe $N\subset T$ négligeable tq $t\notin N \Rightarrow z\mapsto f(z,t) \in \mathcal{H}(\Omega)$.
(3) pour tout compact $K\subset\Omega$, il existe $g_K\in L^1(\mu)$ tq $|f(z,t)|\leq g_K(t)$ pour tout $z\in K$ et $t\notin N$.
alors $F\in H(\Omega)$. De plus,
$$F'(z) = \int_T \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)\,d\mu(t), \quad \text{pour tout } z\in\Omega.$$

**Proposition 33. (Propriété de la moyenne)** Soient $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ et $a\in\Omega$, $r>0$ tq $D(a,r)\subset\Omega$ et $\forall z\in D(a,r)$ $f(z) = \sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ alors $f(a) = \int_0^1 f(a+re^{2i\pi t})\,dt$.

**Théorème 34. (Principe du max local).** Soit $f:\Omega\to\mathbb{C}$ continue et vérifiant la propriété de la moyenne, alors si $|f|$ possède un maximum local en $a\in\Omega$, $f$ est constante au voisinage de $a$.

**Théorème 35 (Principe du max global).** On suppose $\Omega$ ouvert connexe borné. Soit $f:\overline{\Omega}\to\mathbb{C}$ continue vérifiant la prop. de la moyenne dans $\Omega$ et $M = \sup_{z\in\partial\Omega}|f(z)|$ alors 1) $|f(z)|\leq M$ $\forall z\in\Omega$
2) $|f(a)| = M$ pour $a\in\Omega \Rightarrow f$ constante sur $\Omega$.

**Lemme 36 (Schwarz)** Soient $R,M>0$, $f:D(0,R)\to\mathbb{C}$, holomorphe tq $f(0)=0$ et $|f(z)|\leq M$ $\forall z\in D(0,R)$ alors 1) $|f(z)|\leq \frac{M|z|}{R}$ $\forall z\in D(0,R)$ et $|f'(0)|\leq\frac{M}{R}$.
2) Si $\exists z_0\neq 0$ tq $|f(z_0)| = \frac{M|z_0|}{R}$ ou si $|f'(0)| = \frac{M}{R}$ alors $f(z) = uz$ où $u\in\mathbb{C}$ et $|u| = \frac{M}{R}$.

**Application 37.** Les automorphismes de $D = D(0,1)$ sont les $u\cdot\varphi_a$ où $|u|=1$ et $\varphi_a : z\mapsto \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ avec $a\in D$.

DEV 2.

## III - Fonctions méromorphes et résidus

1) Principe des zéros isolés

**Thm 38.** Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. On suppose $\Omega$ connexe et $f \neq 0$. Soit $Z(f) = \{z \in \Omega,\ f(z) = 0\}$. Alors on a

i) Si $z_0 \in Z(f)$ est d'ordre $m \in \mathbb{N}$ alors $\exists g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tq $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$

ii) $Z(f)$ est au plus dénombrable et ses points sont isolés.

**Thm 39.** (Prolongement analytique). Soient $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ ; $\Omega$ connexe ; tq les 2 fonctions soient égales sur une partie de $\Omega$ possédant un point d'accumulation dans $\Omega$ alors $f = g$ sur $\Omega$.

**Application 40.** On définit la fonction $\zeta$ de Riemann $\forall s \in \mathbb{C}$ tq $Re(s) > 1$ par $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Alors $\zeta$ se prolonge en une fonction analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$

2) Singularités isolées

**Def 41 :** Soient $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$ on dit alors que $f$ a une singularité en $a$.

- Si $f$ se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de $a$, on dit que $a$ est une singularité effaçable.
- Si il existe une (unique) suite finie de nombres complexes $(c_{-1}, \dots c_{-m})$ avec $m \geq 1$ et $c_{-m} \neq 0$ telle que la fonction
$$z \mapsto f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_{-k}}{(z-a)^k}$$ soit une singularité effaçable en $a$
on dit alors que $a$ est est un pôle d'ordre $m$ de $f$.
- Dans les autres cas, on dit que $a$ est une singularité essentielle de $f$.

