

# Séries de Fourier

La référence bibliographique principale pour les séries de Fourier est le livre de Zuily et et Queffélec "Analyse pour l'agrégation".

## Partie I. Rappels de cours

### 1 Définitions et premières propriétés

Pour une fonction  $f \in L^1(0, 2\pi)$  on définit :

— les coefficients de Fourier

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n \in \mathbb{Z};$$

— la série de Fourier

$$S_f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{inx};$$

— les sommes partielles de la série de Fourier

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx}$$

— les sommes de Fejér

$$\sigma_n(f) = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_{n-1}}{n}$$

**Lemme de Riemann-Lebesgue.** Les coefficients de Fourier d'une fonction de  $L^1$  forment une suite bornée qui tend vers 0 lorsque  $|n| \rightarrow \infty$ .

La réciproque est fautive (cf. exercices).

### Produits

— Inégalité de Hölder :  $\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$  dès lors que  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ .

— Inégalité de Young, convolution : si  $f, g \in L^1$  alors la convolution  $f * g$

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t) dt.$$

est bien définie pour presque tout  $x$  et  $f * g \in L^1$ . Plus généralement, si  $1 \leq p, q, r \leq \infty$  sont tels que  $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$  et si  $f \in L^p$  et  $g \in L^q$  alors  $f * g \in L^r$  et  $\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$ .

### Divers

— L'espace  $L^2(0, 2\pi)$  est un espace de Hilbert et l'ensemble des  $e^{inx}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , forme une base hilbertienne.

— Si  $f$  est continue, périodique et  $C^1$  par morceaux, alors  $c_n(f') = inc_n(f)$ .

— Deux fonctions de  $L^1$  avec les mêmes coefficients de Fourier sont égales presque partout.

## 2 Convergence de la série de Fourier

D'abord un résultat négatif.

**Théorème.** *Pour tout  $x_0$ , il existe une fonction continue périodique  $f$  telle que la suite  $S_n(f, x_0)$  soit non bornée (par rapport à  $n$ ).*

Ainsi, au moins pour les fonctions continues et périodiques, la série de Fourier ne converge pas toujours vers la fonction considérée. Cependant, le théorème de Fejér nous dit que cette convergence a quand même lieu mais au sens de Cesàro.

**Théorème (Fejér).** a) *Si  $f$  est continue et périodique, alors  $\|\sigma_n(f)\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}$  et  $\sigma_n(f) \rightarrow f$  uniformément.*  
b) *Si  $f \in L^p$  avec  $1 \leq p < \infty$ , alors  $\|\sigma_n(f)\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}$  et  $\sigma_n(f) \rightarrow f$  dans  $L^p$ .*

Le théorème de Dirichlet nous donne un critère pour la convergence ponctuelle de la série de Fourier.

**Théorème (Dirichlet).** *Soit  $f \in L^1$  et  $x_0 \in \mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe  $f_-, f_+ \in \mathbb{C}$  tels que*

$$\int_0^1 \frac{|f(x_0+t) - f_+|}{t} dt < \infty \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{|f(x_0-t) - f_-|}{t} dt < \infty.$$

*Alors  $S_n(f, x_0) \rightarrow \frac{f_+ + f_-}{2}$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .*

En pratique,  $f_+$  et  $f_-$  sont les limites à gauche et à droite de  $f$  en  $x_0$  et la fonction  $f$  admet des dérivées à gauche et à droite en  $x_0$  (ce qui implique l'hypothèse du théorème de Dirichlet).

On peut ensuite se poser la question de la convergence de la série de Fourier dans  $L^p$  lorsque la fonction est dans  $L^p$  (ou continue si  $p = \infty$ ). Le premier théorème de ce paragraphe montre que c'est faux quand  $p = \infty$  (c'est néanmoins vrai pour les fonctions continues et  $C^1$  par morceaux, cf. théorème ci-dessous). Une légère modification de la preuve de ce théorème montre que c'est aussi faux quand  $p = 1$ . En revanche, si  $p = 2$  le résultat est vrai comme on peut le voir aisément à partir de la théorie des espaces de Hilbert et en se rappelant que les  $e^{inx}$  forment une base hilbertienne de  $L^2$ . Plus généralement, on peut montrer que c'est vrai pour tout  $1 < p < \infty$  mais le cas  $p \neq 2$  est un résultat difficile d'analyse harmonique qui sort très largement du programme de l'agrégation.

