Corrigé du fascicule d'exercices pour l'UE Math2

Printemps 2021

V. Borrelli `<borrelli@math.univ-lyon1.fr>`

A. Frabetti `<frabetti@math.univ-lyon1.fr>`

Pour toute contribution ou modification s'addresser à U. Serres `<ulysse.serres@univ-lyon1.fr>`.

Table des matières

Prérequis (programme du cours TMB)

1. Espaces vectoriels et vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ (produits scalaire, vectoriel et mixte)
2. Applications linéaires et matrices (produit, détérminant, matrice inverse).
3. Géométrie cartesienne dans le plan et dans l'espace (droites, coniques, plans, quadriques).
4. Dérivées et intégrales des fonctions d'une variable (Taylor, extrema, primitives).
5. Équations différentielles du 1er ordre.

Programme du cours Math 2 - Partie A

Ch. 1 – Fonctions de plusieures variables

1. Coordonnées polaires, cylindriques et sphériques.
2. Ensembles ouverts, fermés, bornés et compacts.
3. Fonctions de deux ou trois variables. Graphes. Lignes de niveau.
4. Opérations entre fonctions. Composition. Changement de coordonnées.

Ch. 2 – Dérivées

1. Idée de limites et fonctions continues.
2. Dérivées partielles. Fonctions (continûment) différentiables.
3. Dériveés directionnelles.
4. Gradient.
5. Différentielle.
6. Matrice Jacobienne. Jacobien du changement de coordonnées.
7. Resumé sur les dérivées.
8. Règle de Leibniz et règle de la chaîne.
9. Dériveées partielles d'ordre supérieur. Théorème de Schwarz, matrice Hessienne.
10. Formule de Taylor.
11. Points critiques, extrema locaux et points selle.

Programme du cours Math 2 - Partie B

Ch. 3 – Intégrales multiples

1. Intégrale simple comme somme de Riemann.
2. Intégrale double. Théorème de Fubini. Changement de variables.
3. Intégrale triple. Théorème de Fubini. Changement de variables.
4. Applications : aire, volume, moyenne, centre de masse.

Ch. 4 – Champs de vecteurs

1. Lois de transformation par changement de coordonnées : fonctions et champs.
2. Champs scalaires et surfaces de niveau.
3. Champs vectoriels, repères mobiles, courbes intégrales.
4. Champs conservatifs : champs gradient, potentiel scalaire. Rotationnel, Lemme de Poincaré.
5. Champs incompressibles : champs à divergence nulle, potentiel vectoriel. Lemme de Poincaré.

Ch. 5 – Circulation et flux

1. Courbes paramétrées.
2. Circulation le long d'une courbe.
3. Surfaces paramétrées.
4. Flux à travers une surface. Théorèmes de Stokes et de Gauss.

TD 1 – COORDONNÉES ET ENSEMBLES

Exercice 1 – Changement de coordonnées des points
Dessiner les points suivants, donnés en coordonnées cartesiennes, ensuite trouver leur expression en coordonnées polaires (ρ, φ) (dans le plan) ou cylindriques (ρ, φ, z) et sphériques (r, φ, θ) (dans l'espace) :

a) Dans le plan : $(\sqrt{3}, 1)$, $(1, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, -1)$, $(-\sqrt{3}, 1)$, $(2, -2)$, $(0, 5)$, $(-3, 0)$, $(-1, -1)$.

b) Dans l'espace : $(1, 1, 1)$, $(1, 1, -1)$, $(1, -1, 1)$, $(0, 2, 1)$, $(1, -1, 0)$, $(0, 1, -1)$, $(0, 0, 3)$.

Corrigé

Exercice 2 – Expression en coordonnées cylindriques et sphériques
Exprimer les quantités suivantes en coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) et sphériques (r, φ, θ) :

a) $z(x^2 + y^2)$

b) $x(y^2 + z^2)$

c) $z\sqrt{x^2 + y^2}$

d) $(x^2 + y^2)^2 + z^4$

e) $x^2 + y^2 + z^2 - xy$

f) $\dfrac{x^2 + y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$

Corrigé

Exercice 3 – Ensembles ouverts, fermés, bornés, compacts
Dessiner les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ en précisant leur bord, et dire s'ils sont ouverts, fermés, bornés et compacts (en justifiant la réponse à partir du dessin) :

a) Dans le plan :

$$\begin{aligned}
A &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant x^2,\ y \leqslant x + 1\right\} \\
B &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant x^2\right\} \\
C &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\right\} \\
D &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2,\ y < x + 1\right\} \\
E &= \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \rho \leqslant 3,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2\right\} \\
F &= \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < \rho < 3,\ 0 < \varphi < \pi/2\right\} \\
G &= \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \rho \geqslant 3\right\}
\end{aligned}$$

b) Dans l'espace :

$$\begin{aligned}
H &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 \leqslant y \leqslant x + 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 2\right\} \\
I &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > x^2,\ z > 0\right\} \\
J &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1, z \leqslant 1 - x\right\} \\
K &= \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \rho \leqslant 3,\ 0 \leqslant z \leqslant 2\right\} \\
L &= \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \rho \leqslant 3,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2,\ z \leqslant 0\right\} \\
M &= \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid r > 3\right\} \\
N &= \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid r \leqslant 3,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2\right\}
\end{aligned}$$

Corrigé

TD 2 – FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Exercice 4 – Domaine de fonctions

Trouver le domaine des fonctions suivantes et le dessiner dans un plan ou dans l'espace :

a) $f(x,y) = \dfrac{\ln(x+y)}{e^{x+y}}$

b) $F(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2+y}}{x^2-y^2}$

c) $g(x,y,z) = \dfrac{\ln(z)}{x-y}$

d) $h(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{y}\right)$

Corrigé

Exercice 5 – Lignes de niveau et graphe

Trouver les lignes de niveau des fonctions suivantes et dessiner celles des niveaux indiqués. Ensuite, dessiner le graphe de f en remontant chaque ligne de niveau à son hauteur.

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, dessiner les lignes des niveaux 0, 1, 2, et 3.

b) $f(x,y) = x^2+4y^2$, dessiner les lignes des niveaux 0, 1, 4 et 9.

c) $f(x,y) = \dfrac{2y}{x}$ (avec $x \neq 0$), dessiner les lignes des niveaux 0, 1, 2, -1 et -2.

Corrigé

Exercice 6 – Graphe de fonctions

Trouver à quels graphes correspondent les fonctions suivantes.

a) $f(x,y) = x^2+4y^2$

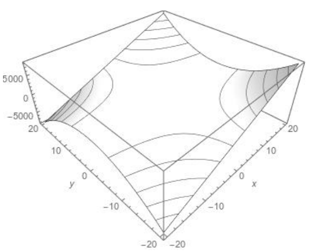
b) $f(x,y) = \frac{2y}{x}$

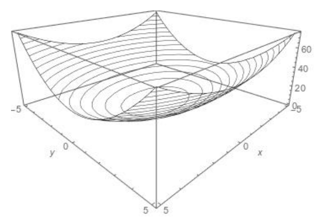
c) $f(x,y) = xy^2$

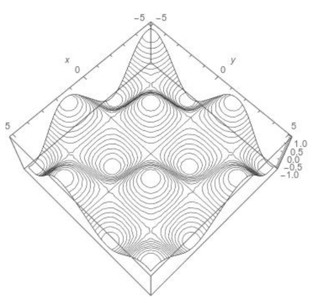
d) $f(x,y) = \sin(x)+\sin(y)$

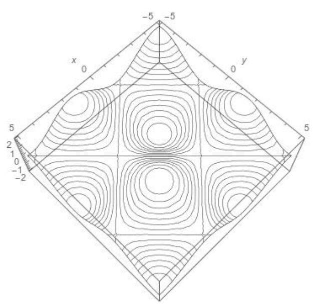
e) $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)$

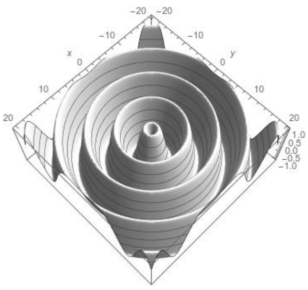
f) $f(x,y) = \sin(\sqrt{x^2+y^2})$

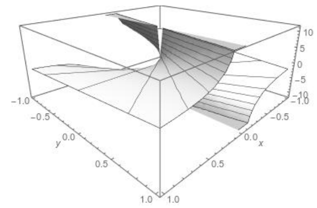
A) 

C) 

B) 

D) 

E) 

F) 

Corrigé

Exercice 7 – Composées

Calculer les possibles composées des fonctions suivantes :

$$
\begin{aligned}
&f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \\
&F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F(u,v) = \frac{u^2}{v^2} \\
&g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(z) = z^4+1 \\
&h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad h(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \\
&\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t+1, t-1)
\end{aligned}
$$

Corrigé

Exercice 8 – "Décomposées"

Exprimer les fonctions suivantes comme composées de fonctions élémentaires :

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
b) $g(x,y) = e^{\sin(xy)}$
c) $F(x,y,z) = \sin(x^2+3yz)$
d) $G(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$

Corrigé

Exercice 9 – Changement de coordonnées de fonctions

Exprimer les fonctions suivantes en coordonnées cylindriques et sphériques :

a) $f(x,y,z) = z(x^2+y^2)$
b) $g(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$
c) $h(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$
d) $F(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+z}{x^2+y^2+z^2}$
e) $G(x,y,z) = xy+z^2$
f) $H(x,y,z) = (x^2+y^2)\, e^{z^2}$

Corrigé

TD 3 – DÉRIVÉES, GRADIENT, DIFFÉRENTIELLE, JACOBIENNE

Exercice 10 – Fonctions différentiables
Pour les fonctions suivantes, calculer les dérivées partielles (où exactes s'il n'y a qu'une variable) et détérminer l'ensemble où les fonctions sont différentiables :

a) $f(x,y) = y\,\sin(xy)$
b) $g(u,v) = \left(uv^2, \frac{1}{u+v-1}\right)$
c) $h(x,y,z) = \left(x^2(y+1), xz^2, y+1\right)$
d) $\gamma(t) = \left(\sqrt{2+t}, \sqrt{2-t}\right)$
e) $G(R,T) = R^3T + R^2T^2 + RT^3$
f) $\phi(p,q) = \left(\ln(p^2q^2), \ln(p-q+1)\right)$
g) $u(\omega,t) = \left(e^{\omega t}, \sin(\omega t), \omega t\right)$
h) $F(r,\varphi,\theta) = \left(r\cos\varphi, r\sin\theta\right)$

Corrigé

a) $f(x,y) = y\sin(xy)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2\sin(xy)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin(xy) + xy\cos(xy)$$

Domaine : $D_f = \mathbb{R}^2$. Puisque les dérivées partielles sont définies et continues sur $\mathbb{R}^2$, la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

b) $g(u,v) = \left(uv^2, \frac{1}{u+v-1}\right)$

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \left(v^2, -\frac{1}{(u+v-1)^2}\right)$$
$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \left(2uv, -\frac{1}{(u+v-1)^2}\right)$$

Domaine : $D_g = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u+v-1 \neq 0\right\}$. Puisque les dérivées partielles sont définies et continues sur D_g, la fonction g est de classe C^1 sur D_g.

c) $h(x,y,z) = \left(x^2(y+1), xz^2, y+1\right)$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y,z) = \left(2x(y+1), z^2, 0\right)$$
$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y,z) = \left(x^2, 0, 1\right)$$
$$\frac{\partial h}{\partial z}(x,y,z) = \left(0, 2xz, 0\right)$$

Domaine : $D_h = \mathbb{R}^3$. Les dérivées partielles sont définies et continues sur $\mathbb{R}^3$, donc la fonction h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$.

d) $\gamma(t) = \left(\sqrt{2+t}, \sqrt{2-t}\right)$

$$\gamma'(t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2+t}}, \frac{-1}{2\sqrt{2-t}}\right).$$

Domaine : $D_\gamma = \left\{t \in \mathbb{R} \mid 2+t \geqslant 0,\ 2-t \geqslant 0\right\}$. La dérivée est définie et continue sur l'ensemble $D = \left\{t \in \mathbb{R} \mid 2+t > 0,\ 2-t > 0\right\}$, donc la fonction γ est dérivable sur D et même de classe C^1.

e) $G(R,T) = R^3T + R^2T^2 + RT^3$

$$\frac{\partial G}{\partial R}(R,T) = 3R^2T + 2RT^2 + T^3$$
$$\frac{\partial G}{\partial T}(R,T) = R^3 + 2R^2T + 3RT^2$$

Domaine : $D_G = \mathbb{R}^2$. Puisque les dérivées partielles sont définies et continues sur $\mathbb{R}^2$, la fonction G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

f) $\phi(p,q) = \big(\ln(p^2q^2), \ln(p-q+1)\big)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial p}(p,q) = \Big(\frac{2pq^2}{p^2q^2}, \frac{1}{p-q}\Big) = \Big(\frac{2}{p}, \frac{1}{p-q}\Big)$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial q}(p,q) = \Big(\frac{2p^2q}{p^2q^2}, -\frac{1}{p-q}\Big) = \Big(\frac{2}{q}, -\frac{1}{p-q}\Big)$$

Domaine :

$$\begin{aligned} D_\phi &= \Big\{(p,q) \in \mathbb{R}^2 \,|\, p^2q^2 > 0,\ p-q+1 > 0\Big\} \\ &= \Big\{(p,q) \in \mathbb{R}^2 \,|\, p \neq 0,\ q \neq 0,\ q < p+1\Big\}. \end{aligned}$$

Puisque les dérivées partielles sont définies et continues sur D_ϕ, la fonction ϕ est de classe C^1 sur D_ϕ.

g) $u(\omega,t) = \big(e^{\omega t}, \sin(\omega t), \omega t\big)$

$$\frac{\partial u}{\partial \omega}(\omega,t) = \big(te^{\omega t}, t\cos(\omega t), t\big)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(\omega,t) = \big(\omega e^{\omega t}, \omega\cos(\omega t), \omega\big)$$

Domaine : $D_u = \Big\{(\omega,t) \in \mathbb{R}^2\Big\} = \mathbb{R}^2$. Puisque les dérivées partielles sont définies et continues sur $\mathbb{R}^2$, la fonction u est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

h) $F(r,\varphi,\theta) = \big(r\cos\varphi, r\sin\theta\big)$

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r,\varphi,\theta) = \big(\cos\varphi, \sin\theta\big)$$
$$\frac{\partial F}{\partial \varphi}(r,\varphi,\theta) = \big(-r\sin\varphi, 0\big)$$
$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\varphi,\theta) = \big(0, r\cos\theta\big)$$

Domaine : $D_F = \Big\{(r,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^3\Big\} = \mathbb{R}^3$. Les dérivées partielles sont définies et continues sur $\mathbb{R}^3$ donc la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 11 – Gradient et différentielle des fonctions réelles

Pour les fonctions suivantes, ecrire le gradient et la différentielle en tout point, et puis au point indiqué :

a) $f(x,y) = y\sin(xy)$ en $\big(1, \frac{\pi}{2}\big)$

b) $G(R,T) = R^3T + R^2T^2 + RT^3$ en $(3,2)$

Corrigé

a) $f(x,y) = y\sin(xy)$

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2\cos(xy) \\ \sin(xy) + xy\cos(xy) \end{pmatrix} \qquad \vec{\nabla} f(1,\pi/2) = \begin{pmatrix} \frac{\pi^2}{4}\cos(\pi/2) \\ \sin(\pi/2) + \frac{\pi}{2}\cos(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$df_{(x,y)} = y^2\sin(xy)\ dx + \Big(\sin(xy) + xy\cos(xy)\Big)\ dy \qquad df_{(1,\pi/2)} = \frac{\pi^2}{4}\ dx + dy$$

b) $G(R,T) = R^3T + R^2T^2 + RT^3$

$$\vec{\nabla} G(R,T) = \begin{pmatrix} 3R^2T + 2RT^2 + T^3 \\ R^3 + 2R^2T + 3RT^2 \end{pmatrix} \qquad \vec{\nabla} G(3,2) = \begin{pmatrix} 3\cdot 9\cdot 2 + 2\cdot 3\cdot 4 + 8 \\ 27 + 2\cdot 9\cdot 2 + 3\cdot 3\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 86 \\ 99 \end{pmatrix}$$

$$dG_{(R,T)} = \Big(3R^2T + 2RT^2 + T^3\Big)\ dR + \Big(R^3 + 2R^2T + 3RT^2\Big)\ dT \qquad dG_{(3,2)} = 86\ dR + 99\ dT$$

Exercice 12 – Dérivée directionelle

Pour les fonctions suivantes, trouver la dérivée directionelle dans la direction du vecteur donné :

a) $f(x,y) = y\ln(xy)$ dans la direction de $\vec{v} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$

b) $g(x,y,z) = x\,e^{yz}$ dans la direction de $\vec{v} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$.

Corrigé

Exercice 13 – Matrice Jacobienne des fonctions vectorielles

Pour les fonctions vectorielles suivantes, calculer la matrice Jacobienne et, si possible, le déterminant Jacobien en tout point, et puis au point indiqué :

a) $g(u,v) = \Big(uv^2, \frac{1}{u+v-1}\Big)$ en $(1,1)$

b) $h(x,y,z) = \Big(x^2(y+1), xz^2, y+1\Big)$ en $(1,0,1)$

c) $\phi(p,q) = \big(\ln(p^2q^2), \ln(p-q+1)\big)$ en $(1,1)$

d) $u(\omega,t) = \big(e^{\omega t}, \sin(\omega t), \omega t\big)$ en $(\pi,1)$

e) $F(r,\varphi,\theta) = \big(r\cos\varphi, r\sin\theta\big)$ en $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

Corrigé

a) $$g(u,v) = \begin{pmatrix} uv^2 \\ \frac{1}{u+v-1} \end{pmatrix} \implies J_g(u,v) = \begin{pmatrix} v^2 & 2uv \\ -\frac{1}{(u+v-1)^2} & -\frac{1}{(u+v-1)^2} \end{pmatrix} \qquad J_g(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det J_g(u,v) = -\frac{v^2}{(u+v-1)^2} + \frac{2uv}{(u+v-1)^2} = \frac{2uv-v^2}{(u+v-1)^2} \qquad \det J_g(1,1) = 1$$

b) $$h(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2(y+1) \\ xz^2 \\ y+1 \end{pmatrix} \implies J_h(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x(y+1) & x^2 & 0 \\ z^2 & 0 & 2xz \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_h(1,0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det J_h(x,y,z) = -4x^2(y+1)z \qquad \det J_h(1,0,1) = -4$$

c) $$\phi(p,q) = \begin{pmatrix} \ln(p^2q^2) \\ \ln(p-q+1) \end{pmatrix} \implies J_\phi(p,q) = \begin{pmatrix} \frac{2}{p} & \frac{2}{q} \\ \frac{1}{p-q+1} & -\frac{1}{p-q+1} \end{pmatrix} \qquad J_\phi(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det J_\phi(p,q) = -\frac{2}{p(p-q+1)} - \frac{2}{q(p-q+1)} = -\frac{2(p+q)}{pq(p-q+1)} \qquad \det J_\phi(1,1) = -4$$

d) $$u(\omega,t) = \begin{pmatrix} e^{\omega t} \\ \sin(\omega t) \\ \omega t \end{pmatrix} \implies J_u(\omega,t) = \begin{pmatrix} te^{\omega t} & \omega e^{\omega t} \\ t\cos(\omega t) & \omega\cos(\omega t) \\ t & \omega \end{pmatrix} \qquad J_u(\pi,1) = \begin{pmatrix} e^\pi & \pi e^\pi \\ -1 & -\pi \\ 1 & \pi \end{pmatrix}$$

e) $$F(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \implies J_F(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$J_F(\sqrt{2},\pi/4,\pi/4) = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sqrt{2}\sin(\pi/4) & 0 \\ \sin(\pi/4) & 0 & \sqrt{2}\cos(\pi/4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -1 & \\ \sqrt{2}/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 14 – Dérivée directionelle

Un randonneur se promène sur une montagne qui ressemble au graphe de la fonction $f(x,y) = xy^2$, dans un voisinage du point $(2,1)$. Il arrive au point $(2,1,2) = (2,1,f(2,1))$ de la montagne depuis la direction $\vec{d} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$, et là demarrent trois chemins de direction

$$\vec{u} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath}, \quad \vec{v} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} \quad \text{et} \quad \vec{w} = \vec{\jmath} - \vec{\imath}.$$

a) Quel chemin doit-il prendre pour <u>monter</u> la pente le plus <u>doucement</u> possible ?

b) Quelle est la direction où il faudrait réaliser un nouveau chemin qui <u>monterait</u> la pente le plus <u>rapidement</u> possible ?

c) Au retour, en passant par le même point, quel chemin doit-il prendre, parmi les quatre existant, pour <u>descendre</u> la pente le plus <u>rapidement</u> possible ?

Corrigé

Pour resoudre cet exercice il faut utiliser la signification des dérivées directionelles de f, analogue à celle de la dérivée d'une fonction d'une seule variable : la dérivée $\partial_{\vec{v}} f(x,y)$ indique la croissance de la fonction f au point (x,y) dans la direction $\vec{v}$. Attention : si $\vec{v}$ n'est pas un vecteur de norme 1, la "direction" de $\vec{v}$ est donnée par le vecteur unitaire $\vec{v}/||\vec{v}||$.
Il faut aussi savoir que le gradient de f en (x,y) indique la direction de plus forte croissance de f en (x,y).

a) Pour monter le plus doucement possible il faut choisir le chemin dans la direction qui donne la dérivée directionelle de f au point $(2,1)$ qui soit positive et plus petite possible.

Puisque les vecteurs indiqués ne sont pas unitaires, calculons les vecteurs unitaires associés :

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} = (1,-2) &\implies& \quad \vec{U} = \frac{\vec{u}}{||\vec{u}||} = \frac{1}{\sqrt{1+4}}\,(1,-2) = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(1,-2),\\
\vec{v} &= \vec{\imath} + \vec{\jmath} = (1,1) &\implies& \quad \vec{V} = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} = \frac{1}{\sqrt{1+1}}\,(1,1) = \frac{1}{\sqrt{1}}\,(1,1),\\
\vec{w} &= \vec{\jmath} - \vec{\imath} = (-1,1) &\implies& \quad \vec{W} = \frac{\vec{w}}{||\vec{w}||} = \frac{1}{\sqrt{1+1}}\,(-1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(-1,1).
\end{aligned}$$

Pour calculer les dérivées directionelles on utilise le gradient de f en $(2,1)$:

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad \vec{\nabla} f(2,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Les dérivées directionelles de f dans les directions de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, au point $(2,1)$, sont donc

$$\begin{aligned}
\partial_{\vec{U}} f(2,1) &= \vec{\nabla} f(2,1)\cdot\vec{U} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(1-8) = -\frac{7}{\sqrt{5}},\\
\partial_{\vec{V}} f(2,1) &= \vec{\nabla} f(2,1)\cdot\vec{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1+4) = \frac{5}{\sqrt{2}},\\
\partial_{\vec{W}} f(2,1) &= \vec{\nabla} f(2,1)\cdot\vec{W} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(-1+4) = \frac{3}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

La direction de plus douce croissance est donc celle de $\vec{w}$.

b) La direction de plus forte croissance en $(2,1)$ est celle de $\vec{\nabla} f(2,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$.

c) Pour descendre le plus rapidement possible il faut choisir le chemin dans la direction qui donne la dérivée directionelle de f au point $(2,1)$ qui soit négative et plus grande possible en valeur absolue. On a

$$\vec{d} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} = (2,-1) \quad\implies\quad \vec{D} = \frac{\vec{d}}{||\vec{d}||} = \frac{1}{\sqrt{1+4}}\,(2,-1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(2,-1),$$

donc

$$\partial_{\vec{D}} f(2,1) = \vec{\nabla} f(2,1)\cdot\vec{D} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(2-4) = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

La direction de plus forte descente est donc celle de $\vec{u}$.