**Ex. 42** $z \mapsto \frac{\sin z}{z}$ admet une singularité effaçable en $0$.

**Prop. 43** Soient $a \in \Omega$, $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$. On note $D^*(a,r) = \{z \in \mathbb{C}, 0 < |z-a| < r\}$

(1) $a$ est une singularité effaçable de $f$ ssi $\exists r > 0$ tq $f$ soit bornée sur $D^*(a,r)$

(2) $a$ est un pôle de $f$ ssi $\lim_{z \to a} |f(z)| = +\infty$. L'ordre du pôle est alors égal à la multiplicité de $a$ comme zéro de $\frac{1}{f}$.

**Ex 44.** $z \mapsto e^{1/z}$ admet une singularité essentielle en $0$.

3) Fonctions méromorphes.

**Def 45.** Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$. On dit que $f$ est méromorphe sur $\Omega$ s'il existe $A \subset \Omega$ tel que

(1) $A$ n'a que des points isolés dans $\Omega$

(2) $f \in H(\Omega \setminus A)$

(3) $f$ a un pôle en chaque point de $A$.

**Ex 46.** $z \mapsto \frac{1}{\sin z}$ est méromorphe dans $\mathbb{C}$ ; $A = \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ est l'ensemble de ses pôles.

**Prop 47.** Si $f$ est méromorphe sur $\Omega$ alors $f'$ l'est aussi et $f$ et $f'$ ont les mêmes pôles.

**Thm 48.** Soit $\sum f_n$ une série de fonctions méromorphes sur $\Omega$ qui vérifie : pour tout compact $K$ de $\Omega$, il existe $N_K$ tq, $\forall n \geq N_K$ les $f_n$ n'ont pas de pôles dans $K$ et que $\sum_{n \geq N_K} f_n$ converge unif. sur $K$ ; alors la somme de cette série est méromorphe sur $\Omega$.

**Application 49.** On considère la fonction $\Gamma : P \to \mathbb{C}$ où $P = \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > 0\}$
$$z \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$
la fonction $\Gamma$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ ; ses pôles étant $\{-n,\ n \in \mathbb{N}\}$ DEV 3

4) Résidus.

**Def 50.** Soit $f$ méromorphe sur $\Omega$ et $a \in \Omega$ un pôle d'ordre $m$ de $f$. On appelle résidu de $f$ en $a$ noté $Res(f,a) = c_{-1}$ où $c_{-1}$ est le coefficient de la def 41.

**Prop 51.** Soit $f = \frac{g}{h}$ où $g, h$ sont holo. au voisin. de $a \in \Omega$. On suppose $a$ un zéro simple de $h$ et $g(a) \neq 0$. Alors $Res(f,a) = \frac{g(a)}{h'(a)}$.

**Théorème 52** (des Résidus). Soit $f$ une fonction méromorphe sur $\Omega$ et $A$ l'ens. de ses pôles. Soit $\gamma$ un lacet dans $\Omega$ tq $\gamma^* \cap A = \emptyset$ et tel que $Ind(\gamma, z) = 0$ $\forall z \notin \Omega$, on a
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{a \in A} I(\gamma, a) \cdot Res(f,a)$$

**Ap. 53.** $I_n := \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

**Théorème 54** (Kronecker). Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ ; $f \neq 0$ et soit $\gamma$ un lacet dans $\Omega$ tq $Ind(\gamma, z) = 0$ $\forall z \notin \Omega$ et qui ne rencontre pas l'ensemble des zéros de $f$. Soit $Z$ le nb de zéros de $f$ (avec multiplicité) situés à l'intérieur de $\gamma$. Alors $Z = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$

**Thm 55** (Rouché). Soit $\gamma$ un lacet tq $Ind(\gamma, z) = 0$ $\forall z \notin \Omega$. Soient $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ si $(z \in \gamma^* \Rightarrow |g(z)| < |f(z)|)$ alors $Z(f) = Z(f+g)$. ($Z(f)$ = nb de zéros de $f$)

## IV - Espace des fonctions holomorphes

**Def 56.** Soit $(K_n)_{n \geq 1}$ une suite exhaustive de compact de $\Omega$. Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ on pose $p_n(f) = \sup_{z \in K_n} |f(z)|$ et $d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}$.