Voici maintenant d'autres résultats liés à la convergence de la série de Fourier.

**Théorème.** a) *Si  $\sum_{-N}^N \alpha_n e^{inx} \rightarrow f$  uniformément lorsque  $N \rightarrow \infty$ , alors  $f$  est continue périodique et les coefficients de Fourier de  $f$  sont les  $\alpha_n$ .*

b) *Pour tout  $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ , l'ensemble des polynômes trigonométriques à support dans  $\Lambda$  (c'est-à-dire les sommes finies  $\sum_{n \in \Lambda} a_n e^{inx}$ ) sont denses dans l'espace des fonctions continues périodiques dont les coefficients de Fourier s'annulent pour  $n \notin \Lambda$ .*

c) *Si  $f$  est continue et périodique et  $S_n(f, x_0) \rightarrow l$ , alors  $l = f(x_0)$ .*

d) *Si  $f \in L^1$  est telle que ses coefficients de Fourier forment une suite de  $\ell^1$ , alors  $f$  est somme de sa série de Fourier presque partout (et donc  $f$  est égale presque partout à une fonction continue).*

e) *Si  $f$  est  $C^1$  par morceaux, continue et périodique, alors les coefficients de Fourier forment une suite de  $\ell^1$  et  $f$  est somme de sa série de Fourier.*

L'énoncé du théorème de Weierstrass ne fait pas intervenir les séries de Fourier mais peut se démontrer aisément à l'aide des séries de Fourier :

**Théorème (Weierstrass).** *Toute fonction continue sur un intervalle compact est limite uniforme d'une suite de polynômes.*

### 3 Si on veut aller plus loin

**Phénomène de Gibbs.** Les singularités d'une fonction peuvent s'amplifier dans la série de Fourier. En effet, pour la fonction  $G(x) = \frac{\pi-x}{2}$  pour  $0 < x < 2\pi$  nous avons que les sommes de Fourier sont données par

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k}$$

et vérifient

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|G_n\|_{L^\infty} \geq \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} = 1,85 \dots > \frac{\pi}{2} = \|G\|_{L^\infty}.$$

**Régularité d'une fonction et décroissance de ses coefficients de Fourier** Il existe un lien très fort entre la régularité d'une fonction et les propriétés de décroissance de ses coefficients de Fourier. Nous savons déjà que l'appartenance d'une fonction à  $L^2$  se traduit par le fait que les coefficients de Fourier doivent être de carré sommable. Le théorème qui suit nous donne des caractérisations de type  $C^k$ . Définissons, pour  $0 < \alpha < 1$ , la classe de Hölder  $C^\alpha$  (parfois notée  $C^{0,\alpha}$ ) de la manière suivante :

$$C^\alpha = \{f \in C_{per} ; \exists C > 0, |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha \forall x, y\}.$$

**Théorème.** Soit  $f$  une fonction continue et périodique.

- Si  $f \in C^k$  alors  $\lim_{|n| \rightarrow \infty} n^k c_n(f) = 0$ .
- Si  $k \geq 2$  et  $|c_n(f)| \leq C|n|^{-k}$  pour tout  $n$ , alors  $f \in C^{k-2}$ .
- On a que  $f \in C^\infty$  si et seulement si pour tout  $k \in \mathbb{N}$  il existe une constante  $C = C(k)$  telle que  $|c_n(f)| \leq C|n|^{-k}$  pour tout  $n$ .
- Si  $f \in C^\alpha$ , alors ses coefficients de Fourier sont dans  $\ell^p$  pour tout  $p > \frac{2}{2\alpha+1}$ .
- Soit  $\omega(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| ; |x - y| \leq \delta\}$  le module de continuité de  $f$ . Si  $\omega(1/n) \ln n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ , alors la série de Fourier de  $f$  converge uniformément.
- Si  $f \in C^\alpha$  alors la série de Fourier de  $f$  converge uniformément.
- Soit  $\mathcal{P}_n = \{\sum_{-n}^n a_k e^{ikx}\}$  l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré  $\leq n$ . Nous avons que  $f \in C^\alpha$  si et seulement si  $d_\infty(f, \mathcal{P}_n) = \sup_{x, P \in \mathcal{P}_n} |f(x) - P(x)| \leq Cn^{-\alpha}$  pour une certaine constante  $C$ .