TD 4 – DÉRIVÉES DES FONCTIONS COMPOSÉES

Exercice 15 – Règle de la chaine
Soient $x = x(t)$ et $y = y(t)$ deux fonctions dérivables en tout $t \in \mathbb{R}$. Trouver la dérivée par rapport à t de

a) $f(x,y) = x^2 + 3xy + 5y^2$ b) $g(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ c) $h(x,y) = \left(\dfrac{x}{x+y}, \dfrac{y}{x-y}\right)$

Corrigé

a) Pour $f(x,y) = x^2 + 3xy + 5y^2$, appellons $\tilde{f}(t) = f(x(t), y(t))$, alors :

$$\tilde{f}'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\ x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\ y'(t) = \big(2x(t) + 3y(t)\big)\ x'(t) + \big(3x(t) + 10y(t)\big)\ y'(t).$$

Exercice 16 – Règle de la chaine
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$, de variables (x,y). Trouver la dérivée de f par rapport à t quand

a) $x = \sin t$ et $y = \cos t$ b) $x = e^{-t}$ et $y = e^t$

Corrigé

a) Pour $x = \sin t$ et $y = \cos t$, appellons $\tilde{f}(t) = f(\sin t, \cos t)$, alors :

$$\tilde{f}'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\ x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\ y'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\sin t, \cos t)\ \cos t - \frac{\partial f}{\partial y}(\sin t, \cos t)\ \sin t.$$

Exercice 17 – Règle de la chaine
Soit f une fonction de plusieurs variables à valeur réelle, de classe C^1. Calculer les dérivées partielles de la fonction g en fonction des dérivées partielles de f, dans les cas suivants :

a) $g(x,y,z) = f(x^2 + 3yz, y^2 - z^2)$
b) $g(x,y,z) = \big(f(x^2 + 3yz, y^2 - z^2)\big)^2$
c) $g(x,y,z) = \ln\big(f(x^2 + 3yz, y^2 - z^2)\big)$
d) $g(x,y) = f(\sin x, \sin y, xy^2)$
e) $g(x,y) = \ln\big(f(\sin x, \sin y, xy^2)\big)$
f) $g(x,y) = e^{f(\sin x, \sin y, xy^2)}$

Corrigé

Exercice 18 – Règle de la chaine
Soit $z(x) = f(x, y(x))$, où $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et $y = y(x)$ est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée $z'(x)$ en fonction des dérivées partielles de f et de la dérivée de y par rapport à x.

Appliquer la formule trouvée aux cas particuliers suivants (tous indépendants) :

a) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 4y^2$
b) $f(x,y) = xy^2 + x^2y$
c) $y = e^{3x}$
d) $y = \ln x$

Corrigé

a) Si $f(x,y) = x^2 + 2xy + 4y^2$ et $z(x) = f(x, y(x))$ on a :

$$z'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x))\ x'(x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))\ y'(x) = 2x + 2y(x) + \big(2x + 8y(x)\big)\ y'(x).$$

c) Si $y(x) = e^{3x}$ et $z(x) = f(x, y(x)) = f(x, e^{3x})$ on a :

$$z'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x))\ x'(x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))\ y'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, e^{3x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, e^{3x})\ 3e^{3x}.$$

Remarque : a) + c) [cas non demandé] Si $f(x,y) = x^2 + 2xy + 4y^2$ et $y(x) = e^{3x}$, alors

$$z'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x))\ x'(x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))\ y'(x) = 2x + 2e^{3x} + \big(2x + 8e^{3x}\big)\ 3e^{3x}.$$

Exercice 19 – Règle de la chaine
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction avec dérivées partielles

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{2x}{y-1} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -\frac{x^2}{(y-1)^2}.$$

a) Calculer les dérivées partielles de la fonction $F(u,v) = f(2u - v, u - 2v)$.
b) Calculer la dérivée de la fonction $G(t) = f(t+1, t^2)$.

Corrigé

a) On a $F = f \circ h$, où $h(u,v) = (2u - v, u - 2v)$, c'est-à dire qu'on pose

$$x(u,v) = 2u - v \qquad \text{et} \qquad y(u,v) = u - 2v.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(u,v)}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}(2u - v, u - 2v)\ \frac{\partial(2u-v)}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}(2u - v, u - 2v)\ \frac{\partial(u-2v)}{\partial u} \\
&= \frac{2\ (2u-v)}{u-2v-1}\ 2 - \frac{(2u-v)^2}{(u-2v-1)^2} \\
&= \frac{4(2u-v)(u-2v-1) - (2u-v)^2}{(u-2v-1)^2} \\
&= \frac{(2u-v)(4u-8v-4-2u+v)}{(u-2v-1)^2} \\
&= \frac{(2u-v)(2u-7v-4)}{(u-2v-1)^2}
\end{aligned}$$

et également

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(u,v)}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}(2u-v,u-2v)\ \frac{\partial(2u-v)}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}(2u-v,u-2v)\ \frac{\partial(u-2v)}{\partial v}\\
&= -\frac{2\ (2u-v)}{u-2v-1} + \frac{2(2u-v)^2}{(u-2v-1)^2}\\
&= \frac{-2(2u-v)(u-2v-1)+2(2u-v)^2}{(u-2v-1)^2}\\
&= \frac{2(2u-v)(-u+2v+1+2u-v)}{(u-2v-1)^2}\\
&= \frac{2(2u-v)(u+v+1)}{(u-2v-1)^2}
\end{aligned}$$

b) On a $G = f\circ\gamma$ où $\gamma(t) = (t+1,t^2)$, c'est-à-dire qu'on pose

$$x(t) = t+1 \qquad \text{et} \qquad y(t) = t^1.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
G'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(t+1,t^2\big)\ \frac{d\,t+1}{d\,t} + \frac{\partial f}{\partial y}\big(t+1,t^2\big)\ \frac{d\,t^2}{d\,t}\\
&= \frac{2(t+1)}{t^2-1} - \frac{(t+1)^2\ 2t}{(t^2-1)^2}\\
&= \frac{2}{t-1} - \frac{2t}{(t-1)^2}\\
&= -\frac{2}{(t-1)^2}
\end{aligned}$$

Exercice 20 – Différentielle de fonctions composées [Facultatif]

Soit $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$, et posons

a) $g(x,y) = f(x^2-y^2,2xy)$

b) $g(x,y,z) = f(2x-yz,xy-3z)$

Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f, et écrire la différentielle de g.

Corrigé

a) Si $g(x,y) = f(x^2-y^2,2xy)$, appellons (u,v) les variables de f, avec $u = x^2-y^2$ et $v = 2xy$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}(x^2-y^2,2xy)\ \frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}(x^2-y^2,2xy)\ \frac{\partial(2xy)}{\partial x}\\
&= 2x\frac{\partial f}{\partial u}(x^2-y^2,2xy) + 2y\frac{\partial f}{\partial v}(x^2-y^2,2xy)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}(x^2-y^2,2xy)\ \frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}(x^2-y^2,2xy)\ \frac{\partial(2xy)}{\partial y}\\
&= -2y\frac{\partial f}{\partial u}(x^2-y^2,2xy) + 2x\frac{\partial f}{\partial v}(x^2-y^2,2xy)
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
dg_{(x,y)} &= \frac{\partial g}{\partial x}\ dx + \frac{\partial g}{\partial y}\ dy \\
&= \Big(2x\frac{\partial f}{\partial u}(x^2-y^2,2xy) + 2y\frac{\partial f}{\partial v}(x^2-y^2,2xy)\Big)\ dx \\
&\qquad + \Big(-2y\frac{\partial f}{\partial u}(x^2-y^2,2xy) + 2x\frac{\partial f}{\partial v}(x^2-y^2,2xy)\Big)\ dy.
\end{aligned}$$

Exercice 21 – Jacobienne de fonctions composées [Facultatif]
Soit $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$, et posons

a) $g(x,y) = h(x^2-y^2, 2xy)$

b) $g(x,y,z) = h(2x-yz, xy-3z)$

Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de h, et écrire la matrice Jacobienne de g.

Corrigé

a) Pour $x = \sin t$ et $y = \cos t$, appellons $\tilde{f}(t) = f(\sin t, \cos t)$, alors :

$$\tilde{f}'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))\ x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\ y'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\sin t,\cos t)\ \cos t - \frac{\partial f}{\partial y}(\sin t,\cos t)\ \sin t.$$

Exercice 22 – Jacobienne de fonctions composées
Soient $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ les deux fonctions définies par

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= (x\,e^y, y\,e^x) \\
G(u,v) &= (u+v, u-v).
\end{aligned}$$

Calculer les matrices Jacobiennes de F, de G et des deux fonctions composées $f = G \circ F$ et $g = F \circ G$. Comparer les matrices Jacobiennes de f et de g au produit des matrices Jacobiennes de F et de G.

Corrigé

Exercice 23 – Jacobienne de fonctions composées [Facultatif]
Soient $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ deux fonction différentiables sur $\mathbb{R}^2$, dont on connait les matrices Jacobiennes

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ 2x+1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad J_G(u,v) = \begin{pmatrix} -2u & 2v \\ 3u^2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer la matrice Jacobienne et le détérminant Jacobien des fonctions composées $f(x,y) = G(F(x,y))$ et $g(u,v) = F(G(u,v))$.

Corrigé

Si $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est fonction des variables (x,y) et $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est fonction des variables (u,v), on a que :

- la composée $G \circ F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est fonction des variables (x, y) et on a $(u, v) = F(x, y)$, c'est-à-dire que u et v sont des fonctions de (x, y), autrement dit : $u = u(x, y)$ et $v = v(x, y)$;
- la composée $F \circ G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est fonction des variables (u, v) et on a $(x, y) = G(u, v)$, c'est-à-dire que x et y sont des fonctions de (u, v), autrement dit : $x = x(u, v)$ et $y = y(u, v)$.

Les Jacobiens des fonctions composées sont donc

$$\begin{aligned}
J_{G\circ F}(x,y) &= J_G\big(F(x,y)\big)\ J_F(x,y) = \begin{pmatrix} -2u & 2v \\ 3u^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ 2x+1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2uy^2 + 2v(2x+1) & -4uxy + 2v \\ 3u^2y^2 + 2xy & 6u^2xy + 1 \end{pmatrix} \qquad \text{où } u = u(x,y) \text{ et } v = v(x,y); \\
J_{F\circ G}(u,v) &= J_F\big(G(u,v)\big)\ J_G(u,v) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ 2x+1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2u & 2v \\ 3u^2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2y^2u + 6xyu^2 & 2y^2v + 2xy \\ -2(2x+1)u + 3u^2 & 2(2x+1)v + 1 \end{pmatrix} \qquad \text{où } x = x(u,v) \text{ et } y = y(u,v).
\end{aligned}$$

TD 5 – HESSIENNE, TAYLOR, EXTREMA LOCAUX

Exercice 24 – Matrice Hessienne
Calculer la matrice Hessienne et le détérminant Hessien des fonctions suivantes, en tout point et puis au point indiqué :

a) $f(x,y) = x^3y + x^2y^2 + xy^3$ en $(1,-1)$

b) $g(\varphi,\theta) = \varphi\sin\theta - \theta\sin\varphi$ en $(0,\frac{\pi}{2})$

c) $h(x,y,z) = xy^2 + yz^2$ en $(0,1,2)$

d) $F(u,v) = \dfrac{u^2-v^2}{u^2+v^2}$ en $(1,1)$

Corrigé

a) Pour $f(x,y) = x^3y + x^2y^2 + xy^3$, on a $\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2y + 2xy^2 + y^3 \\ x^3 + 2x^2y + 3xy^2 \end{pmatrix}$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy + 2y^2 & 3x^2 + 4xy + 3y^2 \\ 3x^2 + 4xy + 3y^2 & 2x^2 + 6xy \end{pmatrix} \qquad H_f(1,-1) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\det H_f(x,y) = 4xy(3x+y)(3y+x) - (3x^2+4xy+3y^2)^2 \qquad \det H_f(1,-1) = 16 - 4 = 12.$$

b) Pour $g(\varphi,\theta) = \varphi\sin\theta - \theta\sin\varphi$, on a $\vec{\nabla} g(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \sin\theta - \theta\cos\varphi \\ \varphi\cos\theta - \sin\varphi \end{pmatrix}$

$$H_g(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \theta\sin\varphi & \cos\theta - \cos\varphi \\ \cos\theta - \cos\varphi & -\varphi\sin\theta \end{pmatrix} \qquad H_g(0,\tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det H_g(\varphi,\theta) = -\varphi\theta\sin\varphi\sin\theta - (\cos\theta - \cos\varphi)^2 \qquad \det H_g(0,\tfrac{\pi}{2}) = -(-1)^2 = -1.$$

c) Pour $h(x,y,z) = xy^2 + yz^2$ on a $\vec{\nabla} h(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy + z^2 \\ 2yz \end{pmatrix}$

$$H_h(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 2y & 0 \\ 2y & 2x & 2z \\ 0 & 2z & 2y \end{pmatrix} \qquad H_h(0,1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det H_h(x,y,z) = -2y \det \begin{pmatrix} 2y & 2z \\ 0 & 2y \end{pmatrix} = n - 2y(2y)^2 = -8y^3 \qquad \det H_h(0,1,2) = -8.$$

d) Pour $F(u,v) = \dfrac{u^2-v^2}{u^2+v^2}$ on a $\vec{\nabla} F(u,v) = \dfrac{4}{(u^2+v^2)^2} \begin{pmatrix} uv^2 \\ -u^2v \end{pmatrix}$

$$H_F(u,v) = \frac{4}{(u^2+v^2)^3} \begin{pmatrix} v^2(v^2-3u^2) & 2uv(u^2-v^2) \\ 2uv(u^2-v^2) & u^2(3v^2-u^2) \end{pmatrix} \qquad H_F(1,1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det H_F(u,v) = \frac{16}{(u^2+v^2)^6}\Big(u^2v^2(v^2-3u^2)(3v^2-u^2) - 4u^2v^2(u^2-v^2)^2\Big) \qquad \det H_F(1,1) = -1.$$

Exercice 25 – Laplacien
Calculer le Laplacien des fonctions de l'Exercice 24 en tout point, puis au point indiqué.

Corrigé

a) $\Delta f(x,y) = 6xy + 2y^2 + 2x^2 + 6xy = 2x^2 + 12xy + 2y^2$ et $\Delta f(1,-1) = -8$.
b) $\Delta g(\varphi,\theta) = \theta \sin\varphi - \varphi \sin\theta$ et $\Delta g(0,\frac{\pi}{2}) = 0$.
c) $\Delta h(x,y,z) = 2x + 2y$ et $\Delta h(0,1,2) = 2$.
d) $\Delta F(u,v) = v^2(v^2 - 3u^2) + u^2(3v^2 - u^2) = v^4 - u^4$ et $\Delta F(1,1) = 0$.

Exercice 26 – Fonctions harmoniques
Trouver les valeurs de $c \in \mathbb{R}^*$ pour lesquels la fonction $u(x,y,t) = x^2 + y^2 - c^2t^2$ est harmonique.

Corrigé

La fonction u est de classe C^2 sur tout $\mathbb{R}^3$, car c'est un polynôme. Alors, il faut trouver $c \in \mathbb{R}^*$ tel que $\Delta u(x,y,t) = 0$ pour tout $(x,y,t) \in \mathbb{R}^3$. Calculons :

$$\vec{\nabla} u(x,y,t) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2c^2t \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta u(x,y,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2 + 2 - 2c^2 = 4 - 2c^2.$$

Alors u est harmonique si $\Delta u(x,y,t) = 2(2-c^2) = 0$, c'est-à-dire si $c = \pm\sqrt{2}$.

Exercice 27 – Laplacien
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et posons $F(x,y) = f(x-2y)$.

a) Calculer le Laplacien de F en (x,y), c'est-à-dire la valeur $\Delta F(x,y) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)$.
b) Déterminer toutes les fonctions f telles que $\Delta F(x,y) = 25(x-2y)^4$.

Corrigé

a) Calculons d'abord les dérivées partielles de F :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f'(x-2y)\frac{\partial(x-2y)}{\partial x} = f'(x-2y)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = f'(x-2y)\frac{\partial(x-2y)}{\partial y} = -2f'(x-2y).$$

Ensuite les dérivées doubles :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) &= ddpx\big(f'(x-2y)\big) \\ &= f''(x-2y)\frac{\partial(x-2y)}{\partial x} = f''(x-2y) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) &= -2ddpy\big(f'(x-2y)\big) \\ &= -2f''(x-2y)\frac{\partial(x-2y)}{\partial y} = (-2)^2 f''(x-2y) = 4f''(x-2y).\end{aligned}$$

En conclusion : $\Delta f(x,y) = 5f''(x-2y)$.

b) On cherche les fonctions f pour lesquelles on a $5f''(x-2y) = 25(x-2y)^4$ pour toute $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Si on pose $z = x-2y$, on a

$$\begin{aligned} f''(z) = 25z^4 \quad &\iff \quad f'(z) = \int 5z^4\,dz = z^5 + a, \qquad a \in \mathbb{R} \\ &\iff \quad f(z) = \int (z^5 + a)\,dz = \frac{1}{6}z^6 + az + b, \qquad a,b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Conclusion : $\Delta F(x,y) = 25(x-2y)^4 \iff f(z) = \frac{1}{6}z^6 + az + b$ pour tout $a,b \in \mathbb{R}$.

Exercice 28 – Formule de Taylor

Donner la partie principale du développement de Taylor à l'ordre 2 des fonctions suivantes, autour du point indiqué :

a) $f(x,y) = \dfrac{\cos x}{\cos y}$ autour de $(0,0)$

b) $g(x,y) = \ln(xy^2+1)$ autour de $(1,1)$ et puis de $(1,-1)$

c) $h(x,y) = e^{x+3xy+y^2}$ autour de $(0,0)$ et puis de $(1,1)$

d) $u(x,y,z) = 3 + z\,\sin(\pi/2 + x + y^2)$ autour de $(0,0,0)$

Corrigé

a) $f(x,y) = \dfrac{\cos x}{\cos y}$ $\qquad f(0,0) = 1$

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sin x}{\cos y} \\ \dfrac{\cos x \sin y}{\cos^2 y} \end{pmatrix} \qquad \vec{\nabla} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\cos x}{\cos y} & -\dfrac{\sin x \sin y}{\cos^2 y} \\ -\dfrac{\sin x \sin y}{\cos^2 y} & \dfrac{\cos x(1+\sin^2 y)}{\cos^3 y} \end{pmatrix} \qquad H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc, pour tout (x,y) proche de $(0,0)$ on a : $\dfrac{\cos x}{\cos y} = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}y^2 + o(x^2+y^2)$.

b) $g(x,y) = \ln(xy^2+1)$ $\qquad g(1,1) = \ln 2$ et $g(1,-1) = \ln 2$.

$$\vec{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{y^2}{xy^2+1} \\ \dfrac{2xy}{xy^2+1} \end{pmatrix} \qquad \vec{\nabla} g(1,1) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} g(1,-1) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$H_g(x,y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{y^4}{(xy^2+1)^2} & \dfrac{2y}{(xy^2+1)^2} \\ \dfrac{2y}{(xy^2+1)^2} & \dfrac{2x(1-xy^2)}{(xy^2+1)^3} \end{pmatrix} \quad H_g(1,1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } H_g(1,-1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc, pour tout (x,y) proche de $(1,1)$ on a :

$$\ln(xy^2+1) = \ln 2 + \frac{1}{2}(x-1) + (y-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)(y-1) + o((x-1)^2 + (y-1)^2),$$

et pour tout (x,y) proche de $(1,-1)$ on a :

$$\ln(xy^2+1) = \ln 2 + \frac{1}{2}(x-1) - (y+1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 - \frac{1}{2}(x-1)(y+1) + o((x-1)^2 + (y+1)^2).$$

c) $h(x,y) = e^{x+3xy+y^2}$ autour de $(0,0)$ et puis de $(1,1)$

d) $u(x,y,z) = 3 + z\,\sin(\pi/2 + x + y^2)$ autour de $(0,0,0)$

Exercice 29 – Approximation

La puissance utilisée dans une résistance électrique est donnée par $P = E^2/R$ (en watts), où E est la différence de potentiel électrique (en volt) et R est la résistance (en ohm). Si $E = 200$ volt et $R = 8$ ohm, quelle est la modification de la puissance si E decroît de 5 volt et R de 0.2 ohm ? Comparer les résultats obtenus par le calcul exact avec l'approximation fournie par la différentielle de $P = P(E,R)$.

Corrigé

Pour la fonction $P(E,R) = \dfrac{E^2}{R}$, posons :

$$\begin{aligned} &E_0 = 200, \quad R_0 = 8, \quad P_0 = E_0^2/R_0 = 200^2/8 = 5000, \\ &E = E_0 + \delta E \quad \text{et} \quad R = R_0 + \delta R, \qquad \text{avec} \quad \delta E = -5 \quad \text{et} \quad \delta R = -0,2. \end{aligned}$$

Le calcul exact de $P - P_0$ donne :

$$P - P_0 = \frac{(E-0+\delta E)^2}{R_0 + \delta R)} - P_0 = \frac{195^2}{7,8} - 5000 = -125.$$

La formule de Taylor de la fonction $P(E,R)$ au premier ordre, au point (E_0,R_0), donne :

$$\begin{aligned} P - P_0 &= dP_{(E_0,R_0)}(\delta E, \delta R) + o(\delta E, \delta R) \\ &\simeq \frac{\partial P}{\partial E}(E_0,R_0)\,\delta E + \frac{\partial P}{\partial R}(E_0,R_0)\,\delta E = \frac{2E_0}{R_0}\,\delta E - \frac{E_0^2}{R_0^2}\,\delta R \\ &= \frac{2\cdot 200}{8}\,(-5) - \frac{200^2}{8^2}\,(-0,2) = -250 + 125 = -125. \end{aligned}$$

Remarque : les deux calculs donnent *exactement* le même résultat, mais ce n'est que par chance ! En effet, dans la formule de Taylor, le reste $o(\delta E, \delta R)$ est négligeable (tend vers zéro) seulement <u>dans la limite $(\delta E, \delta R) \to (0,0)$</u> et <u>non quand δE et δR sont fixés</u> (même si petits à notre goût). Si on n'utilise pas une formule explicite (intégrale) pour estimer la grandeur de ce reste, les valeurs de $P - P_0$ et de $dP_{(E_0,R_0)}(\delta E, \delta R)$ peuvent être en réalité très différents !