**Thm 57.** $d$ est une métrique sur $H(\Omega)$, invariante par translation : $d(f,g) = d(f-g, 0)$. De plus, si $(f_j)$ est une suite de $H(\Omega)$ et $f \in H(\Omega)$ on a $f_j \xrightarrow[unif]{} f \Leftrightarrow d(f_j, f) \to 0$

En conséquence, $d$ est une métrique complète sur $H(\Omega)$.

**Def 58.** Une partie $A$ de $H(\Omega)$ est dite famille normale si les éléments de $A$ sont uniformément bornés sur tout compact de $\Omega$ ; de façon équiv. si $\forall N \in \mathbb{N}$ $\sup_{f \in A} p_N(f) < +\infty$.

**Théorème 59** (Montel) Soit $A \subset H(\Omega)$. Alors on a équivalence entre

(1) $A$ est une famille normale

(2) $A$ est relativement compacte dans $H(\Omega)$. DEV 4.

Prolongement de la fonction $\Gamma$ sur $\mathbb{C}\setminus\{-\mathbb{N}\}$ : (objectif agrégation p 82)

on considère la fonction $\Gamma$ définie sur $\mathcal{P}=\{z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z)>0\}$ par :

$$\Gamma : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1}\,dt$$

But : 1) Montrer que $\forall z\in\mathcal{P}$ : $\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1}\,dt$

2) Montrer que $f : z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec des pôles simples en les entiers négatifs ou nuls

3) En déduire que $\Gamma$ se prolonge de manière méromorphe sur $\mathbb{C}$

① $\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1}\,dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1}\,dt$ , on cherche à écrire la première intégrale sous forme de série.

on développe l'exponentielle : $t^{z-1} e^{-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}$

on vérifie les hypothèses du théorème de Fubini pour l'inversion somme-intégrale :

$\forall t>0$ , $|t^z| = t^{\mathrm{Re}(z)}$, on obtient alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n!}\right| |t^{n+z-1}| = t^{\mathrm{Re}(z)-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t t^{\mathrm{Re}(z)-1}$

comme $\mathrm{Re}(z)-1 > -1$ (par $z\in\mathcal{P}$), $t \longmapsto t^{\mathrm{Re}(z)-1} e^t$ est intégrable sur $]0,1]$, ainsi $\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}\right| dt < +\infty$ , ainsi avec Fubini :

$$\int_0^1 e^{-t} t^{z-1}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{n+z-1}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} \quad \checkmark$$

② On admet ici le théorème sur les séries de fonctions méromorphes :

Soit $(f_n)$ une famille de fonctions méromorphe tel que pour tout compact $K$, $\exists N_K$ tel que $\forall n\geq N_K$ : $f_n$ n'a pas de pôle dans $K$ et $\sum_{n\geq N_K} f_n$ CVN sur $K$

Alors $\sum f_n$ est méromorphe et on peut dériver terme à terme

* $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n : z \longmapsto \dfrac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec un pôle simple en $-n$

* Soit $K$ compact de $\mathbb{C}$, $\exists N_K \in \mathbb{N}$ tq $K \subset \overline{D(0,N_K)}$ et $\forall n > N_K$, $f_n$ n'a pas de pôles dans $\overline{D(0,N_K)}$ et donc dans $K$

de plus $|z+n| \geqslant n - N_K$ pour $z \in K$ et donc $|f_n(z)| \leqslant \dfrac{1}{n!(n-N_K)}$
ainsi $\sum\limits_{n \geqslant N_K} f_n$ CVN sur $K$

finalement $\sum f_n$ est méromorphe avec des pôles simple en les entiers négatif ou nuls

