Leçon 264 : variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espace probabilisé

I. Définition et premières propriétés.

a) Définitions

déf 1 : Une variable aléatoire discrète est 1 application X mesurable, ne prenant qu'un nb au + dénombrable de valeurs x_k, $k \in \mathbb{N}$

ie sa loi est comb. lin. (dénombrable) de Dirac - $X = \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i \delta_{x_i}$

prop 2 : La loi d'une v.a. discrète est entièrement caractérisée par les $p_k = P(X = x_k)$: $\forall A \subset \mathbb{R}$, $P_X(A) = P(X \in A) = \sum_{x_k \in A} P(X = x_k)$

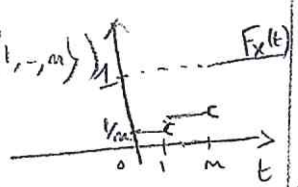
déf 3 : fonction de répartition de X : $F_X : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to [0,1] \\ t \mapsto P(X \leq t) \end{array}$

prop. 4 F_X est croissante, C^0 à droite, $\lim_{+\infty} F_X = 1$, $\lim_{-\infty} F_X = 0$

Si X discrète, F_X est constante p.p.

ex. 5 : dé à n faces : loi uniforme $\mathcal{U}(\{1, \dots, n\})$

$P(X = k) = \frac{1}{n}$, $\forall k \in \{1 \dots n\}$.



b) Espérance et moments d'une v.a. discrète :

déf. 6 : X v.a.d. admet 1 espérance si $\sum_{k \in \mathbb{N}} |x_k| P(X = x_k)$ CV

On a alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k P(X = x_k)$

ex 7 : $X \sim \mathcal{U}(\{1 - n\})$. $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$

prop 8 : L'espérance est linéaire, et vérifie $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$

Th. 9 : transfert si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq $\varphi(X)$ admet 1 espérance, alors $\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi(x_k) P(X = x_k)$

déf. 10 : si $\mathbb{E}(|X|^p) < +\infty$, $\mathbb{E}(X^p)$ est le moment d'ordre p de X

déf. 11 : si $\mathbb{E}(X^2) < \infty$, variance de X $V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$

(Konig-Huygens) $= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

c) Construction de lois usuelles à partir du pile ou face :

Description	Nom	$X(\Omega)$	$P(X=k)$	$\mathbb{E}(X)$
$\{X=1\}$: pile au lancer (succès)	Bernoulli	$\{0,1\}$	$p_1 = p$, $p_0 = 1-p$	p
$\{X=k\}$: avoir k piles en n lancers	Binomiale	$\{0, \dots, n\}$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np
$\{X=k\}$: 1^{er} succès après k lancers	Géométrique	$\mathbb{N}$	$p(1-p)^k$	$1/p$
$\{T_r = k\}$: nb lancers pour r succès	Binomiale négative	$[\![r, \dots, +\infty[\![$	$p^r (1-p)^{k-r} \times \binom{k-1}{r-1}$	

d) Inégalités.

prop 12 Markov $a \geq 0$, $X \geq 0$, $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, alors $P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$

ex. 13 : $X \sim \mathcal{B}(20, 1/4)$. alors $P(X \geq 15) \leq 1/3$

prop. 14 : Bienaymé - Chebychev : $\mathbb{E}(X^2) < \infty$, $\sigma^2 = V(X)$. Alors $\forall \varepsilon > 0$,

$P(|X - \mathbb{E}(X)| > \varepsilon) \leq \sigma^2 / \varepsilon^2$

Csq 15 : si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ v.a. i.i.d. (cf. + loin) $\sim \mathcal{B}(p)$, $p \in]0,1[$. $\forall a \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - p\right| \geq a\right) \leq \frac{1}{4a^2 n}$

II. Indépendance / Conditionnement :

a) Indépendance :

déf. 16 : $X_1, \dots, X_n$ des v.a.d sont indépendantes 2 à 2 si $\forall (i,j)$,

$\forall (x_i, x_j) \in X_i(\Omega) \times X_j(\Omega)$, $P(X_i = x_i, X_j = x_j) = P(X_i = x_i) . P(X_j = x_j)$
(On note $X_i \perp\!\!\!\perp X_j$)

Elles sont mutuellement indépendantes si $\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$,

$P(\bigcap_{i=1}^{n} X_i = x_i) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$

Ex. 17 : A évt "1er lancer de dé pair", B évt "2nd lancer de dé impair", C évt "2 lancers de même parité" : A, B, C indep 2 à 2 mais A, B, C non mutuelt indép.