Pour être "mathématiquement" corrects, il faudrait utiliser la formule de Taylor uniquement pour estimer l'**erreur relative** $\left|\dfrac{P-P_0}{P_0}\right|$ en fonction des erreurs relatives $\left|\dfrac{E-E_0}{E_0}\right|$ et $\left|\dfrac{R-R_0}{R_0}\right|$, comme dans l'exemple de cours.

Exercice 30 – Rappel : extrema locaux de fonctions d'une variable réelle [Facultatif]

Pour la fonction réelle

$$f(x) = \ln(2 - 2x^2 + x^4),$$

trouver le domaine de définition et les points critiques. Ensuite déteminer le signe de f'' dans les points critiques : la fonction admet-elle des extrema locaux ?

Corrigé

Exercice 31 – Points critiques et extrema
Pour chacune des fonctions suivantes, trouver et étudier les points critiques. La fonction admet-elle des extrema locaux ?

a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$

b) $g(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$

c) $h(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$

d) $F(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^3$

e) $G(x,y) = \ln(2 + x^2 - 2xy + 6y^2)$

f) $H(x,y) = \dfrac{1}{1 + x^2 - 2x + 2y^2}$

Corrigé

a) Cherchons les points critiques de la fonction $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$, de domaine $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+2y+2 \\ x+2y+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y = -2x-2 \\ -3x-1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1/3 \\ y = -4/3 \end{cases}.$$

La fonction f a donc un seul point critique $(-1/3, -4/3)$. Est-il un extremum local ?

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad \det H_f(-1/3,-4/3) = 4 - 1 = 3 > 0.$$

donc le point critique est un extremum local.
Puisque $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1/3,-4/3) = 2 > 0$, il s'agit d'un minimum local.

b) Cherchons les points critiques de la fonction $g(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$, de domaine $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x-y) + 3(x+y)^2 \\ -2(x-y) + 3(x+y)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2(x-y) = 3(x+y)^2 \\ 4(x-y) = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = y \\ x+y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

La fonction g a donc un seul point critique $(0,0)$. Est-il un extremum local ?

$$H_g(x,y) = \begin{pmatrix} 2+6(x+y) & -2+6(x+y) \\ -2+6(x+y) & 2+6(x+y) \end{pmatrix} \qquad \det H_g(0,0) = \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 4-4 = 0.$$

donc le point critique est un point plat, nous ne pouvons pas dire quelle est sa nature avec seulement des dérivées secondes.

c) Cherchons les points critiques de la fonction $h(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$, de domaine $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{\nabla} h(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 3y \\ 3y^2 + 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y = -x^2 \\ x(x^3+1) = 0 \end{cases}$$

Il y a deux solutions : la première est $x = 0$ et $y = 0$, la deuxième est $x^3 = -1$, c'est-à-dire $x = -1$, et $y = -(-1)^2 = -1$.

Au final, il y a donc deux points critiques pour h : $(0,0)$ et $(-1,-1)$. Sont-ils des extrema locaux ?

$$H_h(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad \det H_h(x,y) = 36xy - 9 = 9(4xy-1).$$

Puisque $\det H_h(0,0) = -9 < 0$, le point $(0,0)$ est un point col.
Puisque $\det H_h(-1,-1) = 9(4-1) = 27 > 0$, le point $(-1,-1)$ est un extremum local, et comme $\dfrac{\partial h}{\partial x}(-1,-1) = -6 < 0$, il s'agit d'un maximum local.

d) Cherchons les points critiques de la fonction $F(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^3$, de domaine $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{\nabla} F(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 3(x-y)^2 \\ 4x^3 + 3(x-y)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 4x^3 = 3(x-y)^2 \\ 4(y^3+x^3) = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = -x \\ 4x^3 = 12x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ 4x^2(x-3) = 0 \end{cases}$$

Il y a deux solutions : la première est $x = 0$ et $y = 0$, la deuxième est $x = 3$ et $y = 3$.
Au final, il y a donc deux points critiques pour F : $(0,0)$ et $(3,3)$. Sont-ils des extrema locaux ?

$$H_F(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 6(x-y) & 6(x-y) \\ 6(x-y) & 12y^2 - 6(x-y) \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 2x^2 - (x-y) & (x-y) \\ (x-y) & 2y^2 - (x-y) \end{pmatrix}.$$

Puisque $\det H_F(0,0) = 36 \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$, le point $(0,0)$ est un point plat.

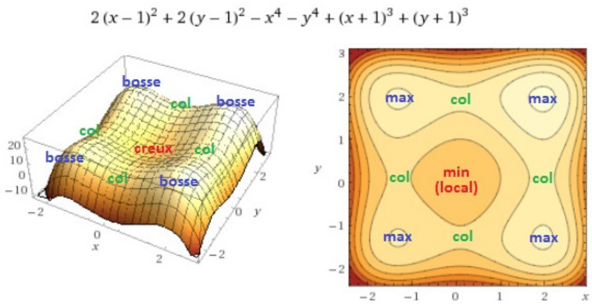
Puisque $\det H_F(3,3) = 36 \det \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = 36 \cdot (12)^2 > 0$, le point $(3,3)$ est un extremum local, et comme $\dfrac{\partial F}{\partial x}(3,3) = 6 \cdot 12 > 0$, il s'agit d'un minimum local.

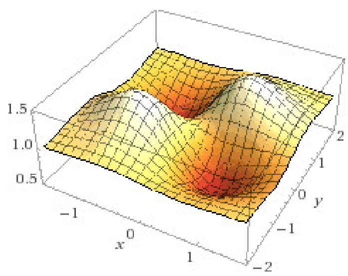
e) $G(x,y) = \ln(2 + x^2 - 2xy + 6y^2)$

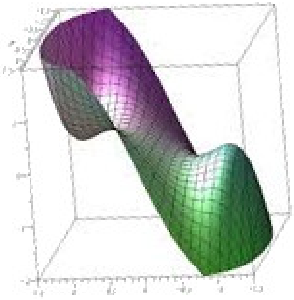
f) $H(x,y) = \dfrac{1}{1 + x^2 - 2x + 2y^2}$

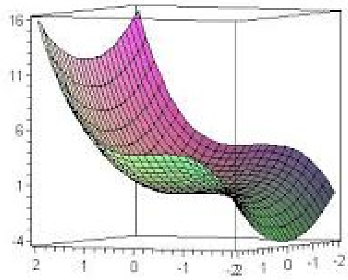
Exercice 32 – Points critiques et extrema

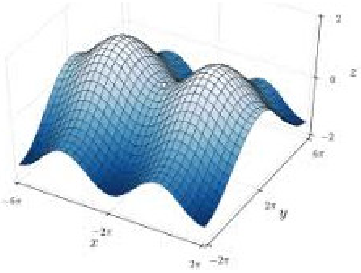
Pour les fonctions representées par les graphes suivantes, indiquer tous les points critiques et les extrema locaux :

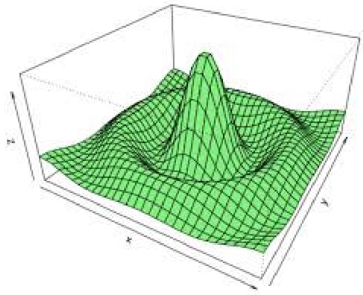
a) 

b) 

c) 

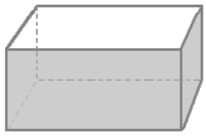
e) 

d) 

f) 

Corrigé

Exercice 33 – Application des extrema : optimisation [Facultatif]



On veut construire une boite en forme de parallélépipède rectangle (ouverte en haut) de volume $4\,m^3$, avec base et faces d'aire totale minimale.
Quelles dimensions doit-on prendre pour la boite ?

Corrigé

Appellons x, y et z les trois dimensions de la boite, avec z la hauteur. Donc $x, y, z \in \mathbb{R}$ et $x, y, z > 0$.
Le volume de la boite est alors $xyz = 4\,m^3$.
L'aire totale des surfaces qui composent le bord de la boite (exclus le couvercle) est la somme des aires suivantes :

base : xy, face avant : xz, face arrière : xz, face gauche : yz, face droite : yz,

soit une aire totale $xy + 2xz + 2yz$, que l'on veut rendre minimale. Cherchons donc les minima locaux de la fonction $f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ sous la contrainte $xyz = 4$.
La contrainte $xyz = 4$ donne $z = \dfrac{4}{xy}$. Il suffit donc de chercher les minima locaux de la fonction

$$g(x,y) = f(x,y,z)\big|_{xyz=4} = xy + \frac{8x}{xy} + \frac{8y}{xy} = xy + \frac{8}{y} + \frac{8}{x}, \qquad \text{avec } x, y > 0.$$

On a

$$\vec{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} y - \dfrac{8}{x^2} \\[2ex] x - \dfrac{8}{y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y = \dfrac{8}{x^2} \\[2ex] xy^2 - 8 = x\,\dfrac{64}{x^4} - 8 = 8\dfrac{8 - x^3}{x^3} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = \dfrac{8}{x^2} \\[1ex] x^3 = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\[1ex] y = \dfrac{8}{4} = 2 \end{cases}.$$

La fonction g a donc un point critique $(2,2)$. Vérifions que c'est un minimum local.

$$H_g(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{64}{x^3} & 1 \\ 1 & \dfrac{64}{y^3} \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad \begin{cases} \det H_g(2,2) = \left(\dfrac{64}{8}\right)^2 - 1 = 8^2 - 1 = 63 > 0 \\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(2,2) = \dfrac{64}{8} = 8 > 0 \end{cases}$$

donc le point $(2,2)$ est bien un minimum local de g.
Conclusion : pour avoir une boite de volume égal à $4m^3$ et aire totale de la base et des parois minimale, il suffit de prendre les dimensions

$$\text{base :} \quad x = 2m \quad \text{et} \quad y = 2m, \qquad \text{hauteur :} \quad z = \frac{4m^3}{4m^2} = 1m.$$

TD 6 – INTÉGRALES DOUBLES ET TRIPLES, AIRE ET VOLUME

Exercice 34 – Intégrales doubles
Calculer les intégrales doubles suivantes :

a) $\displaystyle\iint_D (1+x+x^3)(y^2+y^4)\,dx\,dy$, où $D=[0,1]\times[0,1]$.

b) $\displaystyle\iint_D (1+x+x^3+y^2+y^4)\,dx\,dy$, où $D=[0,1]\times[0,1]$.

c) $\displaystyle\iint_D (1+x+x^3+y^2+y^4)\,dx\,dy$, où D est la partie bornée du plan délimitée par les droites $x=0$, $y=x+2$ et $y=-x$.

d) $\displaystyle\iint_D (1+x+x^3y^2+y^4)\,dx\,dy$, où D est délimité par $x=0$, $y=x+2$ et $y=-x$.

e) $\displaystyle\iint_D \sin(x+y)\,dx\,dy$, où D est le triangle plein $D=\big\{(x,y)\mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\leqslant \pi\big\}$.

f) $\displaystyle\iint_D (4-x^2-y^2)\,dx\,dy$, où $D=\big\{(x,y)\mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x^2+y^2\leqslant 1\big\}$ est un quart du disque unité.

g) $\displaystyle\iint_D x^2\,dx\,dy$, où $D=\big\{(x,y)\mid x\geqslant 0,\ 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\big\}$ est un secteur d'anneau.

Corrigé

Exercice 35 – Aire de surfaces planes
Calculer l'aire des surfaces S suivantes :

a) S est la partie bornée du plan délimitée par les courbes d'équation $y=x$ et $y^2=x$.

b) $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y^2/2\leqslant x\leqslant 2\}$.

c) S est la partie du plan délimitée par l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$. [*Poser* $x=2\rho\cos\varphi$ *et* $y=3\rho\sin\varphi$.]

Corrigé

Exercice 36 – Intégrales triples
Calculer les intégrales triples suivantes :

a) $\displaystyle\iiint_\Omega (1+x^3)(2y+y^2)(z+6z^3)\,dx\,dy\,dz$, où $\Omega=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$.

b) $\displaystyle\iiint_\Omega (x^3y^2z-xy^2z^3)\,dx\,dy\,dz$, où $\Omega=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$.

c) $\displaystyle\iiint_\Omega x^2y\,e^{xyz}\,dx\,dy\,dz$, où $\Omega=[0,1]\times[0,2]\times[-1,1]$.

d) $\displaystyle\iiint_B \frac{xy}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, où B est la boule de $\mathbb{R}^3$ de rayon 1 centrée en l'origine.

Corrigé

Exercice 37 – Volumes

Calculer le volume des ensembles $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ suivants :

a) Ω est le tronc de cylindre d'équation $x^2 + y^2 = R^2$, pour $z \in [0, H]$.

b) Ω est le recipient délimité en bas par le paraboloïde d'équation $z = x^2 + y^2$ et en haut par le disque $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1,\ z = 1\}$. [*Utiliser les coordonnées cylindriques.*]

Corrigé

TD 7 – MOYENNE ET CENTRE DE MASSE

Exercice 38 – Quantité totale et moyenne
Une substance de concentration $f(x,y,z) = \frac{1}{z+1}$ occupe le recipient Ω délimité en bas par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et en haut par le disque $D = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1,\ z = 1\}$. Trouver la quantité totale de substance contenue dans Ω et la quantité moyenne.

Corrigé

Exercice 39 – Centre de masse

a) Trouver le centre de gravité de la surface plane homogène délimitée par la parabole $y = 6x - x^2$ et la droite $y = x$.

b) Déterminer le centre de gravité d'un demi-disque homogène.

c) Calculer la masse totale du cube $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ de $\mathbb{R}^3$ ayant pour densité de masse $\mu(x,y,z) = x^2y + xz^2$. Calculer ensuite le centre de masse du cube.

Corrigé

Exercice 40 – Culbuto homogène en équilibre

Un *culbuto* est un objet avec base arrondie fait de telle manière que si on le déplace de la position verticale il y revient en oscillant.

[Photo : MONSIEUR COLBUTO de HIBAI AGORRIA MUNITIS]

Considerons le culbuto homogène constitué d'une demi-boule de rayon 1 surmontée d'un cône de hauteur $a > 0$. Nous voulons trouver les valeurs de a pour lesquelles le culbuto revient à l'équilibre en position verticale, en sachant que cela arrive si le centre de masse G se trouve strictement en dessous du plan qui sépare la demi-boule du cône.

Soit K_a l'ensemble des points $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ avec $-1 \leqslant z \leqslant a$ et tels que

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1 & \text{si } -1 \leqslant z \leqslant 0 \quad \text{(demi-boule)}, \\ x^2 + y^2 \leqslant \left(1 - \dfrac{z}{a}\right)^2 & \text{si } 0 \leqslant z \leqslant a \quad \text{(cône plein)}. \end{cases}$$

a) Dessiner K_a et en calculer le volume.

b) Pour tout $z \in [-1,a]$, soit D_z le disque contenu dans K_a à hauteur z fixée. Dessiner D_z, trouver son rayon et calculer son aire.

c) Trouver le centre de masse de K_a, en sachant qu'il se trouve sur l'axe $\vec{Oz}$.

d) Trouver les valeurs de $a > 0$ pour que le culbuto K_a revienne à l'équilibre en position verticale.

Corrigé

TD 8 – CHAMPS SCALAIRES ET CHAMPS DE VECTEURS

Exercice 41 – Champs scalaires, surfaces de niveau
Considerons le champ scalaire de $\mathbb{R}^3$

$$\phi(x,y,z) = -\frac{K}{x^2+y^2},$$

où $K > 0$ est une constante.

a) Exprimer ϕ en coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) et en coordonnées sphériques (r, φ, θ).

b) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, trouver les surfaces de niveau a de ϕ en séparant les cas $a \geqslant 0$ et $a < 0$, et dessiner celles de niveau $a = -1$ et $a = -2$. [*Utiliser l'expression de ϕ en coordonnées cylindriques.*]

c) Dessiner le graphe du champ ϕ comme fonction de la seule variable ρ.

Corrigé

a) En coordonnées cylindriques on a $x^2 + y^2 = \rho^2$, et en coordonnées sphériques on a $\rho = r\sin\theta$, donc

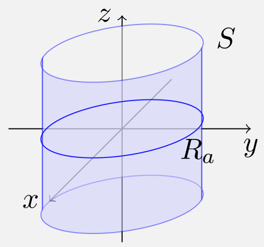
$$\phi(x,y,z) = -\frac{K}{x^2+y^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \phi(\rho,\varphi,z) = -\frac{K}{\rho^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \phi(r,\varphi,\theta) = -\frac{K}{r^2\sin^2\theta}.$$

b) Pour $a \in \mathbb{R}$, la surface de niveau a de ϕ est

$$S_a(\phi) = \left\{(\rho,\varphi,z) \mid \phi(\rho,\varphi,z) = -\frac{K}{\rho^2} = a\right\} = \left\{(\rho,\varphi,z) \mid \rho^2 = -\frac{K}{a}\right\}.$$

Puisque $\rho^2 \geqslant 0$ pour tous les points de l'espace, et puisque $K > 0$, l'égalité $\rho^2 = -\frac{K}{a}$ ne peut se vérifier que si $a < 0$. Par conséquent, la surface $S_a(\phi)$ est non vide si et seulement si $a < 0$, et dans ce cas on a $-\dfrac{K}{a} > 0$ et donc

$$S_a(\phi) = \left\{(\rho,\varphi,z) \mid \rho = \sqrt{-K/a}\right\}.$$



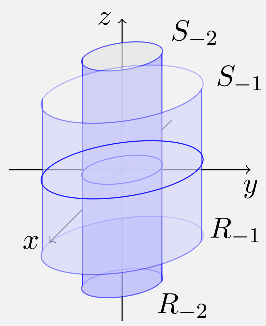
Cette surface est un cylindre d'axe la droite Oz, de rayon $R_a = \sqrt{-K/a}$ et de hauteur infinie.

En particulier, on a

$$S_{-1}(\phi) = \left\{(\rho,\varphi,z) \mid \rho = \sqrt{K}\right\}$$

et

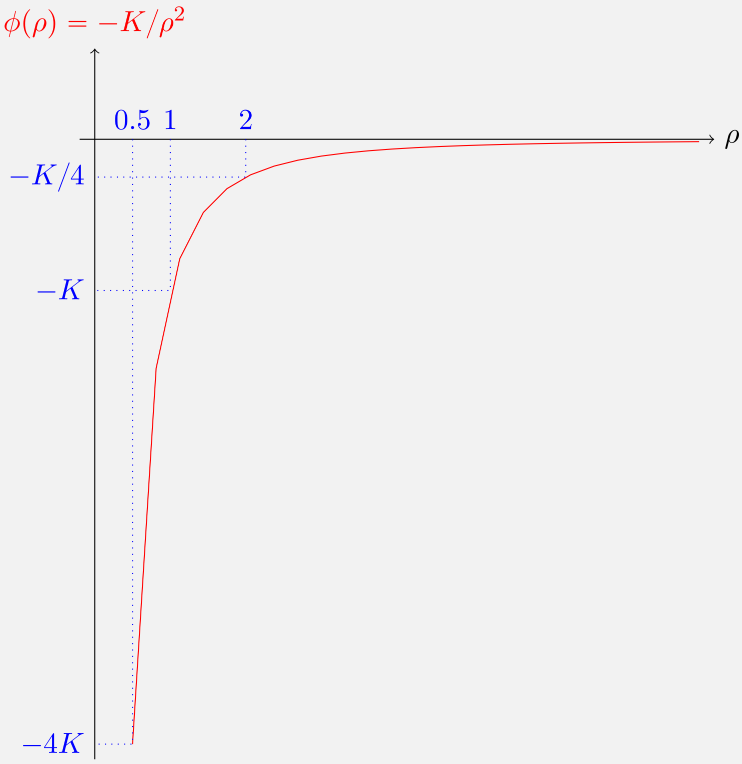
$$S_{-2}(\phi) = \left\{(\rho,\varphi,z) \mid \rho = \sqrt{K/2}\right\},$$



et puisque $\sqrt{K/2} < \sqrt{K}$, le cylindre $S_{-2}(\phi)$ est plus proche à l'axe Oz du cylindre $S_{-1}(\phi)$.

c) Le champ ϕ a une valeur constante a sur chaque surface de niveau S_a. Pour representer ϕ comme fonction, on utilise le rayon ρ pour déterminer les surfaces ($\rho = R_a$) et on dessine le graphe de ϕ

comme fonction de ρ :



Exercice 42 – Champs de vecteurs

Trouver le domaine de définition et dessiner quelques valeurs des champs vectoriels suivants :

a) $\vec{V}(x,y) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$

b) $\vec{V}(x,y) = (x+1)\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$

c) $\vec{V}(x,y) = y\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath}$

d) $\vec{V}(\rho,\varphi) = \rho\,\vec{e_\varphi}$

e) $\vec{V}(\rho,\varphi) = \vec{e_\rho} + \rho\,\vec{e_\varphi}$

f) $\vec{V}(x,y,z) = \vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath} + \vec{k}$

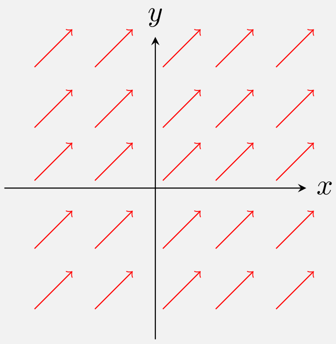
g) $\vec{V}(x,y,z) = \vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + \vec{k}$

h) $\vec{V}(r,\varphi,\theta) = r\,\vec{e_\varphi} + r\,\vec{e_\theta}$

Corrigé

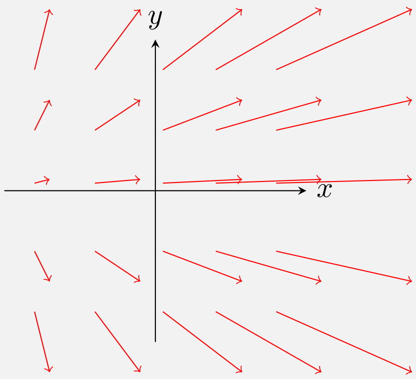
a) $\overrightarrow{V}(x,y) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$

$D = \mathbb{R}^2$



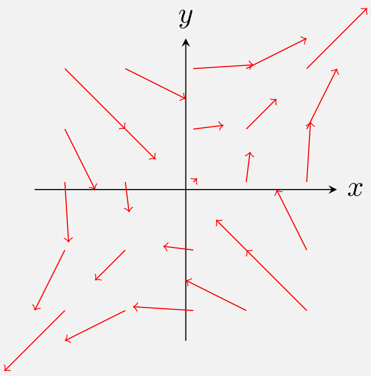
b) $\overrightarrow{V}(x,y) = (x+1)\ \vec{\imath} + y\ \vec{\jmath}$

$D = \mathbb{R}^2$



c) $\overrightarrow{V}(x,y) = y\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath}$