③ on conclut en appliquant le théorème d'holomorphie sous le signe integral à la fonction $(z,t) \longmapsto t^{z-1} e^{-t} = e^{-t} e^{(z-1)\ln(t)}$

Les deux premières hypothèses sont évidement vérifiées,
Sur un compact $K$ de $\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) < M$ et donc pour $t \geqslant 1$ :

$$|e^{(z-1)\ln(t)} e^{-t}| \leqslant t^{M-1} e^{-t} \quad \text{et} \quad t \longmapsto t^{M-1} e^{-t} \in L^1([1,+\infty[)$$

ainsi $z \longmapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier

et finalement $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$ établit un prolongement méromorphe de la fonction $\Gamma$ sur $\mathbb{C}$.

# Lemme de Schwarz et automorphismes de $D(0,1)$.

p. 107 & 284 H. et M. Queffelec

Théorème : $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leq 1$ $\forall z \in D(0,1)$. Alors on a

(i) $|f(z)| \leq |z|$ $\forall z \in D(0,1)$ et $|f'(0)| \leq 1$

(ii) Si il y a égalité en un point $z_0 \neq 0$ ou si $|f'(0)| = 1$ alors $\exists |u| = 1$, $f(z) = uz$ $\forall z \in \mathbb{C}$

Preuve : (i) Comme $f(0) = 0$, on peut écrire $f(z) = z\,g(z)$ $\forall$ avec $g$ holo sur $D$ et $g(0) = f'(0)$.

* On suppose $f$ (et donc $g$) continue sur $\bar{D}$. Pour $|z| = 1$, $|g(z)| = |f(z)| \leq 1$, et par le principe du maximum sur $D$,
$|g(z)| \leq 1$ $\forall z \in D$, ie $|f(z)| \leq |z|$ $\forall z \in D$.

* Dans le cas général, soit $0 < r < 1$, $h : z \mapsto f(rz)$. On a par ce qui précède $|h(z)| = |f(rz)| \leq |z|$ $\forall z \in D$ $\forall r \in ]0,1[$.
On fait $r \to 1$ pour obtenir $|f(z)| \leq |z|$ $\forall z \in D$.

(ii) Si $|f(z_0)| = |z_0|$ avec $z_0 \neq 0$, alors $|g(z_0)| = 1$.
Soit $\rho$ tq $|z_0| < \rho < 1$. $g \in \mathcal{H}(D(0,\rho)) \cap \mathcal{C}(\overline{D(0,\rho)})$ et $|g|$ atteint son max en $z_0 \in D(0,\rho)$ d'où par le principe du maximum, $g$ constante égale à $u$ de module $1$ sur $D(0,\rho)$ donc $|z| < \rho \Rightarrow f(z) = uz$. Par principe de prolongement analytique, $\forall z \in D$, $f(z) = uz$. Si $|f'(0)| = 1$, $g$ atteint son max en $0$ $\square$

Théorème : Les biholomorphismes du disque unité sont les $f = u\varphi_a$ où $|u| = 1$ et $\varphi_a : z \mapsto \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$ avec $a \in D$.

Preuve : Soit $f = u\varphi_a$ avec $|u| = 1$, $a \in D$.
$f = R_u \circ \varphi_a$ où on a noté $R_u$ la rotation d'angle $\arg(u)$.

$f : D \to D$, et $f$ est injective car $\varphi_a$ inversible d'inverse $\varphi_{-a}$. On peut écrire $f^{-1} = \varphi_a^{-1} \circ R_{\bar{v}}^{-1} = \varphi_{-a} \circ R_{\bar{v}}$, d'où $\forall w \in D$,

$$f^{-1}(w) = \frac{\bar{v}w + a}{1 + \bar{a}\bar{v}w} = \bar{v}\,\frac{w + av}{1 + \bar{a}\bar{v}w} = R_{\bar{v}} \circ \varphi_{-av}$$

d'où $f$ bijective d'inverse $\bar{v}\varphi_{-av}$ (de la forme souhaitée).