Prop. 18. Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ et $E(|X|) < \infty$, $E(|Y|) < \infty$, alors $\mathbb{E}(|XY|) < \infty$ et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) . \mathbb{E}(Y)$

Prop. 19 somme de 2 v.a.i. X et Y : $Z = X + Y$

alors $P(Z = k) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} P(X = i) P(Y = k - i)$ (convolution)

App. 20 : construction loi binomiale $X_1, \dots, X_n$ v.a. iid $\sim \mathcal{B}(p)$

alors $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{B}(n, p)$

App. 21 : si $X \perp\!\!\!\perp Y$, $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$, alors $X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$

b) Conditionnement dans $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Def 22 : Soient X et Y deux VAD. Pour $y_\ell \in Y(\Omega)$ tq $P(Y = y_\ell) > 0$, on définit la loi conditionnelle de X sachant $\{Y = y_\ell\}$ par $P(X = x_k \mid Y = y_\ell) = \dfrac{P(X = x_k \text{ et } Y = y_\ell)}{P(Y = y_\ell)}$

C'est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Prop 23 : Probabilités totales

Soit $(A_i)_{i \in I}$ famille finie ou dénombrable d'événements qui forme un système complet : $\Omega = \bigsqcup_{i \in I} A_i$ tq $\mathbb{P}(A_i) > 0$ $\forall i \in I$.

Alors pour tout événement B : $P(B) = \sum_{i \in I} P(B \mid A_i) \times P(A_i)$.

App 24 : Id Wald

Si (X_n) suite IID de VAD et N VAD to $N(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et $N \perp\!\!\!\perp (X_n)$

$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ $\{S_N = k\} = \bigcup_{\ell \geq 1} \{N = \ell\} \cap \{S_N = k \mid N = \ell\}) = \bigcup_{\ell \geq 1} (\{N = \ell\} \cap \{S_\ell = k\})$

$E(S_N) = E(X) \times E(N)$.

Prop 25 : Probabilités composées

Soient $A_1, \dots, A_n$ tq $P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) > 0$ Alors on a

$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) \times P(A_2 \mid A_1) \times P(A_3 \mid A_2 \cap A_1) \times \dots \times P(A_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)$

App 26 : Relation Chapman-Kolmogorov

Soit (X_n) suite de vad. On définit les deux matrices suivantes :

$\rightarrow P = p_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(X_1 = j \mid X_0 = i)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\rightarrow P^{(k)} = p_{ij}^{(k)} = \mathbb{P}(X_{n+k} = j \mid X_n = i) = P(X_k = j \mid X_0 = i)$

Alors on a $P^{(k)} = P \times P^{(k-1)} = P^2 \times P^{(k-2)} = \dots = P^k$

App 27 : Marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}^d$ $\boxed{\text{DEV 1}}$

Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $(e_1, \dots, e_d)$ base de $\mathbb{Z}^d$.

(X_n) suite IID de VAD dans $S = \{\pm e_i ; i \in \{1..d\}\}$ | $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ | $P(X_i = e_k) = P(X_i = -e_k) = \frac{1}{2d}$

Alors

$\rightarrow$ Si $d \leq 2$, $P(S_n = 0$ une inf de fois$) = 1$

$\rightarrow$ Si $d \geq 3$, $P(\lim_{n \to \infty} |S_n| = +\infty) = 1$ ($S_n = 0$ un nb fini de fois)

III. Fonction génératrice

Def 28 : Soit X vad telle que $X(\omega) \subset \mathbb{N}$. On définit la fonction génératrice par $G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n p_n$.

Si la série converge, on a $G(t) = E(t^X)$.

Prop 29 : Propriétés de G

1) Le rayon de convergence de G est supérieur ou égal à 1

2) G est définie et continue sur $[0, 1]$, C^∞ sur $]0, 1[$

3) $G([0, 1]) \subset [0, 1]$

4) G est croissante et convexe

5) G caractérise entièrement la loi de X

$P(X = k) = \dfrac{G^{(k)}(0)}{k!}$

Prop 30 : Récupération des moments

X admet un moment d'ordre k ($k \geq 1$) ssi $G^{(k-1)}$ est dérivable à gauche en 1. On a alors

$\rightarrow G'(1) = E(X)$, $\rightarrow G^{(k)}(1) = E(X \times (X - 1) \times \dots \times (X - k + 1))$

App 31 : Théorème des moments

Soient X et Y deux VAD sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tq $\exists (a, b) \in \mathbb{N}^2$; $X(\Omega), Y(\Omega) \subset [a, b]$

Si $\forall k \in \mathbb{N}$ $E(X^k) = E(Y^k)$ Alors X et Y ont même loi.