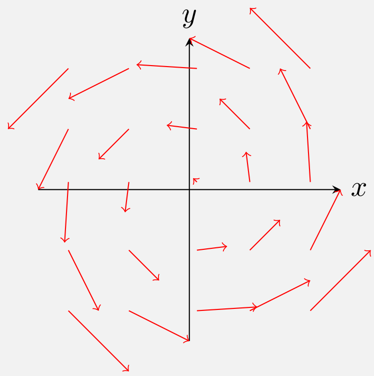
$D = \mathbb{R}^2$



d) $\overrightarrow{V}(\rho,\varphi) = \rho\,\vec{e_\varphi}$

$D = \mathbb{R}^2$, le point $(0,0)$ est admis

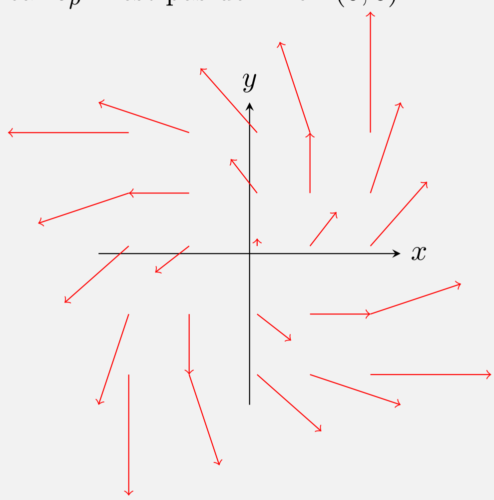
car $\rho\,\vec{e_\varphi} = \vec{0}$ en $(0,0)$



e) $\overrightarrow{V}(\rho,\varphi) = \vec{e_\rho} + \rho\ \vec{e_\varphi}$

$D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$

car $\vec{e_\rho}$ n'est pas défini en $(0,0)$



f) $\overrightarrow{V}(x,y,z) = \vec{\imath} + 2\ \vec{\jmath} + \vec{k}$

$D = \mathbb{R}^3$

g) $\overrightarrow{V}(x,y,z) = \vec{\imath} + y\ \vec{\jmath} + \vec{k}$

$D = \mathbb{R}^3$

h) $\overrightarrow{V}(r,\varphi,\theta) = r\ \vec{e_\varphi} + r\ \vec{e_\theta}$

$D = \mathbb{R}^3$

Exercice 43 – Changement de coordonnées pour les champs de vecteurs

Exprimer les champs vectoriels suivants en coordonnées polaires (dans le plan) ou bien cylindriques et sphériques (dans l'espace) :

a) $\overrightarrow{V}(x,y) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$

b) $\overrightarrow{V}(x,y) = y\ \vec{\imath} - x\ \vec{\jmath}$

c) $\overrightarrow{V}(x,y,z) = x\ \vec{\imath} + y\ \vec{\jmath}$

d) $\overrightarrow{V}(x,y,z) = x\ \vec{\imath} + y\ \vec{\jmath} + z\vec{k}$

Corrigé

a) $\vec{V}(x,y) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$

$$\begin{aligned}\vec{V}(\rho,\varphi) &= (\cos\varphi\,\vec{e_\rho} - \sin\varphi\,\vec{e_\varphi}) + (\sin\varphi\,\vec{e_\rho} + \cos\varphi\,\vec{e_\varphi}) \\ &= (\cos\varphi + \sin\varphi)\,\vec{e_\rho} + (\cos\varphi - \sin\varphi)\,\vec{e_\varphi}\,.\end{aligned}$$

b) $\vec{V}(x,y) = y\,\vec{\imath} - x\,\vec{\jmath}$

$$\begin{aligned}\vec{V}(\rho,\varphi) &= \rho\,\sin\varphi\,(\cos\varphi\,\vec{e_\rho} - \sin\varphi\,\vec{e_\varphi}) - \rho\,\cos\varphi\,(\sin\varphi\,\vec{e_\rho} + \cos\varphi\,\vec{e_\varphi}) \\ &= \rho\,(\sin\varphi\cos\varphi - \cos\varphi\sin\varphi)\,\vec{e_\rho} - \rho\,(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\,\vec{e_\varphi} \\ &= -\rho\,\vec{e_\varphi}\,.\end{aligned}$$

c) $\vec{V}(x,y,z) = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$

$$\begin{aligned}\vec{V}(\rho,\varphi,z) &= \rho\,\cos\varphi\,(\cos\varphi\,\vec{e_\rho} - \sin\varphi\,\vec{e_\varphi}) + \rho\,\sin\varphi\,(\sin\varphi\,\vec{e_\rho} + \cos\varphi\,\vec{e_\varphi}) \\ &= \rho\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\,\vec{e_\rho} + \rho\,(-\cos\varphi\sin\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)\,\vec{e_\varphi} \\ &= \rho\,\vec{e_\rho}\,,\end{aligned}$$

$$\vec{V}(r,\varphi,\theta) = r\sin\theta\,(\sin\theta\,\vec{e_r} + \cos\theta\,\vec{e_\theta}\,).$$

d) $\vec{V}(x,y,z) = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k} = (x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}) + z\,\vec{k}$

$$\vec{V}(\rho,\varphi,z) = \rho\,\vec{e_\rho} + z\,\vec{k},$$

$$\begin{aligned}\vec{V}(r,\varphi,\theta) &= r\sin\theta\,(\sin\theta\,\vec{e_r} + \cos\theta\,\vec{e_\theta}) + r\,\cos\theta\,(\cos\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\vec{e_\theta}) \\ &= r\,(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\,\vec{e_r} + r\,(\sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta)\,\vec{e_\theta} \\ &= r\,\vec{e_r}\,.\end{aligned}$$

Exercice 44 – Lignes de champ
Trouver les lignes de champ des champs vectoriels suivants :

a) $\vec{V}(x,y) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$
b) $\vec{V}(x,y,z) = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$
c) $\vec{V}(x,y) = (x+1)\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$
d) $\vec{V}(x,y) = y\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath}$
e) $\vec{\mathcal{G}}(r) = -\dfrac{G\,M}{r^2}\,\vec{e_r}$ (champ gravitationnel)

Corrigé

Une **ligne de champ** pour le champ $\vec{V}$ défini sur $D \subset \mathbb{R}^3$ est une courbe paramétrée $t \mapsto \gamma(t) \in D \subset \mathbb{R}^3$ telle que

$$(*) \qquad \vec{V}(\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t) \qquad \text{pour tout } t.$$

Il y a une infinité de lignes de champ, qui diffèrent par le point de passage à un instant donné (par exemple, pour $t = 0$, le point $\gamma(0)$). On cherche $\gamma(t)$ dans la paramétrisation cartésienne, cylindrique ou sphérique selon comment est présenté le champ $\vec{V}$.

a) $\vec{V}(x,y) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ est un champ plan en coordonnées cartésiennes, avec domaine $D = \mathbb{R}^2$, donc on cherche ses lignes de champ paramétrées comme courbes planes en coordonnées cartésiennes :

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

La vitesse d'une telle courbe est $\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = \dot{x}(t)\,\vec{\imath} + \dot{y}(t)\,\vec{\jmath}$, donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t)$ est une solution du système

$$\dot\gamma(t) = \dot x(t)\,\vec\imath + \dot y(t)\,\vec\jmath \overset{(*)}{=} \overrightarrow{V}(x(t),y(t)) = \vec\imath + \vec\jmath$$

$$\iff \begin{cases} \dot x(t) = 1 \\ \dot y(t) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x(t) = t+a \\ y(t) = t+b \end{cases}$$

$$\iff \gamma(t) = (t+a, t+b) = (a,b) + t\,(1,1),$$

où on voit que $(a,b) = \gamma(0)$ est le point par où passe la courbe γ au temps $t = 0$.

Cette paramétrisation est celle d'une droite passant par (a,b) et parallèle au vecteur $(1,1)$, c'est-à-dire dirigée par le vecteur $(1,1)$. En effet, dans l'expression de x et y comme fonctions de t on peut calculer t à partir d'une équation et le remplacer dans la deuxième : on obtient l'équation cartésienne de la courbe γ,

$$\begin{cases} x = t+a \\ y = t+b \end{cases} \iff \begin{cases} t = x-a \\ y = (x-a)+b \end{cases} \implies y = x + (b-a) \quad \text{éq. d'une droite.}$$

Conclusion : les lignes de champ du champ $\overrightarrow{V}$ sont les droites

$$\gamma(t) = (t+a, t+b) \qquad \text{ou} \qquad y = x + (b-a) \qquad \text{pour tout choix de } a,b \in \mathbb{R},$$

et le point (a,b) représente le point de passage de γ au temps $t = 0$.
Autrement dit, pour tout point (a,b) du plan il y a exactement une ligne de champ γ de $\overrightarrow{V}$ passant par (a,b), c'est la droite $\gamma(t) = (t+a, t+b)$.

b) $\overrightarrow{V}(x,y,z) = \vec\imath + 2\vec\jmath + \vec k$ est un champ de $\mathbb{R}^3$ en coordonnées cartésiennes, défini sur tout $\mathbb{R}^3$, donc on cherche ses lignes de champ comme courbes paramétrées en coordonnées cartésiennes :

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

La vitesse d'une telle courbe est $\dot\gamma(t) = (\dot x(t), \dot y(t), \dot z(t)) = \dot x(t)\,\vec\imath + \dot y(t)\,\vec\jmath + \dot z(t)\,\vec k$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$ l'égalité $(*)$ donne le système

$$\dot\gamma(t) \overset{(*)}{=} \overrightarrow{V}(x(t),y(t),z(t)) \iff \begin{cases} \dot x(t) = 1 \\ \dot y(t) = 2 \\ \dot z(t) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x(t) = t+a \\ y(t) = 2t+b \\ z(t) = t+c \end{cases}$$

$$\iff \gamma(t) = (t+a, 2t+b, t+c) = (a,b,c) + t\,(1,2,1),$$

où on voit que $(a,b,c) = \gamma(0)$ est le point par où passe la courbe γ au temps $t = 0$.

Comme dans le plan, cette paramétrisation est celle d'une droite (dans l'espace 3D cette fois) passant par (a,b,c) et dirigée par le vecteur $(1,2,1)$. L'équation cartésienne d'une telle droite consiste de deux équations :

$$\begin{cases} x = t+a \\ y = 2t+b \\ z = t+c \end{cases} \iff \begin{cases} t = x-a \\ y = 2(x-a)+b \\ z = (x-a)+c \end{cases} \implies \begin{cases} y = 2x + (b-2a) \\ z = x + (c-a) \end{cases} \quad \text{éq. d'une droite dans } \mathbb{R}^3.$$

Conclusion : les lignes de champ du champ $\vec{V}$ sont les droites

$$\gamma(t) = (t+a, 2t+b, t+c) \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} y = 2x + (b-2a) \\ z = x + (c-a) \end{cases} \qquad \text{pour tout choix de } a,b,c \in \mathbb{R},$$

et le point (a,b,c) représente le point de passage de γ au temps $t = 0$.

c) $\vec{V}(x,y) = (x+1)\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$ est un champ de $\mathbb{R}^2$ en coordonnées cartésiennes, défini sur tout $\mathbb{R}^2$, donc on cherche ses lignes de champ comme courbes paramétrées en coordonnées cartésiennes :

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

La vitesse de γ est $\dot\gamma(t) = \dot x(t)\,\vec{\imath} + \dot y(t)\,\vec{\jmath}$, donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t)$ vérifie

$$\dot\gamma(t) \overset{(*)}{=} \vec{V}(x(t), y(t)) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \dot x(t) = x(t) + 1 \quad (1) \\ \dot y(t) = y(t) \quad (2) \end{cases}.$$

Ceci est un système d'équations différentielles en deux inconnues $x(t)$, $y(t)$, avec deux équations séparées, du 1er ordre, linéaires et à coefficients constants.

Les solutions de l'éq. (1) sont les fonctions $x(t) = x_0(t) + x_p(t)$ où

— x_0 est la solution générale de l'éq. homogène $\dot x(t) = x(t)$, donc $x_0(t) = \lambda e^t$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

— et x_p est une solution particulière de l'équation complète : puisque le terme inohomgène est la constante 1, on cherche une solution particulière $x_p(t) = c$ constante, et (1) impose que $\dot x_p(t) = 0 = c + 1$, d'où suit $c = -1$.

En somme, on a $x(t) = \lambda\, e^t - 1$.

Pour l'éq. (2), qui est homogène, on a $y(t) = y_0(t) = \mu\, e^t$, quelconque soit $\mu \in \mathbb{R}$.

Au final, les lignes de champ de $\vec{V}$ sont les courbes paramétrées

$$\gamma(t) = (\lambda\, e^t - 1, \mu\, e^t), \qquad \text{pour } t \in \mathbb{R} \text{ et quelconque soient } \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

où λ et μ fixent le point de passage à $t = 0$: $\gamma(0) = (\lambda - 1, \mu)$. Pour trouver l'équation cartesienne de ces courbes, on se débarasse du paramètre t :

$$\begin{cases} x = \lambda\, e^t - 1 \\ y = \mu\, e^t \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \mu\,\lambda\, e^t = \mu\, x + \mu \\ \lambda y = \lambda \mu\, e^t \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \lambda\, y = \mu\, x + \mu \qquad \text{éq. d'une droite.}$$

Conclusion : les lignes de champ du champ $\vec{V}$ sont des droites d'éq. cartésienne $\mu\, x - \lambda\, y + \mu = 0$ paramétrées de façon différente que celle linéaire de l'exercice a).

d) $\vec{V}(x,y) = y\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath}$ est un champ de $\mathbb{R}^2$ en coordonnées cartésiennes, défini sur tout $\mathbb{R}^2$, donc on cherche ses lignes de champ comme courbes paramétrées en coordonnées cartésiennes

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \qquad t \in \mathbb{R},$$

avec vitesse $\dot\gamma(t) = \dot x(t)\,\vec{\imath} + \dot y(t)\,\vec{\jmath}$. Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t)$ vérifie

$$\dot\gamma(t) \overset{(*)}{=} \vec{V}(x(t), y(t)) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \dot x(t) = y(t) \quad (1) \\ \dot y(t) = x(t) \quad (2) \end{cases}$$

Ceci est un système d'équations différentielles en deux inconnues $x(t)$, $y(t)$, avec deux équations (non séparées) du 1er ordre, linéaires et à coefficients constants, qui peuvent se représenter par un système matriciel

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad (3).$$

Puisque les deux inconnues ne sont pas sousmises à deux équations séparées, on ne peut pas les calcules par intégration comme dans l'exemple c). En fait, pour l'instant on ne sait pas trouver une <u>paramétrisation</u> des lignes de champ (la résolution du système (3) sera donnée dans le cours Math3), mais on sait trouver l'<u>équation cartésienne</u> des lignes de champ, avec une astuce : on multiplie (1) par $x(t)$ et (2) par $y(t)$, alors on obtient

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x(t)\,\dot{x}(t) = x(t)\,y(t) \\ y(t)\,\dot{y}(t) = x(t)\,y(t) \end{cases} \Longrightarrow \quad x(t)\,\dot{x}(t) = y(t)\,\dot{y}(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{d\,(x(t)^2)}{d\,t} = \frac{1}{2}\frac{d\,(y(t)^2)}{d\,t} \\ &\Longleftrightarrow \quad \int \frac{d\,x(t)^2}{d\,t}\,dt = \int \frac{d\,y(t)^2}{d\,t}\,dt \\ &\Longrightarrow \quad x(t)^2 = y(t)^2 + c \qquad \text{quelconque soit } c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Les lignes de champ sont donc les courbes

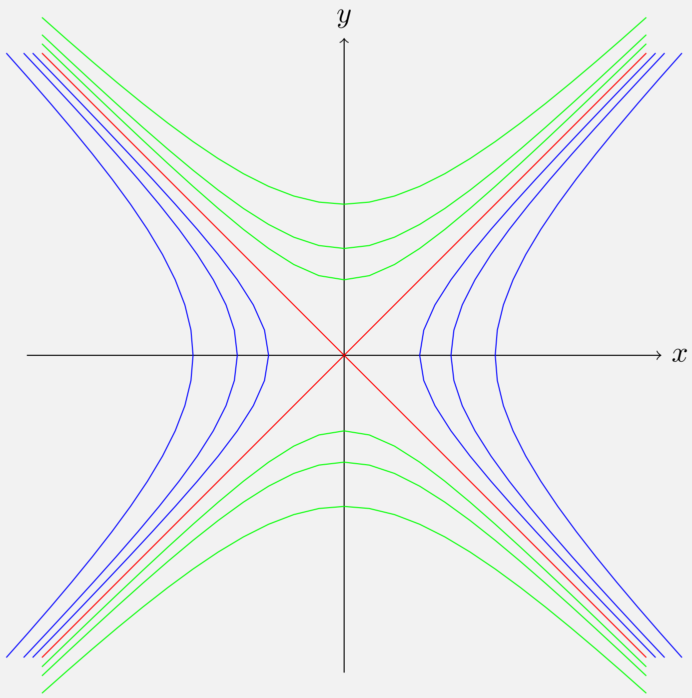
$$C = \{\ \gamma(t) = (x(t), y(t)) \mid t \in \mathbb{R}\ \} = \{\ (x,y) \mid x^2 - y^2 = c\ \}$$

qui dépendent du choix de la constante c :

— si $c > 0$ alors C est une hyperbole d'éq. $\left(\frac{x}{\sqrt{c}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{c}}\right)^2 = 1$ (en bleu),

— si $c = 0$ alors C est l'union de deux droites $y = \pm x$ (en rouge),

— si $c < 0$ alors C est une hyperbole d'éq. $\left(\frac{y}{\sqrt{-c}}\right)^2 - \left(\frac{x}{\sqrt{-c}}\right)^2 = 1$ (en vert).



e) $\overrightarrow{\mathcal{G}}(r) = -\frac{G\ M}{r^2}\ \vec{e_r}$ (champ gravitationnel). Voir solution sur le livret de cours.

Exercice 45 – Gradient et Laplacien en coordonnées polaires [Facultatif]
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction C^2 donnée en coordonnées cartesiennes et soit $\tilde{f}(\rho,\varphi) = f(x,y)$ son expression en coordonnées polaires, où $x = \rho\cos\varphi$ et $y = \rho\sin\varphi$.

Trouver l'expression en coordonnées polaires du gradient $\tilde{\nabla}$ et du Laplacien $\tilde{\Delta}$, définis par les identitées

$$a) \quad \tilde{\nabla}\tilde{f}(\rho,\varphi) = \nabla f(x,y) \qquad \text{et} \qquad b) \quad \tilde{\Delta}\tilde{f}(\rho,\varphi) = \Delta f(x,y).$$

Corrigé

Pour le changement de coordonnées

$$(x,y) = h(\rho,\varphi) = \big(x(\rho,\varphi), y(\rho,\varphi)\big) = (\rho\,\cos\varphi, \rho\,\sin\varphi)$$

posons $\tilde{f}(\rho,\varphi) = f(h(\rho,\varphi) = f(x,y)$.

a) **Raisonnement :** Pour exprimer $\nabla f(x,y)$ en coordonnées polaires, c'est-à dire l'écrire comme $\tilde{\nabla}\tilde{f}(\rho,\varphi)$, il faut exprimer en coordonnées polaires chaque composante de

$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{\jmath},$$

c'est-à-dire

(i) exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en termes de $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho}$ et $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}$ (calcul à faire), et

(ii) exprimer $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ en termes de $\vec{e_\rho}$ et $\vec{e_\varphi}$ (voir le formulaire).

Pour (i), vu que les fonctions $x = x(\rho,\varphi)$ et $y = y(\rho,\varphi)$ sont définies globalement (pour tout ρ et φ), alors que la composante $\varphi = \varphi(x,y)$ de leur réciproque ne s'exprime que par des formules partielles selon la position de (x,y) dans le plan, ce qu'on sait calculer se sont les dérivées partielles $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho}$ et $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}$ en termes de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$, et non le contraire. A priori, il faut donc partir de ce calcul et invérser le système pour obtenir (i).
Cela dit, en pratique on n'a pas besoin d'invérser le système pour exprimer $\nabla f(x,y)$ en coordonnées polaires, car les dérivées se regroupent en des termes qu'on reconnait sans les calcules (i).

a) **Calculs :** Calculons les dérivées de la fonction composée $\tilde{f}$ avec la règle de la chaîne :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho} &=& \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \rho} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \rho} = \cos\varphi\,\dfrac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi\,\dfrac{\partial f}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} &=& \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\right) = -\sin\varphi\,\dfrac{\partial f}{\partial x} + \cos\varphi\,\dfrac{\partial f}{\partial y} \end{array} \right. .$$

Alors :

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}\tilde{f}(\rho,\varphi) = \nabla f(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{\jmath} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\,(\cos\varphi\;\vec{e_\rho} - \sin\varphi\;\vec{e_\varphi}\,) + \frac{\partial f}{\partial y}\,(\sin\varphi\;\vec{e_\rho} + \cos\varphi\;\vec{e_\varphi}\,) \\ &= \left(\cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)\;\vec{e_\rho} + \left(-\sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)\;\vec{e_\varphi} \\ &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho}\;\vec{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}\;\vec{e_\varphi}\,. \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\tilde{\nabla}\tilde{f} = \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho}\;\vec{e_\rho} + \dfrac{1}{\rho}\,\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}\;\vec{e_\varphi}}$ i.e. $\boxed{\tilde{\nabla} = \dfrac{\partial}{\partial \rho}\;\vec{e_\rho} + \dfrac{1}{\rho}\,\dfrac{\partial}{\partial \varphi}\;\vec{e_\varphi}}$.

À noter qu'en inversant le système (1) on trouve

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial f}{\partial x} &=& \cos\varphi\,\dfrac{\partial \tilde f}{\partial \rho} - \sin\varphi\,\dfrac{1}{\rho}\,\dfrac{\partial \tilde f}{\partial \varphi} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} &=& \sin\varphi\,\dfrac{\partial \tilde f}{\partial \rho} + \cos\varphi\,\dfrac{1}{\rho}\,\dfrac{\partial \tilde f}{\partial \varphi} \end{array}\right.$$

donc (1) et (2) donnent les formules "compactes"

$$(1)\quad \boxed{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial}{\partial \rho} &=& \cos\varphi\,\dfrac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\,\dfrac{\partial}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{1}{\rho}\,\dfrac{\partial}{\partial \varphi} &=& -\sin\varphi\,\dfrac{\partial}{\partial x} + \cos\varphi\,\dfrac{\partial}{\partial y} \end{array}} \qquad \text{et} \qquad (2)\quad \boxed{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial}{\partial x} &=& \cos\varphi\,\dfrac{\partial}{\partial \rho} - \sin\varphi\,\dfrac{1}{\rho}\,\dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y} &=& \sin\varphi\,\dfrac{\partial}{\partial \rho} + \cos\varphi\,\dfrac{1}{\rho}\,\dfrac{\partial}{\partial \varphi} \end{array}}$$

b) **Raisonnement :** Pour exprimer $\Delta f(x,y)$ en coordonnées polaires, c'est-à dire l'écrire comme $\widetilde{\Delta} \tilde f(\rho,\varphi)$, il faut exprimer en coordonnées polaires chaque composante de

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

c'est-à-dire exprimer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en termes de $\frac{\partial^2 \tilde f}{\partial \rho^2}$, $\frac{\partial^2 \tilde f}{\partial \rho \partial \varphi}$, et $\frac{\partial^2 \tilde f}{\partial \varphi^2}$.
À noter que, puisque f est de classe C^2, par le Théorème de Schwarz on a $\frac{\partial^2 \tilde f}{\partial \rho \partial \varphi} = \frac{\partial^2 \tilde f}{\partial \varphi \partial \rho}$ et également $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, donc on a trois dérivées secondes indépendantes à considérer, quelconques soient les coordonnées qu'on choisit.
Comme en a), ce qu'on peut calculer facilement est plutôt l'expression de $\frac{\partial^2 \tilde f}{\partial \rho^2}$, $\frac{\partial^2 \tilde f}{\partial \rho \partial \varphi}$, et $\frac{\partial^2 \tilde f}{\partial \varphi^2}$ en termes de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$: il faut donc écrire un système à trois équations et inverser celui-ci.