Réciproquement, soit $f \in Aut(D)$

* Si $f(0) = 0$, $f^{-1}(0) = 0$ et par le lemme de Schwarz

d'une part $|f(z)| \leq |z|$, $|f^{-1}(z)| \leq |z|$ $\forall z \in D$ donc $|f(z)| = |z|$ $\forall z \in D$

d'autre part $f(z) = vz$ avec $|v| = 1$

autrement dit $f = v\varphi_0$

* Si $f(0) \neq 0$, soit $a \in D$ tel que $f(a) = 0$, soit $g := f \circ \varphi_{-a}$

$g \in Aut(D)$ et $g(0) = 0$, donc par ce qui précède $\exists v \in \mathcal{C}(0,1)$

tq $g = v\varphi_0$ d'où $f = v\varphi_0 \circ \varphi_{+a} = v\varphi_a$ $\square$

Questions : * $\varphi_a$ inversible ? Évident

* $\varphi_a : D \to D$ ? Oui : $\varphi_a$ holo sur $D$, continue sur $\bar{D}$, non constante ($\varphi_a(0) = a$, $\varphi_a(a) = 0$) et $|\varphi_a(z)| = 1$ $\forall |z| = 1$ car

$|z| = 1 \Rightarrow |1 - \bar{a}z| = |1 - \bar{z}a| = |z|\,|1 - \bar{z}a| = |z - a| \Rightarrow |\varphi_a(z)| = 1$

d'où par le principe du maximum $|\varphi_a(z)| \leq 1$ $\forall |z| < 1$.

Théorème : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert et $\mathcal{A} \subset (\mathcal{H}(\Omega), d)$, où

(( $d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}$ et $p_n(f) = \sup_{K_n} |f|$ et $(K_n)$ suite exhaustive de compacts.

autrement dit muni de la topo. de la conv. uniforme sur les compacts. Alors sont équivalentes :

(i) $\forall K$ compact de $\Omega$, $\exists M_K \in \mathbb{R}_+^*$ tq $\forall f \in \mathcal{A}$ $\|f\|_{\infty,K} \leq M_K$ (on dit $\mathcal{A}$ bornée sur tout compact de $\Omega$)

(ii) $\mathcal{A}$ est relativement compacte.

"$\Rightarrow$" On suppose $\mathcal{A}$ bornée sur tout compact.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. On va montrer qu'elle admet une sous-suite convergente. Soit $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive* de compacts de $\Omega$. Par exemple $K_p = \overline{D(0,p)} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid d(z, \Omega^c) \geq \frac{1}{p}\}$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. $(f_n|_{K_p})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, par hypothèse, sur $K_p$ par une constante $M_p > 0$. Il reste à démontrer l'équicontinuité et utiliser Ascoli.

* suite de compacts croissante, $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ et $\bigcup K_n = \Omega$

Soit $z \in K_p$, alors $z \in \mathring{K}_{p+1}$ et il existe $r > 0$ tq $D(z,r) \subset K_{p+1}$

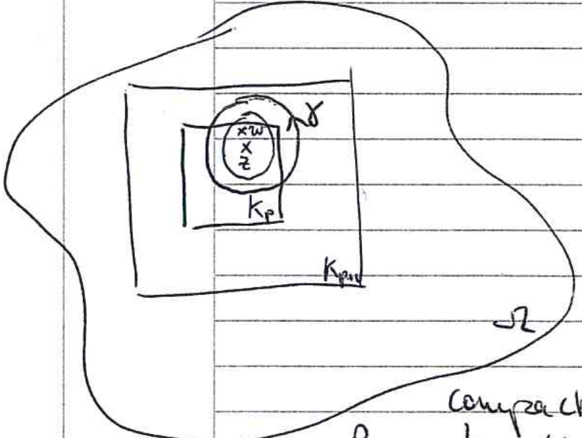
Soit $w \in D(z, r/2)$. Soit $m \in \mathbb{N}$. Par la formule de Cauchy appliquée à $f_m$ et $\gamma = \mathcal{C}(z,r)$ on obtient

$$|f_m(z) - f_m(w)| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma f_m(v) \left( \frac{1}{v-z} - \frac{1}{v-w} \right) dv \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} |z-w| \int_\gamma \frac{|f_m(v)|}{|v-z||v-w|} dv$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} 2\pi r M_{p+1} \frac{1}{r \frac{r}{2}} |z-w|$$

$$\leq 2 \frac{M_{p+1}}{r} |z-w|$$




D'où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-continue sur $K_p$.