## Partie II. Exercices

### Exercice 1. (Non-surjectivité)

- a) Soit  $f$  une fonction continue périodique telle que tous ses coefficients de Fourier sont positifs. Montrer à l'aide du théorème de Fejér et du lemme de Fatou que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) < \infty.$$

En déduire que  $f$  est égale à la somme de sa série de Fourier.

- b) Soit  $f$  une fonction de  $L^1$  telle que  $c_n(f) = -c_{-n}(f) \geq 0$  pour tout  $n \geq 0$ . Montrer que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{c_n(f)}{n} < \infty$$

Indication : considérer la fonction  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

- c) Soit  $a_n = -a_{-n} = \frac{1}{\log n}$  pour  $n \geq 2$ . Montrer que les  $a_n$  ne peuvent pas être les coefficients de Fourier d'une fonction de  $L^1$ .

### Exercice 2. (Noyau de Dirichlet et non convergence de la série de Fourier) Soit

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$$

le noyau de Dirichlet.

- a) Montrer que  $D_n(x) = \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}$  et que  $S_n(f) = D_n * f$ .
- b) Montrer que si  $|x| \leq \pi$  alors  $D_n(x) = 2 \frac{\sin nx}{x} + r_n(x)$  où  $r_n$  est uniformément borné en  $x$  et  $n$ . En déduire que  $\|D_n\|_{L^1}$  est non bornée.
- c) Montrer que la norme de la forme linéaire  $f_n : C_{per}^0 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f_n = (f * D_n)(0)$  est  $\|D_n\|_{L^1}$ .
- d) Conclure à l'aide du théorème de Banach-Steinhaus qu'il existe une fonction continue et périodique dont la série de Fourier ne converge pas en 0.

### Exercice 3. (Noyau de Fejér et théorème de convergence de Fejér) Soit

$$K_n = \frac{D_0 + D_1 + \dots + D_{n-1}}{n}$$

le noyau de Fejér.

- a) Montrer que  $K_n = \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) e^{ikx} = \frac{\sin^2(nx/2)}{n \sin^2(x/2)}$ .
- b) Montrer que  $\|K_n\|_{L^1} = 1$  et  $\sigma_n(f) = K_n * f$ .
- c) Si  $0 < \delta \leq \pi$  alors  $\int_{\delta < |x| < \pi} K_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .
- d) Montrer que si  $f$  est continue et périodique alors  $\sigma_n(f) \rightarrow f$  uniformément.
- e) En utilisant un argument de densité, montrer que si  $f \in L^p$ ,  $p < \infty$ , alors  $\sigma_n(f) \rightarrow f$  dans  $L^p$ .

### Exercice 4. (Noyau de Jackson et construction d'une fonction continue nulle part dérivable) Soit

$$J_n = \frac{K_n^2}{\|K_n^2\|_{L^1}}$$

le noyau de Jackson. Soit  $(a_n)_{n \geq 1} \in \ell^1$ ,  $q > 1$  et  $\lambda_n \in \mathbb{N}^*$  tels que  $\lambda_{n+1} \geq q\lambda_n$ . On pose  $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n t}$ . Le but de cet exercice est de montrer que si  $f$  est dérivable en un point, alors  $a_n = o(1/\lambda_n)$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

- a) Montrer que  $J_n \geq 0$ , que  $\|J_n\|_{L^1} = 1$ , que  $J_n$  est un polynôme trigonométrique de degré inférieur à  $2n$  et que pour tout  $k \in \{0, 1, 2\}$  nous avons que  $\int_0^{2\pi} x^k J_n(x) = O(n^{-k})$ .
- b) Montrer qu'on peut supposer  $f$  dérivable en 0 avec  $f(0) = f'(0) = 0$ . On fera cette hypothèse dans la suite.
- c) Soit  $\mu_n = \min(\lambda_{n+1} - \lambda_n, \lambda_n - \lambda_{n-1})$ . Montrer que si  $0 < |k| < \mu_n$ , alors  $c_{\lambda_n - k}(f) = 0$ .
- d) Montrer que si  $1 \leq k < \frac{\mu_n}{2}$  alors
- $$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) J_k(t) e^{-i\lambda_n t}.$$
- e) En choisissant  $k = k_n = \left[\frac{\mu_n}{2}\right] - 1$  dans la question précédente, montrer que  $k_n a_n = o(1)$ .
- f) Conclure.
- g) Construire une fonction continue qui est nulle part dérivable.