Contrairement à a), cette fois il n'y a pas d'astuce particulière pour éviter de faire le calcul complet. Mais on peut simplifier les calculs si en coordonnées polaires on choisit comme dérivées secondes indépendantes les dérivées

$$\frac{\partial^2 \tilde f}{\partial \rho^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde f}{\partial \varphi}\right), \qquad \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \tilde f}{\partial \varphi^2},$$

où la deuxième dérivée seconde s'exprime en termes de la dérivée mixte mais avec une dérivée première ajoutée qui est non homogène (en degré) et qu'on a envie de cacher dans nos calculs :

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde f}{\partial \varphi}\right) = -\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial \tilde f}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 \tilde f}{\partial \rho \partial \varphi}.$$

b) **Calculs :** Vu que $\tilde f = f \circ h$ est une fonction composée, ses dérivées partielles $\frac{\partial \tilde f}{\partial \rho}$ et $\frac{\partial \tilde f}{\partial \varphi}$ le sont aussi, et leur expression comme fonctions composées sont données par le système (1). Par exemple, la première équation, pour $(x,y) = h(\rho,\varphi)$, signifie

$$\frac{\partial \tilde f}{\partial \rho}(\rho,\varphi) = \cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial x}\big(h(\rho,\varphi)\big) + \sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial y}\big(h(\rho,\varphi)\big).$$

Alors, à partir du système (1), on calcule les dérivées secondes de $\tilde f$ en utilisant la règle de la chaîne à chaque fois qu'on a une fonction composée :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \rho^2} &= \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho}\right) = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\
&= \cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\
&= \cos\varphi\,\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \rho}\right) + \sin\varphi\,\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)\\
&= \cos\varphi\,\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\cos\varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,\sin\varphi\right) + \sin\varphi\,\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\,\cos\varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\sin\varphi\right)\\
&= \cos^2\varphi\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\cos\varphi\,\sin\varphi\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin^2\varphi\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

et de même pour

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}\right).$$

Au final, on obtient le système

$$(3) \qquad \left\{\begin{array}{rcl}
\dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \rho^2} & = & \cos^2\varphi\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\cos\varphi\,\sin\varphi\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin^2\varphi\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\\
\dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}\right) & = & -\cos\varphi\,\sin\varphi\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \cos\varphi\,\sin\varphi\,\dfrac{\partial f}{\partial y}\\
\dfrac{1}{\rho^2}\,\dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \varphi^2} + \dfrac{1}{\rho}\,\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho} & = & \sin^2\varphi\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\cos\varphi\,\sin\varphi\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \cos^2\varphi\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}
\end{array}\right. .$$

Inverser ce système est compliqué, mais on n'en a pas besoin pour conclure notre calcul : on remarque d'un coté que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho} = \left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}&\\
+ \left(2\cos\varphi\,\sin\varphi - 2\cos\varphi\,\sin\varphi\right)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}&\\
= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},&
\end{aligned}$$

et de l'autre coté que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial \rho}\,\left(\rho\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho}\right) &= \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \rho}{\partial \rho}\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho} + \frac{\rho}{\rho}\,\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \rho^2}\\
&= \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \rho^2}.
\end{aligned}$$

Finalement, on a donc

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta}\tilde{f} = \Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\\
&= \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \varphi^2}\\
&= \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial \rho}\,\left(\rho\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \varphi^2},
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\widetilde{\Delta}\tilde{f} = \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\,\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2\tilde{f}}{\partial\varphi^2}}\,.$$

TD 9 – CHAMPS CONSERVATIFS

Exercice 46 – Rotationnel
Calculer le rotationnel des champs de vecteurs suivants :

a) $\overrightarrow{E}(x,y,z) = xy^2\ \vec{\imath} + 2x^2yz\ \vec{\jmath} + 3yz^2\ \vec{k}$
b) $\overrightarrow{E}(x,y,z) = \sin(xyz)\ \vec{\imath} + \cos(xyz)\ \vec{\jmath}$
c) $\overrightarrow{E}(x,y,z) = yz\ \vec{\imath} + xz\ \vec{\jmath} + xy\ \vec{k}$
d) $\overrightarrow{E}(x,y,z) = xyz\ \vec{\imath}$
e) $\overrightarrow{E}(\rho,\varphi,z) = \rho^2\sin\varphi\ \vec{e_\rho} + \rho^2(z^2+1)\ \vec{e_\varphi} + \rho^2\ \vec{k}$
f) $\overrightarrow{E}(r,\varphi,\theta) = r^2\sin\varphi\ \vec{e_r} + r^2\sin\theta\ \vec{e_\varphi} + r^2\ \vec{e_\theta}$

Corrigé

Pour calculer le rotationnel, on utilise la formule du "pseudo-déterminant" en coordonnées cartesiennes et les formules du formulaire en coordonnées cylindriques et sphériques.

a) $\overrightarrow{E}(x,y,z) = xy^2\ \vec{\imath} + 2x^2yz\ \vec{\jmath} + 3yz^2\ \vec{k}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} &= \vec{\imath}\left(\frac{\partial}{\partial y}(3yz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(2x^2yz)\right) - \vec{\jmath}\left(\frac{\partial}{\partial x}(3yz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xy^2)\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(2x^2yz) - \frac{\partial}{\partial y}(xy^2)\right)\\ &= (3z^2 - 2x^2y)\,\vec{\imath} - (0-0)\,\vec{\jmath} + (4xyz - 2xy)\,\vec{k}\end{aligned}$$

b) $\overrightarrow{E}(x,y,z) = \sin(xyz)\ \vec{\imath} + \cos(xyz)\ \vec{\jmath}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} &= \vec{\imath}\left(\frac{\partial}{\partial y}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(\cos(xyz))\right) - \vec{\jmath}\left(\frac{\partial}{\partial x}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(\sin(xyz))\right)\\ &\quad + \vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(\cos(xyz)) - \frac{\partial}{\partial y}(\sin(xyz))\right)\\ &= xy\,\sin(xyz)\,\vec{\imath} + xy\,\cos(xyz)\,\vec{\jmath} + (-yz\,\sin(xyz) - xz\,\cos(xyz))\,\vec{k}\end{aligned}$$

c) $\overrightarrow{E}(x,y,z) = yz\ \vec{\imath} + xz\ \vec{\jmath} + xy\ \vec{k}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} &= \vec{\imath}\left(\frac{\partial}{\partial y}(xy) - \frac{\partial xz}{\partial z}()\right) - \vec{\jmath}\left(\frac{\partial}{\partial x}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(yz)\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(xz) - \frac{\partial}{\partial y}(yz)\right)\\ &= (x-x)\,\vec{\imath} - (y-y)\,\vec{\jmath} + (z-z)\,\vec{k} = \vec{0}\end{aligned}$$

d) $\overrightarrow{E}(x,y,z) = xyz\ \vec{\imath}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} &= \vec{\imath}\left(\frac{\partial}{\partial y}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(0)\right) - \vec{\jmath}\left(\frac{\partial}{\partial x}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(xyz)\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(0) - \frac{\partial}{\partial y}(xyz)\right)\\ &= xy\,\vec{\jmath} - xz\,\vec{k}\end{aligned}$$

e) $\overrightarrow{E}(\rho,\varphi,z) = \rho^2\sin\varphi\ \vec{e_\rho} + \rho^2(z^2+1)\ \vec{e_\varphi} + \rho^2\ \vec{k}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} &= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho^2) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho^2(z^2+1))\right)\vec{e_\rho} + \left(\frac{\partial}{\partial z}(\rho^2\sin\varphi) - \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2)\right)\vec{e_\varphi}\\ &\quad + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^3(z^2+1)) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho^2\sin\varphi)\right)\vec{k}\\ &= (0 - 2\rho^2 z)\,\vec{e_\rho} + (0-2\rho)\,\vec{e_\varphi} + \frac{1}{\rho}\,(3\rho^2(z^2+1) - \rho^2\cos\varphi)\,\vec{k}\end{aligned}$$

f) $\overrightarrow{E}(r,\varphi,\theta) = r^2 \sin\varphi\, \vec{e_r} + r^2 \sin\theta\, \vec{e_\varphi} + r^2\, \vec{e_\theta}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} &= \frac{1}{r\,\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(r^2\sin^2\theta) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(r^2)\right)\vec{e_r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r^3) - \frac{\partial}{\partial\theta}(r^2\sin\varphi)\right)\vec{e_\varphi} \\
&\quad + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(r^2\sin\varphi) - \frac{\partial}{\partial r}(r^3\sin\theta)\right)\vec{e_\theta} \\
&= \frac{1}{r\,\sin\theta}(2r^2\cos\theta\sin\theta - 0)\,\vec{e_r} + \frac{1}{r}(3r^2 - r^2\cos\theta)\,\vec{e_\varphi} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}r^2\cos\varphi - 3r^2\sin\theta\right)\vec{e_\theta} \\
&= 2r\cos\theta\,\vec{e_r} + r(3-\cos\theta)\,\vec{e_\varphi} + r\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\theta} - 3\sin\theta\right)\vec{e_\theta}
\end{aligned}$$

Remarque : si $\overrightarrow{A}(x,y) = A_x(x,y)\,\vec{\imath} + A_y(x,y)\,\vec{\jmath}$ est un champ sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire qu'il ne dépend pas de z et n'a pas de composante en direction $\vec{k}$, alors le champ de vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}$ n'a qu'une composante en direction $\vec{k}$ et il est de la forme

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}(x,y) = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

La preuve est un simple calcul direct à partir de la formule générale de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}$.

Exercice 47 – Champs de gradient

Un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ est un *champ de gradient* si $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f)$ pour une fonction f qui s'appelle *potentiel scalaire* de $\overrightarrow{V}$. Dire si les champs suivants sont des champs de gradient (en utilisant le Lemme de Poincaré), et si c'est le cas déterminer un potentiel scalaire.

a) $\overrightarrow{V}(x,y) = (y,x)$

b) $\overrightarrow{V}(x,y) = (x+y, x-y)$

c) $\overrightarrow{V}(x,y) = ye^{xy}\,\vec{\imath} - xe^{xy}\,\vec{\jmath}$

d) $\overrightarrow{V}(x,y) = \cos x\,\vec{\imath} + \sin y\,\vec{\jmath}$

e) $\overrightarrow{V}(x,y) = (y+\frac{1}{x}, x+\frac{1}{y})$

f) $\overrightarrow{V}(x,y) = (3x^2y+2x+y^3)\vec{\imath} + (x^3+3xy^2-2y)\vec{\jmath}$

g) $\overrightarrow{V}(x,y,z) = \frac{2}{x}\,\vec{\imath} + \frac{1}{y}\,\vec{\jmath} - \frac{1}{z}\,\vec{k}$

h) $\overrightarrow{V}(x,y,z) = (yz, -zx, xy)$

i) $\overrightarrow{V}(x,y,z) = (x^2-yz)\vec{\imath} + (y^2-zx)\vec{\jmath} + (z^2-xy)\vec{k}$

Corrigé

Le **Lemme de Poincaré** dit que sur tout sous-ensemble D du domaine de définition de $\overrightarrow{V}$ qui est **simplement connexe**, on a l'équivalence

$$\overrightarrow{V} \text{ admet un potentiel sur } D \quad \text{si et seulement si} \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V} = \vec{0}.$$

On utilise ce théorème de deux façons :

— Si $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V} = \vec{0}$, alors $\overrightarrow{V}$ admet un potentiel sur tout sous-ensemble simplement connexe D de son domaine de de définition.

— Si $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V} \neq \vec{0}$, alors $\overrightarrow{V}$ n'admet pas de potentiel, sur n'importe quel sous-ensemble du domaine de définition de $\overrightarrow{V}$.

On rappelle aussi que **avoir un potentiel sur** D et **être un champ conservatif sur** D sont synonymes, et signifient tous les deux qu'il existe une fonction réelle f telle que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f$.

N.B. En physique, cela signifie plutôt qu'il existe un champ scalaire ϕ tel que $\overrightarrow{V} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$. N'oubliez pas de vérifier dans quel sens est utilisé le mot *potentiel*.

Si $\overrightarrow{V}$ admet un potentiel f, pour le trouver il faut intégrer l'équation $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f$.

a) Pour le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,y) = (y,x) = y\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath}$ sur $\mathbb{R}^2$, on a (cf. la Remarque plus haut) :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(y)\right)\vec{k} = (1-1)\,\vec{k} = \vec{0}.$$

Puisque le domaine de définition de $\overrightarrow{V}$ est tout le plan $\mathbb{R}^2$, qui est simplement connexe, par le Lemme de Poincaré on conclut que $\overrightarrow{V}$ est conservatif sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire qu'il admet un potentiel scalaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Cherchons un potentiel f tel que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f$, c'est-à-dire

$$y\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{\jmath} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x & (2) \end{cases}$$

On intègre (1) dans la seule variable x et on obtient la primitive de $\frac{\partial f}{\partial x} = y$ par rapport à x, qui est détérminée à moins d'une valeur constante en x, c'est-à-dire, ici, une fonction de la seule variable y :

$$f(x,y) = \int y\,dx = xy + g(y),$$

d'où, par dérivation, on déduit que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + g'(y) \qquad (3).$$

Si on identifie les deux expressions (3) = (2) de $\frac{\partial f}{\partial y}$ on a alors

$$x + g'(y) = x \quad \Longrightarrow \quad g'(y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad g(y) = \text{const.}$$

Finalement, on peut choisir comme potentiel de $\overrightarrow{V}$ la fonction $f(x,y) = xy$, obtenue en prenant $g(y) = \text{const} = 0$, et tous les potentiels de $\overrightarrow{V}$ sont de la forme

$$f(x,y) = xy + c, \qquad \text{avec } c \in \mathbb{R} \text{ une constante quelconque.}$$

b) Pour le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,y) = (x+y, x-y) = (x+y)\,\vec{\imath} + (x-y)\,\vec{\jmath}$ sur $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(x-y) - \frac{\partial}{\partial y}(x+y)\right)\vec{k} = (1-1)\,\vec{k} = \vec{0}.$$

Puisque le domaine de définition de $\overrightarrow{V}$ est tout le plan $\mathbb{R}^2$, qui est simplement connexe, par le Lemme de Poincaré on conclut que $\overrightarrow{V}$ est conservatif sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire qu'il admet un potentiel scalaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Cherchons un potentiel f tel que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f$, c'est-à-dire

$$(x+y)\vec{\imath} + (x-y)\,\vec{\jmath} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{\jmath} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = x+y & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x-y & (2) \end{cases}$$

On intègre (1) en x :

$$f(x,y) = \int (x+y)\,dx = \frac{1}{2}\,x^2 + xy + g(y)$$

et on dérive par rapport à y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + g'(y) \overset{(2)}{=} x - y \quad \Longrightarrow \quad g'(y) = -y \quad \Longrightarrow \quad g(y) = -\int y\,dy = -\frac{1}{2}\,y^2 + c.$$

Finalement, on peut choisir comme potentiel de $\overrightarrow{V}$ la fonction $f(x,y) = \frac{1}{2}\,x^2 + xy - \frac{1}{2}\,y^2$, et tous les potentiels de $\overrightarrow{V}$ sont de la forme

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\,x^2 + xy - \frac{1}{2}\,y^2 + c, \qquad \text{avec } c \in \mathbb{R} \text{ une constante quelconque.}$$

c) Pour le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,y) = ye^{xy}\,\vec{\imath} - xe^{xy}\,\vec{\jmath}$ sur $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}(-xe^{xy}) - \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy})\right)\vec{k} \\ &= (-e^{xy} - xye^{xy} - e^{xy} - xye^{xy})\,\vec{k} \neq \vec{0}. \end{aligned}$$

Puisque le rotationnel de $\overrightarrow{V}$ n'est pas identiquement nul, par le Lemme de Poincaré on conclut que $\overrightarrow{V}$ n'est pas conservatif, il n'admet pas de potentiel scalaire.

d) Pour le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,y) = \cos x\,\vec{\imath} + \sin y\,\vec{\jmath}$ sur $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(\sin y) - \frac{\partial}{\partial y}(\cos x)\right)\vec{k} = (0-0)\,\vec{k} = \vec{0}.$$

Puisque le domaine de définition de $\overrightarrow{V}$ est tout le plan $\mathbb{R}^2$, qui est simplement connexe, par le Lemme de Poincaré on conclut que $\overrightarrow{V}$ est conservatif sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire qu'il admet un potentiel scalaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Cherchons un potentiel f tel que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\,f$, c'est-à-dire

$$\cos x\,\vec{\imath} + \sin y\,\vec{\jmath} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{\jmath} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos x & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \sin y & (2) \end{cases}$$

On intègre (1) en x :

$$f(x,y) = \int \cos x\,dx = \sin x + g(y)$$

et on dérive par rapport à y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = g'(y) \overset{(2)}{=} \sin y \quad \Longrightarrow \quad g(y) = \int \sin y\,dy = -\cos y + c.$$

Finalement, on peut choisir comme potentiel de $\overrightarrow{V}$ la fonction $f(x,y) = \sin x - \cos y$, et tous les potentiels de $\overrightarrow{V}$ sont de la forme

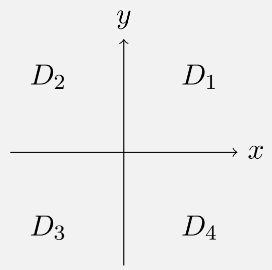
$$f(x,y) = \sin x - \cos y + c, \qquad \text{avec } c \in \mathbb{R} \text{ une constante quelconque.}$$

e) Pour le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,y) = \left(y + \dfrac{1}{x}\right)\,\vec{\imath} + \left(x + \dfrac{1}{y}\right)\,\vec{\jmath}$ sur $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(x + \frac{1}{y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(y + \frac{1}{x}\right)\right)\vec{k} = (1-1)\,\vec{k} = \vec{0}.$$

Cette fois, le domaine de définition de $\vec{V}$ n'est pas tout le plan $\mathbb{R}^2$, parce que les sous-ensembles où $x = 0$ ou bien $y = 0$ ne sont pas admis. Puisque ces deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ correspondent aux deux axes, respectivement Oy et Ox, le domaine de définition de $\vec{V}$ est l'*union disjointe* (c'est-à-dire l'union d'ensembles qui ont intersection nulle) des quatre quadrants

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{(x,y) \mid x > 0,\ y > 0\} \\
D_2 &= \{(x,y) \mid x < 0,\ y > 0\} \\
D_3 &= \{(x,y) \mid x < 0,\ y < 0\} \\
D_4 &= \{(x,y) \mid x > 0,\ y < 0\}
\end{aligned}$$



Le domaine $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$ n'est pas simplement connexe, car il n'est pas connexe. Mais chaque sous-ensemble D_i, avec $i = 1, 2, 3, 4$, est simplement connexe. Par le Lemme de Poincaré on conclut que $\vec{V}$ est conservatif sur chaque domaine D_i, c'est-à-dire qu'il admet un potentiel scalaire $f_i : D_i \to \mathbb{R}$ pour tout $i = 1, ..., 4$.

Cherchons f_i tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f_i$ sur D_i, c'est-à-dire une fonction telle que pour tout $(x, y) \in D_i$ on a

$$\left(y + \frac{1}{x}\right) \vec{\imath} + \left(x + \frac{1}{y}\right) \vec{\jmath} = \frac{\partial f_i}{\partial x}\, \vec{\imath} + \frac{\partial f_i}{\partial y}\, \vec{\jmath} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f_i}{\partial x} = y + \dfrac{1}{x} & (1) \\[2mm] \dfrac{\partial f_i}{\partial y} = x + \dfrac{1}{y} & (2) \end{cases}$$

On intègre (1) en x :

$$f_i(x, y) = \int \left(y + \frac{1}{x}\right) dx = xy + \ln|x| + g_i(y)$$

et on dérive par rapport à y :

$$\frac{\partial f_i}{\partial y} = x + g_i'(y) \overset{(2)}{=} x + \frac{1}{y} \qquad \Longrightarrow \qquad g_i'(y) = \frac{1}{y} \qquad \Longrightarrow \qquad g_i(y) = \int \frac{1}{y}\, dy = \ln|y| + c_i.$$

Finalement, sur chaque D_i on peut choisir comme potentiel de $\vec{V}$ la fonction

$$f_i(x, y) = xy + \ln|x| + \ln|y| + c_i = xy + \ln|xy| + c_i$$

pour tout choix de $c_i \in \mathbb{R}$. Selon le domaine D_i choisi, ce qui varie d'une fonction à l'autre sont les valeurs absolues $|x|$ et $|y|$ et aussi la constante, qui n'a aucune raison d'être la même d'un domaine à l'autre :

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{(x,y) \mid x > 0,\ y > 0\} && \Longrightarrow && f_1(x,y) = xy + \ln(xy) + c_1 \\
D_2 &= \{(x,y) \mid x < 0,\ y > 0\} && \Longrightarrow && f_2(x,y) = xy + \ln(-xy) + c_2 \\
D_3 &= \{(x,y) \mid x < 0,\ y < 0\} && \Longrightarrow && f_3(x,y) = xy + \ln(xy) + c_3 \\
D_4 &= \{(x,y) \mid x > 0,\ y < 0\} && \Longrightarrow && f_4(x,y) = xy + \ln(-xy) + c_4.
\end{aligned}$$

f) Pour le champ de vecteurs $\vec{V}(x, y) = (3x^2y + 2x + y^3)\, \vec{\imath} + (x^3 + 3xy^2 - 2y)\, \vec{\jmath}$ sur $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{V} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^3 + 3xy^2 - 2y) - \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y + 2x + y^3)\right) \vec{k} \\
&= (3x^2 + 3y^2 - 3x^2 - 3y^2)\, \vec{k} = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Puisque le domaine de définition de $\vec{V}$ est tout le plan $\mathbb{R}^2$, qui est simplement connexe, par le Lemme de Poincaré on conclut que $\vec{V}$ est conservatif sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire qu'il admet un potentiel scalaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Cherchons un potentiel f tel que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$, c'est-à-dire

$$(3x^2y + 2x + y^3)\,\vec{\imath} + (x^3 + 3xy^2 - 2y)\,\vec{\jmath} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{\jmath} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + 2x + y^3 & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 3xy^2 - 2y & (2) \end{cases}$$

On intègre (1) en x :

$$f(x,y) = \int (3x^2y + 2x + y^3)\,dx = x^3y + x^2 + xy^3 + g(y)$$

et on dérive par rapport à y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 3xy^2 + g'(y) \overset{(2)}{=} x^3 + 3xy^2 - 2y \quad \Longrightarrow \quad g'(y) = -2y \quad \Longrightarrow \quad g(y) = -\int 2y\,dy = -y^2 + c.$$

Finalement, les potentiels de $\overrightarrow{V}$ sont de la forme

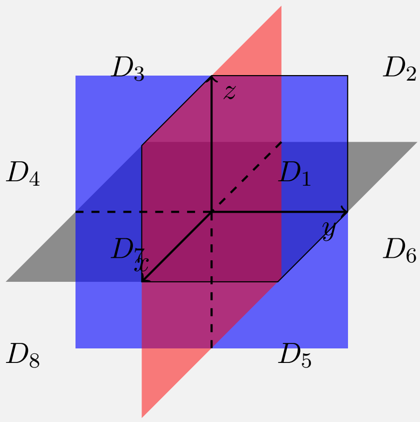
$$f(x,y) = x^3y + xy^3 + x^2 - y^2 + c, \qquad \text{avec } c \in \mathbb{R} \text{ une constante quelconque.}$$

g) Pour le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,y,z) = \dfrac{2}{x}\,\vec{\imath} + \dfrac{1}{y}\,\vec{\jmath} - \dfrac{1}{z}\,\vec{k}$ sur $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V} &= \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{y}\right)\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2}{x}\right)\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2}{x}\right)\right)\vec{k} \\ &= (0-0)\,\vec{\imath} - (0-0)\,\vec{\jmath} + (0-0)\,\vec{k} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Cette fois, le domaine de définition de $\overrightarrow{V}$ n'est pas tout l'espace $\mathbb{R}^3$, parce que les sous-ensembles où $x = 0$, $y = 0$ ou bien $z = 0$ ne sont pas admis. Puisque ces trois sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ correspondent aux trois plans contenant les axes à deux à deux, respectivement les plans yOz, xOz et xOy, le domaine de définition de $\overrightarrow{V}$ est l'union disjointe des huit quadrants

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x,y,z) \mid x > 0,\ y > 0,\ z > 0\} \\ D_2 &= \{(x,y,z) \mid x < 0,\ y > 0,\ z > 0\} \\ D_3 &= \{(x,y,z) \mid x < 0,\ y < 0,\ z > 0\} \\ D_4 &= \{(x,y,z) \mid x > 0,\ y < 0,\ z > 0\} \\ D_5 &= \{(x,y,z) \mid x > 0,\ y > 0,\ z < 0\} \\ D_6 &= \{(x,y,z) \mid x < 0,\ y > 0,\ z < 0\} \\ D_7 &= \{(x,y,z) \mid x < 0,\ y < 0,\ z < 0\} \\ D_8 &= \{(x,y,z) \mid x > 0,\ y < 0,\ z < 0\} \end{aligned}$$



Le domaine $D = \bigcup_{i=1}^{8} D_i$ n'est pas simplement connexe, car il n'est pas connexe. Mais chaque sous-ensemble D_i, avec $i = 1, 2, \ldots, 8$, est simplement connexe. Par le Lemme de Poincaré on conclut que $\overrightarrow{V}$ est conservatif sur chaque domaine D_i, c'est-à-dire qu'il admet un potentiel scalaire $f_i : D_i \to \mathbb{R}$ pour tout $i = 1, ..., 8$.