D'après Ascoli, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $(f_n|_{K_p})_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte dans $(\mathcal{C}(K_p, \mathbb{C}), \|\cdot\|_{\infty K_p})$

Par extraction diagonale il existe $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (str. croissante) telle que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $(f_{n_k}|_{K_p})_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $K_p$.

Soit $z \in \Omega$, par définition des $K_p$, il existe $p_0 \geq 1$ tq $z \in K_{p_0 - 1} \subset \mathring{K}_{p_0}$. La convergence uniforme de $f_{n_k}|_{K_{p_0}}$ assure l'existence d'une limite, pour $f_{n_k}|_{K_{p_0}}(z)$ donc pour $f_{n_k}(z)$. En notant cette quantité $f(z)$ on définit $f : \Omega \to \mathbb{C}$

Montrons que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, en montrant qu'elle est limite de la sous-suite au sens de la CVU sur tout compact.

Soit $K$ compact de $\Omega$. Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tq $K \subset K_p$. Donc $f_{n_k} \xrightarrow[\text{sur } K]{\text{unif}} f$

Par un th. de Weierstrass, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ comme limite unif sur tout compact de $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$. Au final, $(f_{n_k})_k$ cv vers $f$ dans $(\mathcal{H}(\Omega), d)$ donc $\mathcal{A}$ relativement compact.

"$\Leftarrow$" Par contraposition, on suppose que $\mathcal{A}$ n'est pas bornée sur tout compact de $\Omega$.

Il existe $K \subset \Omega$ compact tel que $\forall k \in \mathbb{N}^* \; \exists f_k \in \mathcal{A} \; \|f_k\|_{\infty,K} \geq k$
Alors $(f_k)_k$ n'admet aucune suite extraite unif cv sur $K$, et à fortiori aucune sous-suite cv pour la topologie de $\mathcal{H}(\Omega)$.
d'où $\mathcal{A}$ n'est pas relativement compacte. $\square$

Application:
Il n'existe pas de norme sur $\mathcal{H}(\Omega)$ définissant la même topologie que celle de la cvu sur tout compact.

Preuve: supposons qu'une telle norme existe $\|\cdot\|$
On montre alors que $\overline{B}_1 = \overline{B}_{\|\cdot\|}(0,1)$ est localement borné :
Soit $K$ compact de $\Omega$. $\{f \in H(\Omega) \mid \|f\|_{\infty K} \leq 1\}$ est un voisinage de $0$ pour la topologie de la convergence uc, donc aussi pour $\|\cdot\|$, donc il existe $r>0$ tel que $\overline{B}_{\|\cdot\|}(0,r) \subset \{f \in H(\Omega) \mid \|f\|_{\infty K} \leq 1\}$
Par homogénéité de $\|\cdot\|$ et de $\|\cdot\|_{\infty,K}$,

$$\overline{B}_1 \subset \{f \in H(\Omega) \mid \sup_{z \in K} |f(z)| \leq \tfrac{1}{r}\}$$

D'où $\overline{B}_1$ est fermé, localement borné donc compact de $\mathcal{H}(\Omega)$.
Par le th de Riesz $\mathcal{H}(\Omega)$ est de dim $< \infty$
C'est absurde car il contient $\mathbb{C}[X]$ de dim $\infty$ $\square$

# Transformée de Fourier d'une Gaussienne

Référence : Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, Mohammed El Amari. p.156

*Théorème :*
Soit $a$ un réel, $a > 0$. Alors, $\forall \xi \in \mathbb{R}$ :

$$\mathscr{F}(e^{-ax^2})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp(\frac{-\xi^2}{4a})$$