Ex 32 : Fcts génératrices usuelles.
Soit X vad et G sa fonction génératrice. Alors on a :
- si $X \sim \mathcal{B}(p)$ $G(t) = (1-p) + pt$
- si $X \sim \mathcal{G}(p)$ $G(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t}$ $0<p<1$

Prop 33 : Somme et Fct génératrice
Soit $X, Y, Z = X+Y$ vad de fonctions génératrices resp G_X, G_Y, G_Z
Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors on a $G_Z = G_X \times G_Y$

Ex 34 Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ alors $G_X = [(1-p) + pt]^n$

prop 35 : Composition de Fct génératrices
Soit (X_i) suite IID de vad de loi décrite par G_X fonction génératrice
Soit N vad tq $N(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et $N \perp\!\!\!\perp (X_i)$ et G_N sa fct gén.
Alors on a $G_{S_N} = G_N \circ G_X$ pour $S_N(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$

App 36 : Processus de Galton-Watson **DEV2**
Soit X vad : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, $E(X) = m < +\infty$
Soit $(X_{k,n})$ famille IID de même loi que X.
On définit (Z_n) : $\begin{cases} Z_0 = 1 \\ Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} X_{k,n} \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$P_{ext} = P(\exists n \in \mathbb{N} ; Z_n = 0)$. Alors
$P(X=0) = p_0 \in]0,1[$.

si $m \geq 1$; $P_{ext} = 1$
si $m < 1$ $p_0 < P_{ext} < 1$

IV Comportement asymptotique

Déf 37 : Convergences
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X vad sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, On dit que X_n converge vers X
-> Presque sûrement : $X_n \xrightarrow{ps} X$ si $P(\omega \in \Omega ; \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)) = 1$
-> En probabilité : $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ si $\forall \varepsilon > 0$ $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$
-> En loi : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si $P(X_n = k) \to P(X=k)$
et $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff (G_{X_n}) \xrightarrow{cvs} G$ f. génératrices de X_n et X.

On a $\{X_n \xrightarrow{ps} X\} \Rightarrow \{X_n \xrightarrow{P} X\} \Rightarrow \{X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X\}$

Prop 38 : Approximation par des lois discrètes
1) On définit la loi $H(N,n,p)$ hypergéométrique : $P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \delta_k \frac{C_{Np}^{k} C_{N(1-p)}^{n-k}}{C_N^n}$
(Probabilité d'obtenir k boules noires dans un tirage de n boules sans remise dans une urne de N boules avec Np boules noires)
Soit $S = \{N \in \mathbb{N}, Np \in \mathbb{N}\}$ Alors $(H(N,n,p))_{N\in S} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{B}(n,p)$
2) Soit $\lambda > 0$. Si $(p_n) \subset]0,1[$; $p_n \times n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$ Alors
$\mathcal{B}(n,p) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$. où $\mathcal{P}$ est la loi de Poisson ; définie par $P(X=k) = \sum_{k\geq 0} e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^k}{k!} \delta_k$

T 39 : Loi des grands nombres
Soit (X_n) suite IID de var intégrables, alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{ps} E(X_1)$

T 40 : Th central limite
Soit (X_n) suite IID de var ; $E(X_1) = m < +\infty$ et $Var(X_1) = \sigma^2 < +\infty$
Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $Z_n = \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}$. Alors $Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

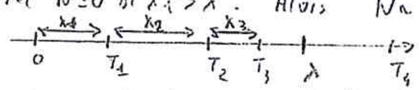
App 41 : Approximation par la loi normale (De Moivre Laplace)
- Si $X_1 \sim \mathcal{B}(p)$. Alors $\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$. ($p \approx 1/2$ $n \geq 20$)
- Si $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $\frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$. ($\lambda \geq 10$).