Cherchons f_i tel que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f_i$ sur D_i, c'est-à-dire une fonction telle que pour tout $(x,y,z) \in D_i$ on a

$$\frac{2}{x}\,\vec{\imath} + \frac{1}{y}\,\vec{\jmath} + \frac{1}{z}\,\vec{k} = \frac{\partial f_i}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial f_i}{\partial y}\,\vec{\jmath} + \frac{\partial f_i}{\partial z}\,\vec{k} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f_i}{\partial x} = \dfrac{2}{x} & (1) \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial y} = \dfrac{1}{y} & (2) \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial z} = \dfrac{1}{z} & (2) \end{cases}$$

On intègre (1) en x :

$$f_i(x,y,z) = \int \frac{2}{x}\,dx = 2\ln|x| + g_i(y,z)$$

et on dérive par rapport à y :

$$\frac{\partial f_i}{\partial y} = \frac{\partial g_i(y,z)}{\partial y} \overset{(2)}{=} \frac{1}{y} \qquad \Longrightarrow \qquad g_i(y,z) = \int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y| + h_i(z).$$

Donc

$$f_i(x,y,z) = 2\ln|x| + \ln|y| + h_i(z)$$

et on dérive par rapport à z :

$$\frac{\partial f_i}{\partial z} = h_i'(z) \overset{(3)}{=} \frac{1}{z} \qquad \Longrightarrow \qquad h_i(z) = \int \frac{1}{z}\,dz = \ln|z| + c_i.$$

Finalement, sur chaque D_i on peut choisir comme potentiel de $\vec{V}$ la fonction

$$f_i(x,y,z) = 2\ln|x| + \ln|y| + \ln|z| + c_i = \ln|x^2yz| + c_i$$

pour tout choix de $c_i \in \mathbb{R}$. Selon le domaine D_i choisi, ce qui varie d'une fonction à l'autre sont les valeurs absolues $|x|$ et $|y|$ et aussi la constante c_i.

h) Pour le champ de vecteurs $\vec{V}(x,y,z) = yz\,\vec{\imath} - zx\,\vec{\jmath} + xy\,\vec{k}$ sur $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(-zx)\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(yz)\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(-zx) - \frac{\partial}{\partial y}(yz)\right)\vec{k}\\ &= (x+x)\,\vec{\imath} + (y-y)\,\vec{\jmath} + (-z-z)\,\vec{k} \neq \vec{0}.\end{aligned}$$

Puisque le rotationnel de $\vec{V}$ n'est pas identiquement nul, par le Lemme de Poincaré on conclut que $\vec{V}$ n'est pas conservatif, il n'admet pas de potentiel scalaire.

i) Pour le champ de vecteurs $\vec{V}(x,y,z) = (x^2-yz)\,\vec{\imath} + (y^2-zx)\,\vec{\jmath} + (z^2-xy)\,\vec{k}$ sur $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(z^2-xy) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2-zx)\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(z^2-xy) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2-yz)\right)\vec{\jmath}\\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(y^2-zx) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2-yz)\right)\vec{k}\\ &= (-x+x)\,\vec{\imath} + (-y+y)\,\vec{\jmath} + (-z+z)\,\vec{k} = \vec{0}.\end{aligned}$$

Puisque le domaine de définition de $\vec{V}$ est tout le plan $\mathbb{R}^2$, qui est simplement connexe, par le Lemme de Poincaré on conclut que $\vec{V}$ est conservatif sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire qu'il admet un potentiel scalaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Cherchons un potentiel f tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f$, c'est-à-dire

$$(x^2-yz)\,\vec{\imath} + (y^2-zx)\,\vec{\jmath} + (z^2-xy)\,\vec{k} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = x^2 - yz & (1)\\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = y^2 - zx & (2)\\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = z^2 - xy & (3)\end{cases}$$

On intègre (1) en x :

$$f(x,y,z) = \int (x^2-yz)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - xyz + g(y,z)$$

et on dérive par rapport à y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -xz + \frac{\partial g(y,z)}{\partial z} \overset{(2)}{=} y^2 - zx \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial g(y,z)}{\partial z} = y^2 \quad \Longrightarrow \quad g(y,z) = \int y^2\, dy = \frac{1}{3}\, y^3 + h(z).$$

Donc

$$f(x,y,z) = \frac{1}{3}\, x^3 - xyz + \frac{1}{3}\, y^3 + h(z)$$

et on dérive par rapport à z :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -xy + h'(z) \overset{(3)}{=} Z^2 - xy \quad \Longrightarrow \quad h_i(z) = \int \frac{1}{z}\, dz = \ln|z| + c_i.$$

Finalement, les potentiels de $\vec{V}$ sont de la forme

$$f(x,y) = x^3 y + xy^3 + x^2 - y^2 + c, \qquad \text{avec } c \in \mathbb{R} \text{ une constante quelconque.}$$

Exercice 48 – Champ central

Un *champ central* dans $\mathbb{R}^3$ est un champ de la forme

$$\vec{V}(x_1, x_2, x_3) = f(r)\ \vec{x}$$

où

$$\vec{x} = x_1\ \vec{\imath} + x_2\ \vec{\jmath} + x_3\ \vec{k} = (x_1, x_2, x_3) \qquad \text{est le vecteur position,}$$
$$r = \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \qquad \text{est la distance du point de l'origine, et}$$
$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \qquad \text{est une application dérivable.}$$

Montrer qu'un champ central est toujours un champ de gradient et calculer son potentiel quand $f(r) = e^r$.

Corrigé

Un champ central s'exprime bien en coordonnées sphériques : le vecteur position est $\vec{x} = r\,\vec{e_r}$ donc

$$\vec{V}(r, \varphi, \theta) = \vec{V}(r) = f(r)\, r\, \vec{e_r}\,.$$

Son rotationnel est nul, car

$$\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{V} = -\frac{1}{r}\, \frac{\partial(r\, f(r))}{\partial \theta}\, \vec{e_\varphi} + \frac{1}{r\, \sin\theta}\, \frac{\partial(r\, f(r))}{\partial \varphi}\, \vec{e_\theta} = \vec{0}.$$

Le domaine de définition de $\vec{V}$ est tout $\mathbb{R}^3$, car il est bien défini en dehors de l'origine (quand $r \neq 0$), et dans l'origine, même si $\vec{e_r}$ n'est pas défini, le champ $\vec{V}$ est défini car il vaut zéro, puisque $r = 0$. Alors, par le Lemme de Poincaré, le champ $\vec{V}$ est un champ de gradient.

Un potentiel de $\vec{V}$ est un champ scalaire $g(r, \varphi, \theta)$ tel que $vV = \overrightarrow{\text{grad}}\, \phi$, c'est-à-dire

$$r\, f(r)\, \vec{e_r} = \frac{\partial g}{\partial r}\, \vec{e_r} + \frac{1}{r\, \sin\theta}\, \frac{\partial g}{\partial \varphi}\, \vec{e_\varphi} + \frac{1}{r}\, \frac{\partial g}{\partial \theta}\, \vec{e_\theta} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial r} = r\, f(r) & (1) \\ \dfrac{1}{r\, \sin\theta}\, \dfrac{\partial g}{\partial \varphi} = 0 & (2) \\ \dfrac{1}{r}\, \dfrac{\partial g}{\partial \theta} = 0 & (3) \end{cases}$$

Les équations (2) et (3) disent que la fonction g ne dépend pas de φ et de θ, donc $g(r,\varphi,\theta) = g(r)$ s'obtient en intégrant l'équation (1).
Si $f(r) = e^r$, on a $\dfrac{\partial g}{\partial r} = r\, e^r$ et l'éq. (1) s'intègre par parties :

$$g(r) = \int r\, e^r\, dr = r\, e^r - \int e^r\, dr = r\, e^r - e^r = (r-1)\, e^r,$$

à moins d'une constante.

Exercice 49 – Rotationnel [Facultatif]
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\vec{U}, \vec{V}$ deux champs de vecteurs différentiables définis sur $\mathbb{R}^3$. Montrer les relations suivantes :

$$\begin{array}{ll} (1) & \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{U} + \vec{V}) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} \\ (2) & \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\alpha\ \vec{V}) = \alpha\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} \\ (3) & \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(f\ \vec{V}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \wedge \vec{V} + f\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} \\ (4) & \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f) = \vec{0} \qquad \text{si } f \text{ est de classe } C^2. \end{array}$$

Corrigé

Posons $\vec{U} = U_x\,\vec{\imath} + U_y\,\vec{\jmath} + U_z\,\vec{k}$ et $\vec{V} = V_x\,\vec{\imath} + V_y\,\vec{\jmath} + V_z\,\vec{k}$. Alors :

(1) La somme des champs de vectors est donnée par la somme des vecteurs en tout point, c'est-à-dire

$$\vec{U} + \vec{V} = (U_x + V_x)\,\vec{\imath} + (U_y + V_y)\,\vec{\jmath} + (U_z + V_z)\,\vec{k},$$

et on calcule séparément les composantes du rotationnel

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{U} + \vec{V}) = \Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{U} + \vec{V})\Big)_x\ \vec{\imath} + \Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{U} + \vec{V})\Big)_y\ \vec{\jmath} + \Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{U} + \vec{V})\Big)_z\ \vec{k}.$$

La première composante est

$$\begin{aligned} \Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{U} + \vec{V})\Big)_x &= \frac{\partial(U_z + V_z)}{\partial y} - \frac{\partial(U_y + V_y)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial U_z}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ &= \Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}\Big)_x + \Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}\Big)_x, \end{aligned}$$

et également pour les autres on a

$$\begin{aligned} \Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{U} + \vec{V})\Big)_y &= \Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}\Big)_y + \Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}\Big)_y \\ \Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{U} + \vec{V})\Big)_z &= \Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}\Big)_z + \Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}\Big)_z, \end{aligned}$$

donc $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{U} + \vec{V}) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}$.

(2) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ est un nombre, on a

$$\alpha\,\vec{V} = \alpha\, V_x\,\vec{\imath} + \alpha\, V_y\,\vec{\jmath} + \alpha\, V_z\,\vec{k},$$

et le rotationnel

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\alpha\,\vec{V}) = \Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\alpha\,\vec{V})\Big)_x\ \vec{\imath} + \Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\alpha\,\vec{V})\Big)_y\ \vec{\jmath} + \Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\alpha\,\vec{V})\Big)_z\ \vec{k}$$

a composantes

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\alpha\,\vec{V})\right)_x = \frac{\partial(\alpha\,V_z)}{\partial y} - \frac{\partial(\alpha\,V_y)}{\partial z} = \alpha\,\frac{\partial V_z}{\partial y} - \alpha\,\frac{\partial V_y}{\partial z} = \alpha\,\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V})\right)_x,$$

et également

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\alpha\,\vec{V})\right)_y = \alpha\,\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V})\right)_y$$
$$\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\alpha\,\vec{V})\right)_z = \alpha\,\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V})\right)_z,$$

donc $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\alpha\,\vec{V}) = \alpha\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}$.

(3) Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est une fonction, le produit de f par $\vec{V}$ est calculé en tout point et s'écrit

$$f\,\vec{V} = f\,V_x\,\vec{\imath} + f\,V_y\,\vec{\jmath} + f\,V_z\,\vec{k},$$

et son rotationnel s'écrit

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(f\,\vec{V}) = \left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(f\,\vec{V})\right)_x\,\vec{\imath} + \left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(f\,\vec{V})\right)_y\,\vec{\jmath} + \left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(f\,\vec{V})\right)_z\,\vec{k}.$$

Ses composantes se calculent en applicant la règle de Leibniz à la dérivée d'un produit de fonctions :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(f\,\vec{V})\right)_x = \frac{\partial(f\,V_z)}{\partial y} - \frac{\partial(f\,V_y)}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial y}\,V_z + f\,\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z}\,V_y - f\,\frac{\partial V_y}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial y}\,V_z - \frac{\partial f}{\partial z}\,V_y + f\,\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V})\right)_x,$$

et également

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(f\,\vec{V})\right)_y = \frac{\partial f}{\partial z}\,V_x - \frac{\partial f}{\partial x}\,V_z + f\,\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V})\right)_y$$
$$\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(f\,\vec{V})\right)_z = \frac{\partial f}{\partial x}\,V_y - \frac{\partial f}{\partial y}\,V_x + f\,\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V})\right)_z,$$

donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(f\,\vec{V}) &= \left(\frac{\partial f}{\partial y}\,V_z - \frac{\partial f}{\partial z}\,V_y + f\,\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V})\right)_z\right)\vec{\imath} \\ &\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\,V_x - \frac{\partial f}{\partial x}\,V_z + f\,\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V})\right)_y\right)\vec{\jmath} \\ &\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,V_y - \frac{\partial f}{\partial y}\,V_x + f\,\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V})\right)_z\right)\vec{k} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial y}\,V_z - \frac{\partial f}{\partial z}\,V_y\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\,V_x - \frac{\partial f}{\partial x}\,V_z\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,V_y - \frac{\partial f}{\partial y}\,V_x\right)\vec{k} + f\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}.\end{aligned}$$

Or, le produit vectoriel de $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{k}$ et $\vec{V} = V_x\,\vec{\imath} + V_y\,\vec{\jmath} + V_z\,\vec{k}$ vaut exactement

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f \wedge \vec{V} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\,V_z - \frac{\partial f}{\partial z}\,V_y\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\,V_x - \frac{\partial f}{\partial x}\,V_z\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,V_y - \frac{\partial f}{\partial y}\,V_x\right)\vec{k},$$

donc $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(f\,\vec{V}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f \wedge \vec{V} + f\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}$.

(4) Puisque

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{k},$$

les composantes de

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f) = \Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f)\Big)_x\,\vec{\imath} + \Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f)\Big)_y\,\vec{\jmath} + \Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f)\Big)_z\,\vec{k}$$

sont

$$\begin{aligned}
\Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f)\Big)_x &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0\\
\Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f)\Big)_y &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0\\
\Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f)\Big)_z &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0
\end{aligned}$$

si la fonction f est de classe C^2, par le Théorème de Schwarz.

TD 10 – CHAMPS INCOMPRESSIBLES

Exercice 50 – Divergence
Calculer la divergence des champs de vecteurs suivants :

a) $\overrightarrow{V}(x,y) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$

b) $\overrightarrow{V}(x,y) = (x+1)\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$

c) $\overrightarrow{V}(x,y) = y\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath}$

d) $\overrightarrow{V}(\rho,\varphi) = \rho\,\vec{e_\varphi}$

e) $\overrightarrow{V}(\rho,\varphi) = \vec{e_\rho} + \rho\,\vec{e_\varphi}$

f) $\overrightarrow{V}(x,y,z) = \vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath} + \vec{k}$

g) $\overrightarrow{V}(x,y,z) = \vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + \vec{k}$

h) $\overrightarrow{V}(r,\varphi,\theta) = r\,\vec{e_\varphi} + r\,\vec{e_\theta}$

Corrigé

On utilise les formules de div $\overrightarrow{A}$ du formulaire, en choisissant celle adaptée aux coordonnées :

a) $\overrightarrow{V}(x,y) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$

$$\operatorname{div}\overrightarrow{V}(x,y) = \frac{\partial(1)}{\partial x} + \frac{\partial(1)}{\partial y} = 0.$$

b) $\overrightarrow{V}(x,y) = (x+1)\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$

$$\operatorname{div}\overrightarrow{V}(x,y) = \frac{\partial(x+1)}{\partial x} + \frac{\partial(y)}{\partial y} = 1 + 1 = 2.$$

c) $\overrightarrow{V}(x,y) = y\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath}$

$$\operatorname{div}\overrightarrow{V}(x,y) = \frac{\partial(y)}{\partial x} + \frac{\partial(x)}{\partial y} = 0 + 0 = 0.$$

d) $\overrightarrow{V}(\rho,\varphi) = \rho\,\vec{e_\varphi}$

$$\operatorname{div}\overrightarrow{V}(\rho,\varphi) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho\cdot 0)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho)}{\partial \varphi} = 0 + 0 = 0.$$

e) $\overrightarrow{V}(\rho,\varphi) = \vec{e_\rho} + \rho\,\vec{e_\varphi}$

$$\operatorname{div}\overrightarrow{V}(\rho,\varphi) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho\cdot 1)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho)}{\partial \varphi} = \frac{1}{\rho} + 0 = \frac{1}{\rho}.$$

f) $\overrightarrow{V}(x,y,z) = \vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath} + \vec{k}$

$$\operatorname{div}\overrightarrow{V}(x,y,z) = \frac{\partial(1)}{\partial x} + \frac{\partial(2)}{\partial y} + \frac{\partial(1)}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0.$$

g) $\overrightarrow{V}(x,y,z) = \vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + \vec{k}$

$$\operatorname{div}\overrightarrow{V}(x,y,z) = \frac{\partial(1)}{\partial x} + \frac{\partial(y)}{\partial y} + \frac{\partial(1)}{\partial z} = 0 + 1 + 0 = 1.$$

h) $\overrightarrow{V}(r,\varphi,\theta) = r\,\vec{e_\varphi} + r\,\vec{e_\theta}$

$$\operatorname{div}\overrightarrow{V}(r,\varphi,\theta) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\cdot 0)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(r)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\cdot r)}{\partial \theta} = 0 + 0 + \frac{r\cos\theta}{r\sin\theta} = \cot\theta.$$

Exercice 51 – Divergence
Pour quelle fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a-t-on $\operatorname{div} \vec{V} = 0$ pour les champs de vecteurs $\vec{V}$ suivants :

i) $\vec{V}(x,y,z) = xz\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + (f(z) - z^2/2)\,\vec{k}$

ii) $\vec{V}(x,y,z) = xf(y)\,\vec{\imath} - f(y)\,\vec{\jmath}$

iii) $\vec{V}(x,y,z) = xf(x)\,\vec{\imath} - y\,vj - zf(x)\,\vec{k}$

Corrigé

i) Pour $\vec{V}(x,y,z) = xz\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + (f(z) - z^2/2)\,\vec{k}$ on a

$$\operatorname{div} \vec{V}(x,y,z) = \frac{\partial(xz)}{\partial x} + \frac{\partial(y)}{\partial y} + \frac{\partial(f(z) - z^2/2)}{\partial z} = z + 1 + f'(z) - z = f'(z) + 1,$$

alors

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad &\iff \quad f'(z) + 1 = 0 \quad \iff \quad f'(z) = -1 \\ &\iff \quad f(z) = -z + a \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

ii) Pour $\vec{V}(x,y,z) = xf(y)\,\vec{\imath} - f(y)\,\vec{\jmath}$ on a

$$\operatorname{div} \vec{V}(x,y,z) = \frac{\partial(xf(y))}{\partial x} - \frac{\partial f(y)}{\partial y} = f(y) - f'(y),$$

alors

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad \iff \quad f'(y) = f(y) \quad \iff \quad f(y) = be^y \quad \text{pour tout } b \in \mathbb{R}.$$

iii) Pour $\vec{V}(x,y,z) = xf(x)\,\vec{\imath} - y\,vj - zf(x)\,\vec{k}$ on a

$$\operatorname{div} \vec{V}(x,y,z) = \frac{\partial(xf(x))}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} - \frac{\partial(zf(x))}{\partial z} = f(x) + xf'(x) - 1 - f(x) = xf'(x) - 1,$$

alors

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad &\iff \quad xf'(x) - 1 = 0 \quad \iff \quad f'(x) = \frac{1}{x} \\ &\iff \quad f(x) = \ln|x| + c \quad \text{pour tout } c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice 52 – Divergence
Pour les champs de vecteurs $\vec{E}$ suivants, définis sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, calculer la divergence en fonction de $\rho = \|\vec{OM}\|$ où $M = (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) $\vec{E}(M) = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$

b) $\vec{E}(M) = \|\vec{OM}\| \cdot \vec{OM}$

c) $\vec{E}(M) = \left(\frac{\|\vec{OM}\|^2 + 1}{\|\vec{OM}\|}\right) \cdot \vec{OM}$

Corrigé

Cela revient à écrire le champ $\vec{E}$ en coordonnées polaires $\rho = \|\vec{OM}\|$, qui donne la distance de M au centre, et φ l'angle de rotation. Le vecteur position est alors $\vec{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} = \rho\,\vec{e_\rho}$ et on a :

a) $\vec{E}(M) = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|} = \dfrac{\rho\,\vec{e_\rho}}{\rho} = \vec{e_\rho}$, donc $\quad \operatorname{div} \vec{E}(\rho) = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial(\rho \cdot 1)}{\partial \rho} = \dfrac{1}{\rho}.$

b) $\vec{E}(M) = \|\vec{OM}\| \cdot \vec{OM} = \rho^2\, \vec{e_\rho}$, donc $\qquad \operatorname{div} \vec{E}(\rho) = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial(\rho\cdot\rho^2)}{\partial\rho} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\rho^3}{\partial\rho} = \dfrac{3\rho^2}{\rho} = 3\rho.$

c) $\vec{E}(M) = \left(\frac{\|\vec{OM}\|^2+1}{\|\vec{OM}\|}\right)\cdot \vec{OM} = \dfrac{\rho^2+1}{\rho}\,\rho\,\vec{e_\rho} = (\rho^2+1)\,\vec{e_\rho}$, donc

$$\operatorname{div} \vec{E}(\rho) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho(\rho^2+1)}{\partial\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho^3+\rho}{\partial\rho} = \frac{3\rho^2+1}{\rho}.$$

Exercice 53 – Champs à potentiel vectoriel
Un champ de vecteurs $\vec{B}$ admet un *potentiel vectoriel* s'il esiste un champ vectoriel $\vec{A}$ tel que $\vec{B} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A}$. Dire si les champs suivants admettent un potentiel vectoriel (en utilisant le Lemme de Poincaré), et si c'est le cas en trouver un.

a) $\vec{B}(x,y,z) = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$
b) $\vec{B}(x,y,z) = x\,\vec{\imath} + yz\,\vec{\jmath} - x\,\vec{k}$
c) $\vec{B}(x,y,z) = 2xyz\,\vec{\imath} - y^2z\,\vec{\jmath}$

Corrigé

Soit $\vec{B}$ un champ de vecteurs avec domaine de définition $D_{\vec{B}} \subset \mathbb{R}^3$. Pour résoudre cet exercice on utilise deux résultats de cours :

1) Le Lemme de Poincaré (version II) dit que si $\operatorname{div}\vec{B} = 0$, alors pour tout sous-ensemble $D \subset D_{\vec{B}}$ *contractile* il existe un champ de vecteurs $\vec{A}$ défini sur D tel que $\vec{B} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A}$. Donc $\vec{A}$ est *un* potentiel vectoriel de $\vec{B}$.