*Preuve* :

Posons $\gamma_a$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\gamma_a(x) = e^{-ax^2}$.
Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a :

$$\hat{\gamma}_a(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2 - ix\xi}\, dx$$

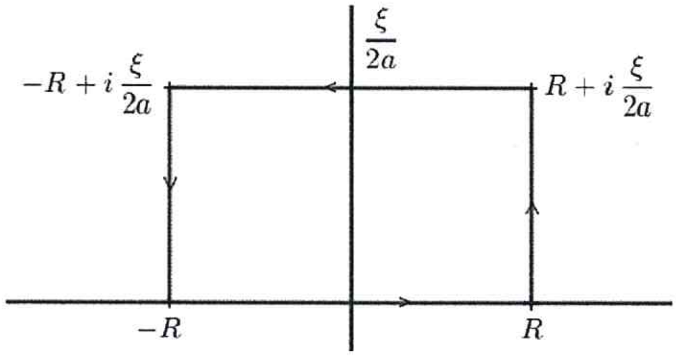
On écrit :

$$ax^2 + ix\xi = a(x^2 + ix\frac{\xi}{a}) = a((x + i\frac{\xi}{2a})^2 + \frac{\xi^2}{4a^2})$$

On a alors :

$$\hat{\gamma}_a(\xi) = e^{\frac{-\xi^2}{4a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-a(x+i\frac{\xi}{2a})^2}\, dx$$

Considérons la fonction de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto e^{-az^2}$ . Pour $R > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, notons $\Gamma(R)$ le contour suivant :




On a :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma(R)} e^{-az^2}\, dz &= \int_{-R}^{R} e^{-ax^2} dx + i\int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(R+it)^2} dt - \int_{-R}^{R} e^{-a(x+i\frac{\xi}{2a})^2} dx - i\int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(-R+it)^2} dt \\ &= I_1(R) + I_2(R) - I_3(R) - I_4(R) \end{aligned}$$

Pour $I_1(R)$ :

On sait que $\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$.

En faisant le changement de variable $u = \sqrt{a}x$ dans $I_1(R)$, on obtient que $\lim_{R \to +\infty} I_1(R) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

Pour $I_2(R)$ :

On a $|I_2(R)| \leq \int_0^{\frac{\xi}{2a}} |e^{-a(R+it)^2}|dt = \int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(R^2-t^2)}dt$ [1]

De plus,

$\int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(R^2-t^2)}dt = e^{-aR^2}\int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{at^2}dt \to 0$ quand $R \to +\infty$.

Pour $I_4(R)$ :

De la même manière que pour $I_2(R)$ on trouve que $|I_4(R)| \to 0$ quand $R \to +\infty$.

Pour $I_3(R)$ :

Il nous reste à étudier $\int_{-R}^{R} e^{-a(x+i\frac{\xi}{2a})^2}dx$. L'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x+i\frac{\xi}{2a})^2}dx$ converge absolument. On a donc :

$\lim\limits_{R\to+\infty} I_3(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x+i\frac{\xi}{2a})^2}dx = e^{\frac{\xi^2}{4a}}\hat{\gamma}_a(\xi)$

La fonction $z \mapsto e^{az^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et le contour $\Gamma(R)$ est fermé donc le théorème de Cauchy implique :

$$\int_{\gamma(R)} e^{az^2} = 0$$

On obtient en passant à la limite quand $R \to +\infty$ que

$$0 = \sqrt{\frac{\pi}{a}} + 0 - e^{\frac{\xi^2}{4a}}\hat{\gamma}_a(\xi) - 0$$

Finalement : $\boxed{\hat{\gamma}_a(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{-\xi^2}{4a}}}$

*Recasage* :250, 236, 245, 239

1. On a $|e^{-a(R+it)^2}| = |e^{-a(R^2-2iRt-t^2)}| = |e^{-a(R^2-t^2)}|.|e^{2iaRt}| = e^{-a(R^2-t^2)}$