App 42 : Formule de Stirling avec $\mathcal{P}(\lambda)$: $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \times \left(\frac{n}{e}\right)^n$ **DEV3**

Prop 43. Intervalles de confiance : $M_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ moyenne empirique où (X_i) v.a.i.i.d $\sim \mathcal{B}(\theta)$. Alors l'intervalle de confiance de risque $\alpha > 0$ est $\left[M_n - \frac{\sigma}{2\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2}, M_n + \frac{\sigma}{2\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2}\right]$ pour θ, où $q_{1-\alpha/2} = F_X^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$
(ex : pour $\alpha = 0{,}05$, $q_{0{,}975} \approx 1{,}96$.)

prop 44. Intervalle non asymptotique (Hoeffding). $(Y_1, \dots, Y_n)$ v.a.i.d tq $a_i \leq Y_i \leq b_i$ p.s. alors $\forall \alpha > 0$, $P\left(M_n - \frac{(b-a)\sqrt{\ln(2/\alpha)}}{\sqrt{2n}} \leq \theta \leq M_n + \frac{(b-a)\sqrt{\ln(2/\alpha)}}{\sqrt{2n}}\right) \geq 1 - \alpha$

prop 45 : Lien entre $\mathcal{E}$ et $\mathcal{P}$
Soient $\lambda > 0$, (X_n) suite IID de loi $\mathcal{E}(1)$ et $N = \sup\{n \in \mathbb{N}, X_1 + \dots + X_n < \lambda\}$ avec $N = 0$ si $X_1 > \lambda$. Alors $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$. N : "nb d'arrivées pendant λ"



T_i : "instant de la $i$ème arrivée"

prop 46 : Lien entre $\mathcal{E}$ et $\mathcal{G}$: Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ alors $\lfloor X \rfloor \sim \mathcal{G}(p)$ avec $p = 1 - e^{-\lambda}$

46.264_266
55) (260)-(262)

Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$

Dym - McKean, Fourier series ...

Th: soit $d\in\mathbb{N}^*$, $(e_1,..,e_d)$ base canonique de $\mathbb{Z}^d$. Soient $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des v.a.i.i.d. à valeurs dans $S=\{\pm e_i, i\in\{1,..,d\}\}$, de loi $P(X_1=e_k)=P(X_1=-e_k)=\frac{1}{2d}\ \forall k\in\{1,..,d\}$.
Posons $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$. ALORS : * si $d\leq 2$, $P(S_n=0$ infiniment souvent$)=1$

* si $d\geq 3$, $P(\lim_{n\to+\infty}|S_n|=+\infty)=1$ (donc S_n atteint 0 un nb fini de fois)

Résultat préliminaire (admis) : $g:\ \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{\|x\|^2}$ est intégrable sur $B(0,1)$ ssi $d\geq 3$

Démo théorème : déjà, pour $s_1,..s_n\in S^n$, par indépendance, $P(X_1=s_1,..,X_n=s_n)$
$$=\prod_{i=1}^n P(X_i=s_i)=\frac{1}{(2d)^n}$$

* principe de la démo : retrouver $P(S_n=k)$, $k\in\mathbb{Z}^d$, grâce à la série de Fourier $\hookrightarrow f_n(x)=\varphi_{S_n}(2\pi x)=\mathbb{E}(e^{2i\pi x S_n})$, pour $x=(x_1..x_d)\in\mathbb{R}^d$.

par indépendance des $(X_i)_{i\leq n}$, $\varphi_{S_n}(2\pi x)=\mathbb{E}(e^{\sum_{i=1}^n 2i\pi x X_i})=\mathbb{E}(\prod_{i=1}^n e^{2i\pi x X_i})$
$$=\prod_{i=1}^n \mathbb{E}(e^{2i\pi x X_1}) \text{ car les } X_i \text{ sont i.d.}$$

Donc $\varphi_{S_n}(2\pi x)=\prod_{i=1}^n\left(\sum_{s\in S}\frac{1}{(2d)^n}e^{2i\pi x.s}\right)=\left(\sum_{s\in S}\frac{e^{2i\pi s.x}}{2d}\right)^n=\left(\sum_{j=1}^d\frac{e^{2i\pi x_j}-e^{-2i\pi x_j}}{2d}\right)^n$

$$\varphi_{S_n}(2\pi x)=\left(\sum_{j=1}^n\frac{\cos(2\pi x_j)}{d}\right)^n=\left[f(x)\right]^n \quad (\text{rq} : |f(t)|\leq 1\ \forall t\in\mathbb{R}^d)$$