**Exercice 5.** (Inégalité isopérimétrique) Soit  $\gamma$  une courbe que l'on supposera de longueur 1 (par souci de simplicité) et paramétrée par la longueur d'arc ( $|\gamma'| = 1$ ). Soit  $A$  l'aire enserrée par la courbe  $\gamma$ . Le but de cet exercice est de montrer que  $A \leq \frac{1}{4\pi}$  avec égalité seulement dans le cas du cercle.

- a) A l'aide la formule de Green-Riemann montrer que

$$A = \int_0^1 \gamma_1 \gamma_2' = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_0^1 \bar{\gamma} \gamma'.$$

- b) Soient  $c_n$  les coefficients de Fourier de  $\gamma$ . Montrer que

$$1 = \sum_n 4\pi^2 n^2 |c_n|^2$$

et

$$A = \sum_n \pi n |c_n|^2.$$

- c) Conclure.

**Exercice 6.** (Inégalité de Bernstein) Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  distincts et  $h(t) = \sum_{j=1}^n a_j e^{i\lambda_j t}$  où les coefficients  $a_j$  sont des nombres complexes arbitraires. Le but de cet exercice est de montrer l'inégalité suivante :

$$\|h'\|_{L^\infty} \leq \|h\|_{L^\infty} \max_j |\lambda_j|. \quad (*)$$

- a) Soit  $\lambda = \max_j |\lambda_j|$ . Montrer qu'il suffit d'avoir l'existence de suites  $c_k$  et  $t_k$  telles que

$$h' = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k h(t + t_k) \quad \text{et} \quad \sum_{-\infty}^{\infty} |c_k| = \lambda.$$

- b) Montrer que

$$h'(t) = \sum_{j=1}^n i a_j \varphi(\lambda_j) e^{i\lambda_j t}$$

où  $\varphi(x) = \lambda \varphi_0(x/\lambda)$  et  $\varphi_0$  est égale à l'identité sur  $[-1, 1]$ .

- c) On prolonge  $\varphi_0$  par  $\varphi_0(t) = 2 - t$  sur  $[1, 2]$  puis par périodicité de période 4. Montrer que la fonction  $\psi(x) = \varphi_0(x + 1)$  a tous les coefficients de Fourier positifs. Exprimer les coefficients de Fourier de  $\varphi_0$  en fonction de ceux de  $\psi$ .
- d) Montrer l'existence des suites  $c_k$  et  $t_k$  comme dans la question a).

**Exercice 7.** (Équation de la chaleur) Soit  $h$  une fonction  $C^1$  sur  $[0, \pi]$  telle que  $h(0) = h(\pi)$ . Le but de cet exercice est de montrer que le problème mixte pour l'équation de la chaleur

$$\begin{aligned} \partial_t u - \partial_x^2 u &= 0 \quad \text{pour } t > 0, 0 < x < \pi && \text{(équation de la chaleur)} \\ u(t, 0) = u(t, \pi) &= 0 \quad \text{pour } t \geq 0 && \text{(condition de Dirichlet)} \\ u(0, x) &= h(x) \quad \text{pour } 0 \leq x \leq \pi && \text{(condition de Cauchy)} \end{aligned}$$

admet exactement une solution  $u = u(t, x)$  continue pour  $t \geq 0, 0 \leq x \leq \pi$  et de classe  $C^2$  pour  $t > 0, 0 < x < \pi$ .

a) Montrer que  $h$  peut s'écrire sous la forme

$$h(x) = \sum_1^{\infty} a_n \sin nx$$

où les  $a_n$  sont des constantes et la série converge normalement.

- b) Trouver une solution  $u_n$  du problème mixte dans le cas où  $h = a_n \sin nx$  (chercher  $u_n$  de la forme  $f(t)g(x)$ ).
- c) Montrer alors que  $u = \sum_1^{\infty} u_n$  est solution du problème mixte.
- d) (Principe du maximum pour l'équation de la chaleur) Soit  $u = u(t, x)$  continue pour  $t \geq 0, 0 \leq x \leq \pi$  et de classe  $C^2$  pour  $t > 0, 0 < x < \pi$ . Montrer que si  $\partial_t u - \partial_x^2 u \leq 0$  alors le maximum de  $u$  sur le compact  $[0, T] \times [0, \pi]$  est atteint pour  $t = 0$  ou pour  $x = 0$  ou pour  $x = \pi$ .
- e) Conclure.