2) Si $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A} = \vec{B}$ sur D, alors on a aussi $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,(\vec{A} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\phi) = \vec{B}$ pour tout champ scalaire ϕ défini sur D.
De plus, *tous* les potentiels vectoriels de $\vec{B}$ sur D sont de la forme $\vec{A} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\phi$.

a) Pour $\vec{B}(x,y,z) = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$ on a $\operatorname{div}\vec{B} = 0$. Donc, par le Lemme de Poincaré II, $\vec{B}$ admet un potentiel vectoriel $\vec{A}$ défini sur tout sous-ensemble contractile du domaine de définition de $\vec{B}$. Puisque $D_{\vec{B}} = \mathbb{R}^3$ est lui-même contractile, on déduit qu'il existe un potentiel vectoriel $\vec{A}$ défini sur $\mathbb{R}^3$.
Cherchons-le : un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ inconnu s'écrit sous la forme

$$\vec{A}(x,y,z) = f(x,y,z)\,\vec{\imath} + g(x,y,z)\,\vec{\jmath} + h(x,y,z)\,\vec{k},$$

où f, g, h sont trois fonctions inconnues, et on a

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Pour le champ $\vec{B}(x,y,z) = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$, on a donc

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A} = \vec{B} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial y} - \dfrac{\partial g}{\partial z} = -1 & (1) \\ \dfrac{\partial h}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial z} = -1 & (2) \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = -1 & (3) \end{cases} \qquad (*)\ .$$

Il existe une infinité de fonctions f, g et h qui vérifient ce système, il nous suffit d'en trouver trois. Puisque chaque fonction est déterminée par ses trois dérivées partielles, il nous faudrait $3 \times 3 = 9$ informations pour les déterminer complètement (à moins d'une constante), alors qu'on n'a que 3 contraintes dans le système $(*)$. On a donc $9-3=6$ *choix possibles* pour déterminer trois fonctions f, g et h qui décrivent un potentiel vectoriel de $\overrightarrow{B}$. Ces 6 choix sont arbitraires, chacun peut choisir les conditions qu'il veut, pourvu qu'elles soient compatibles avec le système $(*)$.

Par exemple, choisissons $\boxed{h=0}$ (ce qui fixe 3 choix), plus $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}=0}$, $\boxed{\frac{\partial g}{\partial y}=0}$ et $\boxed{\frac{\partial g}{\partial x}=0}$. Il nous reste à calculer f et g telles que

$$\frac{\partial g}{\partial z}=1 \quad (1), \qquad \frac{\partial f}{\partial z}=1 \quad (2), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=1 \quad (3).$$

Puisqu'on a assumé que g ne dépend pas de x et de y, on a

$$(1) \qquad g(z)=\int dz = z,$$

et puisqu'on a assumé que f ne dépend pas de x on a

$$(2) \qquad f(y,z)=\int dz + F(y) = z+F(y),$$

où $F(y)$ est une fonction inconnue telle que

$$(3) \qquad \frac{\partial f(y,z)}{\partial y}=F'(y)=1 \quad \Longleftrightarrow \quad F(y)=\int dy = y,$$

et qui donne donc $f(y,z)=z+y$. Au final, les potentiels vectoriels de $\overrightarrow{B}$ sur $\mathbb{R}^3$ sont donnés par

$$\overrightarrow{A}(x,y,z)=(y+z)\,\vec{\imath}+z\,\vec{\jmath}+\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi(x,y,z)$$

pour tout champ scalaire $\phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$.

b) Pour $\overrightarrow{B}(x,y,z)=x\,\vec{\imath}+yz\,\vec{\jmath}-x\,\vec{k}$ on a

$$\text{div}\,\overrightarrow{B}=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial(yz)}{\partial y}-\frac{\partial x}{\partial z}=1+z.$$

Puisque $\text{div}\,\overrightarrow{B}\neq 0$, par le Lemme de Poincaré II le champ $\overrightarrow{B}$ n'admet pas de potentiel vectoriel, même pas sur un sous-enemble contractile de son domaine de définition.

c) Pour $\overrightarrow{B}(x,y,z)=2xyz\,\vec{\imath}-y^2z\,\vec{\jmath}$, on a

$$\text{div}\,\overrightarrow{B}=\frac{\partial x}{\partial 2xyz}-\frac{\partial(y^2z)}{\partial y}=2yz-2yz=0.$$

Donc, par le Lemme de Poincaré II, $\overrightarrow{B}$ admet un potentiel vectoriel $\overrightarrow{A}$ défini sur tout sous-ensemble contractile du domaine de définition de $\overrightarrow{B}$. Puisque $D_{\overrightarrow{B}}=\mathbb{R}^3$ est lui-même contractile, on déduit qu'il existe un potentiel vectoriel $\overrightarrow{A}$ défini sur $\mathbb{R}^3$.
Cherchons-le sous la forme

$$\overrightarrow{A}(x,y,z)=f(x,y,z)\,\vec{\imath}+g(x,y,z)\,\vec{\jmath}+h(x,y,z)\,\vec{k},$$

où f,g,h vérifient alors le système

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A}=\overrightarrow{B} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial y}-\dfrac{\partial g}{\partial z}=2xyz & (1)\\ \dfrac{\partial h}{\partial y}-\dfrac{\partial f}{\partial z}=y^2z & (2)\\ \dfrac{\partial g}{\partial x}-\dfrac{\partial f}{\partial y}=0 & (3)\end{cases}.$$

Si on choisit $\boxed{h = 0}$, on obtient le système

$$\frac{\partial g}{\partial z} = -2xyz \quad (1), \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = -y^2 z \quad (2), \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \quad (3).$$

Cette fois, on ne peut pas choisir $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ comme condition de choix, car cela voudrait dire que g ne dépend pas de y alors que sa dérivée $\frac{\partial g}{\partial z}$ dépend bien de y d'après (1). Ne sachant pas quelle condition imposer à g, on reposse à plus tard le choix. Pour l'instant, on a donc

$$(1) \qquad g(x,y,z) = -\int 2xyz\, dz + G(x,y) = -xyz^2 + G(x,y),$$

où $G(x,y)$ est une fonction inconnue. Par contre, le choix $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = 0}$ et bien compatible avec (2) et (3) et on a

$$(2) \qquad f(y,z) = -\int y^2 z\, dz + F(y) = -\frac{1}{2}y^2z^2 + F(y),$$

où $F(y)$ est une fonction inconnue. Pour fixer les deux fonctions $G(x,y)$ et $F(y)$, on a encore l'équation (3) et deux choix à faire : puisque

$$(3) \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = -yz^2 + \frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = -yz^2 + F'(y) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = F'(y),$$

on peut choisir la condition $\boxed{F'(y) = 0}$ (compatible avec tout), qui donne d'un coté

$$F(y) = \text{constante au choix, par ex. } 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f(y,z) = -\frac{1}{2}y^2z^2,$$

et de l'autre

$$(3) \qquad \frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad G(x,y) = G(y) \quad \text{ne dépend pas de } x.$$

Enfin, il nous reste un choix : pour simplifier, on peut prendre $\boxed{G(y) = 0}$, ce qui donne

$$g(x,y,z) = -xyz^2.$$

Au final, les potentiels vectoriels de $\overrightarrow{B}$ sur $\mathbb{R}^3$ sont donnés par

$$\overrightarrow{A}(x,y,z) = -\frac{1}{2}y^2z^2\,\vec{\imath} - xyz^2\,\vec{\jmath} + \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi(x,y,z)$$

pour tout champ scalaire $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Exercice 54 – Divergence [Facultatif]

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}$ deux champs de vecteurs différentiables définis sur $\mathbb{R}^3$. Montrer les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \text{div}\,(\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}) = \text{div}\,\overrightarrow{U} + \text{div}\,\overrightarrow{V} \\
&(2) \quad \text{div}\,(\alpha\,\overrightarrow{V}) = \alpha\,\text{div}\,\vec{V} \\
&(3) \quad \text{div}\,(f\,\overrightarrow{V}) = \overrightarrow{\text{grad}}\,f \cdot \overrightarrow{V} + f\,\text{div}\,\vec{V} \\
&(4) \quad \text{div}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V}) = 0
\end{aligned}$$

Corrigé

Posons $\vec{U} = U_x\,\vec{\imath} + U_y\,\vec{\jmath} + U_z\,\vec{k}$ et $\vec{V} = V_x\,\vec{\imath} + V_y\,\vec{\jmath} + V_z\,\vec{k}$. Alors :

(1) La somme des champs de vectors est donnée par la somme des vecteurs en tout point, c'est-à-dire

$$\vec{U} + \vec{V} = (U_x + V_x)\,\vec{\imath} + (U_y + V_y)\,\vec{\jmath} + (U_z + V_z)\,\vec{k},$$

donc on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\vec{U} + \vec{V}) &= \frac{\partial}{\partial x}(U_x + V_x) + \frac{\partial}{\partial y}(U_y + V_y) + \frac{\partial}{\partial z}(U_z + V_z) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}U_x + \frac{\partial}{\partial x}V_x + \frac{\partial}{\partial y}U_y + \frac{\partial}{\partial y}V_y + \frac{\partial}{\partial z}U_z + \frac{\partial}{\partial z}V_z \\
&= \operatorname{div}\vec{U} + \operatorname{div}\vec{V}.
\end{aligned}$$

(2) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ est un nombre, on a

$$\alpha\,\vec{V} = \alpha\,V_x\,\vec{\imath} + \alpha\,V_y\,\vec{\jmath} + \alpha\,V_z\,\vec{k},$$

donc

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\alpha\,\vec{V}) &= \frac{\partial(\alpha\,V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha\,V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\alpha\,V_z)}{\partial z} \\
&= \alpha\,\frac{\partial V_x}{\partial x} + \alpha\,\frac{\partial V_y}{\partial y} + \alpha\,\frac{\partial V_z}{\partial z} \\
&= \alpha\operatorname{div}\vec{V}.
\end{aligned}$$

(3) Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est une fonction, le produit de f par $\vec{V}$ est calculé en tout point et s'écrit

$$f\,\vec{V} = f\,V_x\,\vec{\imath} + f\,V_y\,\vec{\jmath} + f\,V_z\,\vec{k},$$

donc

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(f\,\vec{V}) &= \frac{\partial(f\,V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(f\,V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(f\,V_z)}{\partial z} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\,V_x + f\,\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,V_y + f\,\frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\,V_z + f\,\frac{\partial V_z}{\partial z} \\
&= \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,f \cdot \vec{V} + f\operatorname{div}\vec{V}.
\end{aligned}$$

(4) Puisque

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\vec{k},$$

on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{V}) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial^2 V_z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 V_y}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 V_z}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y\partial z} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 V_x}{\partial z\partial y} \\
&= \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 V_z}{\partial y\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 V_y}{\partial x\partial z}\right) + \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 V_x}{\partial z\partial y}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

si le champ $\vec{V}$ est de classe C^2, c'est-à-dire ses coefficients V_x, V_y, V_z sont des fonctions réelles de classe C^2, car d'après le Théorème de Schwarz on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ pour toute fonction f de classe C^2.

Exercice 55 – Champ périodique [Facultatif]
Considérons le champ de vecteurs

$$\vec{V}(x,y) = \cos(x)\,\sin(y)\,\vec{\imath} + \sin(x)\,\cos(y)\,\vec{\jmath}.$$

a) Trouver le domaine de définition du champ $\vec{V}$ et montrer que $\vec{V}$ est continu et même lisse.
b) Montrer que les valeurs de $\vec{V}$ sur le carré $D = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ donnent les valeurs de $\vec{V}$ sur tout son domaine de définition (c'est-à-dire que $\vec{V}$ est *périodique* et D est un *domaine de périodicité*).
c) Dessiner les vecteurs $\vec{V}(x,y)$ pour

$$x = 0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4},\ \pi,\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{7\pi}{4},\ 2\pi \qquad \text{et} \qquad y = 0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}.$$

Compléter le dessin des vecteurs de $\vec{V}$ sur D en sachant que $\vec{V}$ est périodique et continu.
d) En suivant les flèches, dessiner les lignes de champs qui partent des points $(0, \pi/4)$, $(\pi/2, 0)$ et $(\pi, \pi/4)$. Que se passe-t-il au point $(\pi/2, \pi/2)$? Que se passe-t-il si on démarre au point $(3\pi/2, \pi/2)$?
e) Le champ $\vec{V}$ est-il conservatif ? S'il l'est, calculer un potentiel scalaire.
f) Le champ $\vec{V}$ est-il incompressible ? S'il l'est, calculer un potentiel vectoriel.

Corrigé

a) Le domaine de définition de $\vec{V}$ est l'ensemble des points du plan $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ qui appartiennent au domaine de définition des deux fonctions

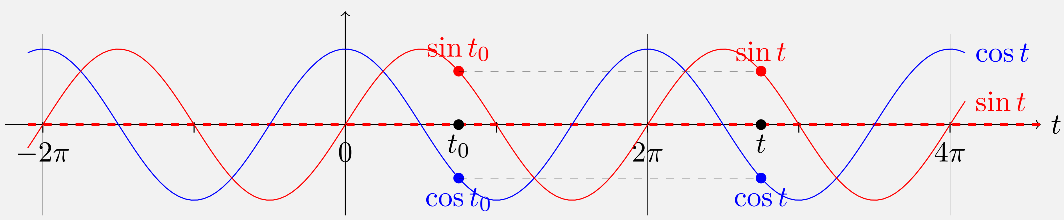
$$V_x(x,y) = \cos(x)\,\sin(y) \qquad \text{et} \qquad V_y(x,y) = \sin(x)\,\cos(y),$$

donc $D_{\vec{V}} = \mathbb{R}^2$. Le champ $\vec{V}$ est continu [respectivement différentiable] si les deux fonctions V_x et V_y le sont. Or, ces deux fonctions sont continues et même lisses, c'est-à-dire différentiables autant de fois qu'on veut, donc $\vec{V}$ l'est aussi.

b) Les fonctions cos et sin sont périodiques de période 2π, c'est-à-dire que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\cos(t + 2\pi\,k) = \cos t \quad \text{et} \quad \sin(t + 2\pi\,k) = \sin t \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z},$$

ou, de façon équivalente, pour tout $t \in \mathbb{R}$ il existe $t_0 \in [0, 2\pi]$ tel que $\cos t = \cos t_0$ et $\sin t = \sin t_0$



Donc, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ il existe $(x_0, y_0) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ tel que

$$(\cos x, \sin x) = (\cos x_0, \sin x_0) \qquad \text{et} \qquad (\cos y, \sin y) = (\cos y_0, \sin y_0)$$

et donc $\vec{V}(x,y) = \vec{V}(x_0, y_0)$ car

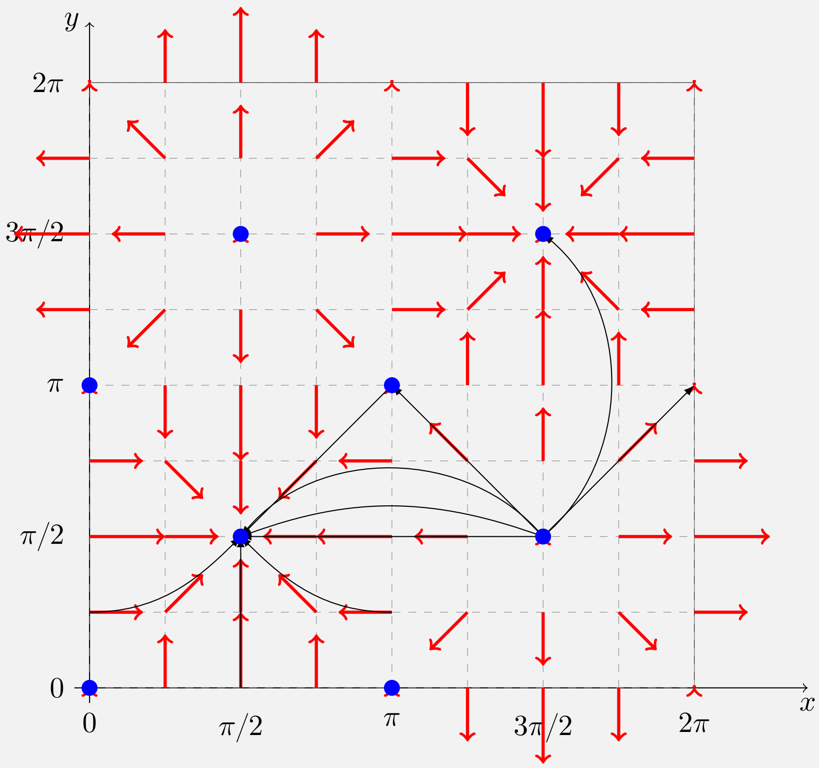
$$\cos x\,\sin y = \cos x_0\,\sin y_0 \qquad \text{et} \qquad \sin x\,\cos y = \sin x_0\,\cos y_0.$$

Donc $\vec{V}$ est périodique, avec domaine de périodicité $D = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

c) D'abord on calcule la valeur du champ $\vec{V}$ dans les points demandés :

	$\vec{V}(x,y)$	$y=0$	$y=\pi/4$	$y=\pi/2$	$y=3\pi/4$	$y=\pi$
$x=0$	$\sin y\,\vec{\imath}$	$\vec{0}$	$\sqrt{2}/2\,\vec{\imath}$	$\vec{\imath}$	$\sqrt{2}/2\,\vec{\imath}$	$\vec{0}$
$x=\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin y\,\vec{\imath}+\cos y\,\vec{\jmath})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{\jmath}$	$\frac{1}{2}(\vec{\imath}+\vec{\jmath})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{\imath}$	$\frac{1}{2}(\vec{\imath}-\vec{\jmath})$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{\jmath}$
$x=\pi/2$	$\cos y\,\vec{\jmath}$	$\vec{\jmath}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{\jmath}$	$\vec{0}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{\jmath}$	$-\vec{\jmath}$
$x=3\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}(-\sin y\,\vec{\imath}+\cos y\,\vec{\jmath})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{\jmath}$	$\frac{1}{2}(-\vec{\imath}+\vec{\jmath})$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{\imath}$	$\frac{1}{2}(-\vec{\imath}-\vec{\jmath})$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{\jmath}$
$x=\pi$	$-\sin y\,\vec{\imath}$	$\vec{0}$	$-\sqrt{2}/2\,\vec{\imath}$	$-\vec{\imath}$	$-\sqrt{2}/2\,\vec{\imath}$	$\vec{0}$
$x=5\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}(-\sin y\,\vec{\imath}-\cos y\,\vec{\jmath})$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{\jmath}$	$\frac{1}{2}(-\vec{\imath}-\vec{\jmath})$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{\imath}$	$\frac{1}{2}(-\vec{\imath}+\vec{\jmath})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{\jmath}$
$x=3\pi/2$	$-\cos y\,\vec{\jmath}$	$-\vec{\jmath}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{\jmath}$	$\vec{0}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{\jmath}$	$\vec{\jmath}$
$x=7\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin y\,\vec{\imath}-\cos y\,\vec{\jmath})$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{\jmath}$	$\frac{1}{2}(\vec{\imath}-\vec{\jmath})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{\imath}$	$\frac{1}{2}(\vec{\imath}+\vec{\jmath})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{\jmath}$

Ensuite on dessine ces vecteurs sur le carré $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$ et on complète en tenant compte de la périodicité et de la continuité des flèches :



d) Les lignes de champs qui partent des points $(0,\pi/4)$, $(\pi/2,0)$ et $(\pi,\pi/4)$ se dessinent en suivant les flèches, qui amènent toutes au point $(\pi/2,\pi/2)$. Ce point “attire” les autres : c'est un point où arrivent toutes les lignes de champ de son entourage (point d'*équilibre stable*), tout comme le point $(3\pi/2,3\pi/2)$.

Au contraire, le point $(3\pi/2,\pi/2)$ “repousse” les lignes de champ : si on est pile dans ce point on ne bouge pas, mais si on s'écarte un tout petit peu de ce point, on tombe sur une ligne de champ qui nous amène très loin dans une diréction qui dépend de notre écart initial (point d'*équilibre instable*). Le point $(\pi/2,3\pi/2)$ a la même propriété.