* Montrons l'unicité des coeff. de Fourier de φ_{S_n} $\forall x\in\mathbb{R}^d$, $\varphi_{S_n}(2\pi x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}P(S_n=k)e^{2i\pi kx}$

pour $k\in\mathbb{Z}^d$, $C_k(f_n)=\int_{[0,1]^d}\left(\sum_{k'\in\mathbb{Z}^d}P(S_n=k')e^{2i\pi k x}\right)e^{-2i\pi kx}dx$
$$\underset{\text{Fubini-Tonelli}}{=}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\int_{[0,1]^d}P(S_n=k')e^{2i\pi x(k-k')}dx=P(S_n=k)$$

Ainsi $P(S_n=k)=C_k(f^n)$ d'où $P(S_n=0)=\int_{[0,1]^d}f(t)^n dt$

* On a $P(S_n=0)=0$ $\forall n$ impair. En effet, il faut 1 nb pair de déplacements pour revenir à l'origine...

* Soit $Y = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{S_n=0\}}$ (décompte du nb de retours en 0). Evaluons $N = \mathbb{E}(Y)$:

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{S_n=0\}}\Big] = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(S_{2n}=0) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{[0,1]^d} f(t)^{2n}\,dt \underset{(F.T)}{=} \int_{[0,1]^d} \frac{1}{1-f(t)^2}\,dt$$

Cette intégrable est définie p.p. : $f^2(t)=1$ ssi $\sum_{i=1}^d \cos(2\pi t_i) = \pm d$ ie $(t_1,\dots,t_d) = \begin{cases}(\varepsilon_1 - \varepsilon_d) \\ \text{ou} \\ (\pm\frac12,\dots,\pm\frac12)\end{cases}$ $(\varepsilon_i = 0 \text{ ou } 1)$

* Etudions l'intégrabilité de $t \to \frac{1}{1-f(t)^2}$ en $(0,\dots,0)$: (les autres points sont équivalents à $(0,\dots,0)$ par chgt de variable)

Par un DL$(0,\dots,0)$, $f(t_1 - t_d)^2 = \frac{1}{d^2}\left(\sum_{i=1}^d \cos(2\pi t_i)\right)^2$

$$= \frac{1}{d^2}\left(\sum_{i=1}^d \left(1 - \frac{4\pi^2 t_i^2}{2} + o(\|t\|^2)\right)\right)^2 = \frac{1}{d^2}\left(d - 2\pi^2\|t\|^2 + o(\|t\|^2)\right)^2$$

$$= 1 - \frac{(2\pi)^2}{d}\|t\|^2 + o(\|t\|^2).$$

Ainsi $1-f^2(t) \underset{0}{\sim} \frac{(2\pi)^2}{d}\|t\|^2$, et ils gardent le même signe.

D'après le résultat préliminaire : $t \to \frac{1}{1-f^2(t)}$ est intégrable en $(0,\dots,0)$ ssi $t \to \frac{1}{\|t\|^2}$ intégrable en 0

ie ssi $d \geq 3$

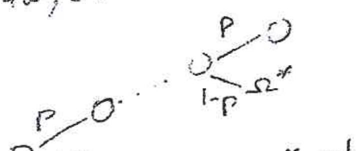
Donc $N = +\infty$ si $d \leq 2$ et $N < +\infty$ si $d \geq 3$

Conclusion : * si $d \geq 3$: $\mathbb{E}(Y)$ finie, donc on obtient facilement que $\forall R>0$,

$\mathbb{E}\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{S_n\in B(0,R)\}}\Big) < +\infty$, donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(S_n\in B) < +\infty$ d'où $P(S_n\in B) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (les $P(S_n\in B)$ sont ≥ 0)

$$P(S_n \in B \text{ i.s.}) \leq \lim_{n\to+\infty} P(S_n\in B) = 0 \text{ d'où } P(\lim_{n\to+\infty}|S_n| = +\infty) = 1$$

* si $d \leq 2$: Soit p la probabilité d'un retour en 0.



où $\Omega^* = \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$

Par indépendance, $P(m \text{ retours en } 0) = p^{m-1}(1-p)$

Par l'absurde, si $p<1$, $N = \sum_{m\in\mathbb{N}} P(m \text{ retours en } 0) = (1-p)\sum_{m\in\mathbb{N}} p^{m-1} < +\infty$ absurde

donc $p=1$. On a $\forall k\in\mathbb{N}$, $P(k \text{ visites en } 0) = 1$

d'où $P(S_n = 0 \text{ i.s.}) = 1$