Enfin, le point (π,π) est l'arrivée d'exactement deux lignes (venant de $(3\pi/2,\pi/2)$ et de $(\pi/2,3\pi/2)$) et le départ de deux autres (allant vers $(\pi/2,\pi/2)$ et $(3\pi/2,3\pi/2)$). Toutes les autres lignes de son entourage l'évitent. Les points $(0,0)$, $(\pi,0)$ et $(0,\pi)$ ont la même propriété.

e) Pour savoir si le champ $\vec{V}$ est conservatif, on calcule son rotationnel :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}(x,y) = \left(\frac{\partial(\sin x\cos y)}{\partial x} - \frac{\partial(\cos x\sin y)}{\partial y}\right)\vec{k} = (\cos x\cos y - \cos x\cos y)\,\vec{k} = \vec{0}.$$

Alors, par le Lemme de Poincaré, $\vec{V}$ est conservatif sur $\mathbb{R}^2$, qui est simplement connexe.
Cherchons un potentiel $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$, c'est-à-dire tel que

$$(1)\quad \frac{\partial f}{\partial x} = \cos x\sin y \qquad \text{et} \qquad (2)\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin x\cos y.$$

On intègre (1) en x :

$$f(x,y) \overset{(1)}{=} \int \cos x\sin y\,dx = \sin x\sin y + g(y),$$

on dérive par rapport à y et on identifie à (2) :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin x\cos y + g'(y) \overset{(2)}{=} \sin x\cos y$$

et on déduit que $g'(y) = 0$, i.e. $g(y) = c$ est constante. Donc

$$f(x,y) = \sin x\sin y + c, \qquad \text{avec } c \in \mathbb{R} \text{ une constante quelconque.}$$

Remarque : Le potentiel "physique" du champ $\vec{V}$, c'est-à-dire le champ scalaire $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tel que $\vec{V} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$, est l'opposé de f,

$$\phi(x,y) = -\sin x\sin y.$$

Cette fonction a huit point critiques (les points bleu du dessin des lignes de champ qui ont des propriétés particulières), dont deux maxima locaux, deux minima locaux et quatre points cols.
En effet, les points critiques de ϕ sont les points qui annullent $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi = -\vec{V}$:

$$\begin{cases} -\cos x\sin y = 0 \\ -\sin x\cos y = 0 \end{cases} \iff (a)\ \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad (b)\ \begin{cases} \sin y = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{array}{ll} (a) & (\pi/2,\pi/2),\ (\pi/2,3\pi/2),\ (3\pi/2,\pi/2),\ (3\pi/2,3\pi/2), \\ (b) & (0,0),\ (0,\pi),\ (\pi,0),\ (\pi,\pi). \end{array}$$

La matrice Hessienne de ϕ est

$$H_\phi(x,y) = \begin{pmatrix} \sin x\sin y & -\cos x\cos y \\ -\cos x\cos y & \sin x\sin y \end{pmatrix}$$

et son déterminant vaut, dans les points de type (a) et dans ceux de type (b),

$$\begin{array}{llll} (a) & \det H_{\phi|\cos x=0,\ \cos y=0} = \sin^2 x\sin^2 y = 1 > 0 & \Longrightarrow & \text{extrema locaux,} \\ (b) & \det H_{\phi|\sin x=0,\ \sin y=0} = -\cos^2 x\cos^2 y = -1 < 0 & \Longrightarrow & \text{points cols.} \end{array}$$

Les points de type (a) sont des maxima ou des minima locaux selon le signe de $\sin x\sin y = \pm 1$:
- aux points $(\pi/2,\pi/2)$ et $(3\pi/2,3\pi/2)$ on a $\sin x\sin y = +1$, ce sont des minima locaux,
- aux points $(\pi/2,3\pi/2)$ et $(3\pi/2,\pi/2)$ on a $\sin x\sin y = -1$, ce sont des maxima locaux.

f) Pour savoir si le champ $\vec{V}$ est incompressible, on calcule sa divergence :

$$\mathrm{div}\,\vec{V}(x,y) = \frac{\partial(\cos x\sin y)}{\partial x} + \frac{\partial(\sin x\cos y)}{\partial y} = -\sin x\sin y - \sin x\sin y \neq \vec{0}.$$

Puisque $\mathrm{div}\,\vec{V} \neq \vec{0}$, ce champ n'est pas incompressible et n'admet pas de potentiel vectoriel.

Exercice 56 – Champ périodique et symétrique [Facultatif]

Considérons le champ de vecteurs

$$\vec{V}(x,y) = \frac{\cos x}{y}\,\vec{\imath} - \frac{\sin x}{y^2}\,\vec{\jmath}.$$

a) Trouver le domaine de définition du champ $\vec{V}$ et montrer que $\vec{V}$ est continu (et lisse).

b) Montrer que $\vec{V}$ est périodique dans la variable x et que la bande $D = [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^*$ est un domaine de périodicité.

c) En sachant que la fonction $\sin x$ est impaire et que la fonction $\cos x$ est paire, montrer qu'il suffit de connaitre les valeurs de $\vec{V}$ pour $y > 0$, car les valeurs en $-y < 0$ se trouvent alors comme

$$\vec{V}(x, -y) = -\vec{V}(-x, y).$$

(C'est-à-dire que $\vec{V}$ est *symétrique* par rapport à une *symétrie centrale*, ou rotation d'angle π).

d) Dessiner les vecteurs $\vec{V}(x,y)$ pour

$$x = 0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4},\ \pi,\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{7\pi}{4},\ 2\pi \qquad \text{et} \qquad y = 1,\ 2,\ 1/2.$$

Compléter le dessin des vecteurs de $\vec{V}$ sur D en sachant que $\vec{V}$ est périodique et continu.

e) En suivant les flèches, dessiner les lignes de champs qui partent des points $(0,1)$, $(\pi/2, 1)$, $(\pi, 1)$, $(5\pi/4, 1)$ et $(3\pi/2, 1)$.

f) Le champ $\vec{V}$ est-il conservatif ? S'il l'est, calculer un potentiel scalaire.

g) Le champ $\vec{V}$ est-il incompressible ? S'il l'est, calculer un potentiel vectoriel.

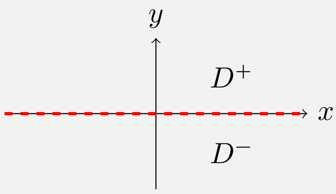
Corrigé

a) Le domaine de définition de $\vec{V}$ est l'ensemble des points du plan $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ qui appartiennent au domaine de définition des deux fonctions

$$V_x(x,y) = \frac{\cos x}{y} \qquad \text{et} \qquad V_y(x,y) = -\frac{\sin x}{y^2},$$

donc, si on indique $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\} = \,]-\infty, 0[\, \cup\,]0, \infty[$, on a

$$\begin{aligned} D_{\vec{V}} &= \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\ \} \\ &= \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \\ &= D^+ \cup D^- \end{aligned}$$



avec $D^+ = \{(x,y) \mid y > 0\}$ et $D^- = \{(x,y) \mid y < 0\}$.
Le champ $\vec{V}$ est continu [respectivement différentiable] si les deux fonctions V_x et V_y le sont. Or, ces deux fonctions sont continues et même lisses, c'est-à-dire différentiables autant de fois qu'on veut, chacune sur son domaine de définition. Donc $\vec{V}$ l'est aussi.

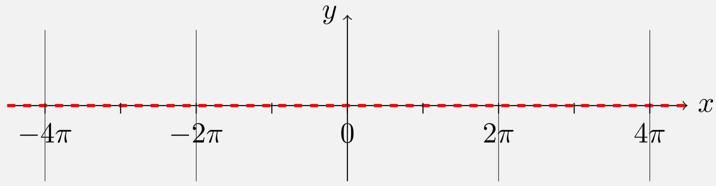
b) Les fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont périodiques de période 2π, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe $x_0 \in [0, 2\pi]$ tel que

$$\cos x = \cos x_0 \quad \text{et} \quad \sin x = \sin x_0.$$

Donc, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ il existe $(x_0, y) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^*$ tel que $\vec{V}(x,y) = \vec{V}(x_0, y)$, car

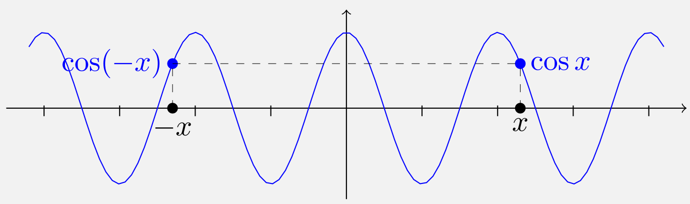
$$\frac{\cos x}{y} = \frac{\cos x_0}{y} \qquad \text{et} \qquad -\frac{\sin x}{y^2} = -\frac{\sin x_0}{y^2}.$$

Donc $\overrightarrow{V}$ est périodique en x, avec domaine de périodicité donné par la bande verticale $D = [0, 2\pi] \times \mathbb{R}*$.



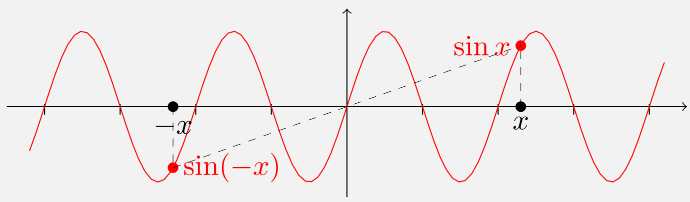
c) La fonction $\cos x$ est paire et la fonction $\sin x$ est impaire, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\cos(-x) = \cos x$$



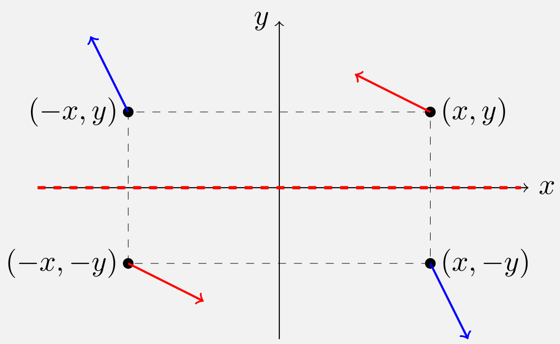
et

$$\sin(-x) = -\sin x$$



Soit $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ un point du domaine de $\overrightarrow{V}$. Alors, au point $(x, -y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V}(x,-y) &= \frac{\cos x}{-y}\,\vec{\imath} - \frac{\sin x}{(-y)^2}\,\vec{\jmath} \\
&= -\frac{\cos x}{y}\,\vec{\imath} - \frac{\sin x}{y^2}\,\vec{\jmath} \\
&= -\frac{\cos(-x)}{y}\,\vec{\imath} - \frac{-\sin(-x)}{y^2}\,\vec{\jmath} \\
&= -\left(\frac{\cos(-x)}{y}\,\vec{\imath} - \frac{\sin(-x)}{y^2}\,\vec{\jmath}\right) \\
&= -\overrightarrow{V}(-x,y).
\end{aligned}$$



Évidemment cette identité s'applique aussi si on part du point $(-x, -y)$ et donne

$$\overrightarrow{V}(-x,-y) = -\overrightarrow{V}(x,y).$$

Finalement, pour le champ $\overrightarrow{V}(x,y) = \dfrac{\cos x}{y}\,\vec{\imath} - \dfrac{\sin x}{y^2}\,\vec{\jmath}$, il est suffisant de connaitre la valeur dans le domaine $[0, 2\pi] \times]0, \infty[$, car, si $x \in [0, 2\pi]$ et $y < 0$, on a

$$\overrightarrow{V}(x,y) = -V(-x,-y) = -\overrightarrow{V}(-x+2\pi, -y),$$

où $-y > 0$ et $-x + 2\pi \in [0, 2\pi]$ vu que $-x \in [-2\pi, 0]$.

Remarque : La propriété $\overrightarrow{V}(-x,-y) = -\overrightarrow{V}(x,y)$ signifie que $\overrightarrow{V}$ est *symétrique* par rapport à une *symétrie centrale*, ou rotation d'angle π.
Si $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une transformation linéaire des vecteurs du plan, qu'on applique aussi aux points $P = (x, y)$ par $T(P) = T(\overrightarrow{OP})$, on dit qu'un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ est **symétrique par rapport à** T, si

$$T\big(\overrightarrow{V}(x,y)\big) = \overrightarrow{V}\big(T(x,y)\big) \qquad \text{pour tout } (x,y).$$

En particulier, la rotation d'angle π est la transformation donnée par la matrice

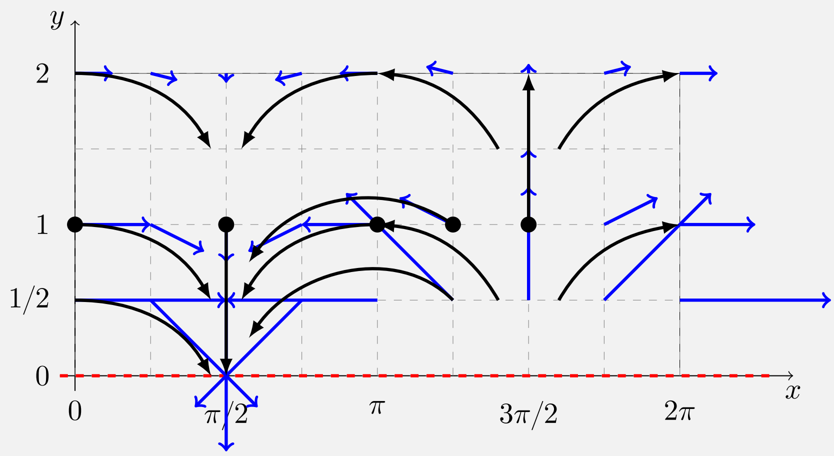
$$\mathrm{Rot}_\pi = \begin{pmatrix} \cos(\pi) & -\sin(\pi) \\ \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

qui donne $\mathrm{Rot}_\pi(x, y) = (-x, -y)$, autrement dit $\mathrm{Rot}_\pi(\vec{V}) = -\vec{V}$ pour tout vecteur $\vec{V}$.

d) D'abord on calcule la valeur du champ $\vec{V}$ dans les points demandés :

	$\vec{V}(x,y)$	$y = 1/2$	$y = 1$	$y = 2$
$x = 0$	$\frac{1}{y}\,\vec{\imath}$	$2\,\vec{\imath}$	$\vec{\imath}$	$\frac{1}{2}\,\vec{\imath}$
$x = \pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{y}\,\vec{\imath} - \frac{1}{y^2}\,\vec{\jmath}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,(2\,\vec{\imath} - 4\,\vec{\jmath})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,(\vec{\imath} - \vec{\jmath})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\,\vec{\imath} - \frac{1}{4}\,\vec{\jmath}\right)$
$x = \pi/2$	$-\frac{1}{y^2}\,\vec{\jmath}$	$-4\,\vec{\jmath}$	$-\vec{\jmath}$	$-\frac{1}{4}\,\vec{\jmath}$
$x = 3\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{y}\,\vec{\imath} - \frac{1}{y^2}\,\vec{\jmath}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,(-2\,\vec{\imath} - 4\,\vec{\jmath})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,(-\vec{\imath} - \vec{\jmath})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{2}\,\vec{\imath} - \frac{1}{4}\,\vec{\jmath}\right)$
$x = \pi$	$-\frac{1}{y}\,\vec{\imath}$	$-2\,\vec{\imath}$	$-\vec{\imath}$	$-\frac{1}{2}\,\vec{\imath}$
$x = 5\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{y}\,\vec{\imath} + \frac{1}{y^2}\,\vec{\jmath}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,(-2\,\vec{\imath} + 4\,\vec{\jmath})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,(-\vec{\imath} + \vec{\jmath})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{2}\,\vec{\imath} + \frac{1}{4}\,\vec{\jmath}\right)$
$x = 3\pi/2$	$\frac{1}{y^2}\,\vec{\jmath}$	$4\,\vec{\jmath}$	$\vec{\jmath}$	$\frac{1}{4}\,\vec{\jmath}$
$x = 7\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{y}\,\vec{\imath} + \frac{1}{y^2}\,\vec{\jmath}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,(2\,\vec{\imath} + 4\,\vec{\jmath})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\,\vec{\imath} + \frac{1}{4}\,\vec{\jmath}\right)$

Ensuite on dessine ces vecteurs sur le carré $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ et on complète en tenant compte de la périodicité et de la continuité des flèches :



e) Les lignes de champs se dessinent en suivant les flèches. Pour ce champ, il n'y a pas de points qui "attirent" ou "repoussent" tous les autres, mais il y a deux lignes verticales droites : celles à $x = \pi/2$ (orientée vers le bas) et celle à $x = 3\pi/2$ (orientée vers le haut). Les autres lignes de champ sont *asymptotiques* à ces deux droites, c'est-à-dire, elles s'y approchent pour des temps infinis négatifs et positifs, sans jamais les toucher.

f) Pour savoir si le champ $\vec{V}$ est conservatif, on calcule son rotationnel :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}(x,y) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\sin x}{y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\cos x}{y}\right)\right)\vec{k} \\ &= \left(-\frac{\cos x}{y^2} + \frac{\cos x}{y^2}\right)\vec{k} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Alors, par le Lemme de Poincaré, $\overrightarrow{V}$ est conservatif sur $\mathbb{R}^2$, qui est simplement connexe. Cherchons un potentiel $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$, c'est-à-dire tel que

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\cos x}{y} \qquad \text{et} \qquad (2) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\sin x}{y^2}.$$

On intègre (1) en x :

$$f(x,y) \overset{(1)}{=} \int \frac{\cos x}{y}\, dx = \frac{\sin x}{y} + g(y),$$

on dérive par rapport à y et on identifie à (2) :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\sin x}{y^2} + g'(y) \overset{(2)}{=} -\frac{\sin x}{y^2}$$

et on déduit que $g'(y) = 0$, i.e. $g(y) = c$ est constante. Donc

$$f(x,y) = \frac{\sin x}{y} + c, \qquad \text{avec } c \in \mathbb{R} \text{ une constante quelconque.}$$

Remarque : Le potentiel "physique" du champ $\overrightarrow{V}$, c'est-à-dire le champ scalaire $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{V} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, \phi$, est l'opposé de f,

$$\phi(x,y) = -\frac{\sin x}{y}.$$

Les points critiques de ϕ sont les points qui annullent $\overrightarrow{\text{grad}}\, \phi = -\overrightarrow{V}$:

$$\begin{cases} -\dfrac{\cos x}{y} = 0 \\ \dfrac{\sin x}{y^2} = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases}$$

ce qui est impossible. Ce potentiel n'a pas de points critiques, donc il n'a pas de points d'équilibre stable ou instable (les extrema locaux), comme le montre le dessin des lignes de champ.

g) Pour savoir si le champ $\overrightarrow{V}$ est incompressible, on calcule sa divergence :

$$\text{div}\, \overrightarrow{V}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos x}{y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\sin x}{y^2}\right) = -\frac{\sin x}{y} + \frac{2\sin x}{y^3} \neq 0.$$

Puisque $\text{div}\, \overrightarrow{V} \neq 0$, ce champ n'est pas incompressible et n'admet pas de potentiel vectoriel.

TD 11 – COURBES ET CIRCULATION

Exercice 57 – Circulation le long d'une courbe
Dessiner les courbes C^+ indiquées, trouver une paramétrisation si elle n'est pas déja donnée et calculer la circulation des champs de vecteurs $\vec{V}$ le long de C^+.

a) $\vec{V}(x,y) = y\,\vec{\imath} - \vec{\jmath}$, $\quad C^+ =$ cycloïde paramétrée par $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, avec $t \in [0, 2\pi]$.

b) $\vec{V}(x,y) = (x^2+1)\,\vec{\jmath}$, $\quad C^+ =$ courbe plane fermée $\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ x : 1 \to 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 0 \\ y : 1 \to 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = 0 \\ x : 0 \to 1 \end{cases}$.

c) $\vec{V}(x,y) = \dfrac{y\,\vec{\imath} - x\vec{\jmath}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\quad C^+ =$ cercle paramétré par $\gamma(t) = R(\cos t, \sin t)$, avec $t \in [0, 2\pi]$.

d) $\vec{V}(\rho, \varphi, z) = \rho\, z\, \vec{e_\varphi}$, $\quad C^+ =$ cercle $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = H \end{cases}$ orienté dans le sens antihoraire sur le plan $x0y$.

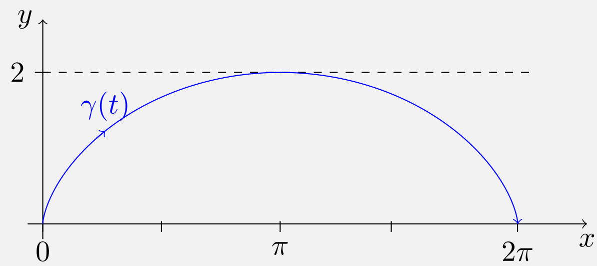
e) $\vec{V}(x,y,z) = x^2 z\,\vec{\imath} - \dfrac{y}{x}\,\vec{\jmath} + \dfrac{xz^2}{y^2}\,\vec{k}$, $\quad C^+ =$ courbe paramétré par $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, avec $t \in]\,0, T]$.

f) $\vec{V}(x,y,z) = \dfrac{x}{y}\,\vec{\imath} + zy\,\vec{\jmath}$, $\quad C^+ =$ arc d'hyperbole $\begin{cases} z = y - x \\ xy = 1 \\ y : 1 \to 2 \end{cases}$.

Corrigé

a) Dessin de la cycloïde paramétrée par $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, avec $t \in [0, 2\pi]$:

$\gamma(0) = (0,0)$
$\gamma(\pi) = (\pi, 2)$
$\gamma(2\pi) = (2\pi, 0)$



Vitesse de la courbe : $\quad \gamma'(t) = (1 - \cos t)\,\vec{\imath} + \sin t\,\vec{\jmath}$

Champ $\vec{V}(x,y) = y\,\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ le long de γ : $\quad \vec{V}(\gamma(t)) = (1 - \cos t)\,\vec{\imath} - \vec{\jmath}$

Circulation de $\vec{V}$ le long de γ : puisque $\displaystyle\int \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}(t + \cos t \sin t)$, on a

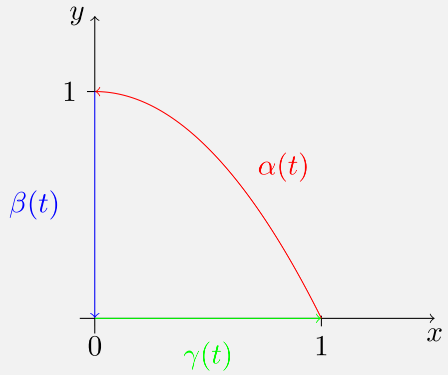
$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{V} \cdot \vec{d\ell} &= \int_0^{2\pi} \vec{V}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \big((1 - \cos t)^2 - \sin t\big)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \big(1 - 2\cos t + \cos^2 t - \sin t\big)\, dt \\
&= \Big[\, t - 2\sin t + \frac{1}{2}\,(t + \sin t \cos t) + \cos t\,\Big]_0^{2\pi} = \frac{3}{2}\,2\pi = 3\pi.
\end{aligned}$$

b) Dessin et paramétrisation de la courbe C^+ : $\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ x : 1 \to 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 0 \\ y : 1 \to 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = 0 \\ x : 0 \to 1 \end{cases}$:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \big(1-t, 1-(1-t)^2\big) \\ &= (1-t, 2t - t^2), \quad t \in [0,1] \end{aligned}$$

$$\beta(t) = (0, 1-t), \quad t \in [0,1]$$

$$\gamma(t) = (t, 0), \quad t \in [0,1]$$



Vitesse des trois courbes :

$$\alpha'(t) = -\vec{\imath} + (2-2t)\,\vec{\jmath}$$

$$\beta'(t) = -\vec{\jmath}$$

$$\gamma'(t) = \vec{\imath}$$

Champ $\overrightarrow{V}(x,y) = (x^2+1)\,\vec{\jmath}$ le long de C^+ :

$$\overrightarrow{V}(\alpha(t)) = \big((1-t)^2+1\big)\,\vec{\jmath} = (2-2t+t^2)\,\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{V}(\beta(t)) = \vec{\jmath}$$

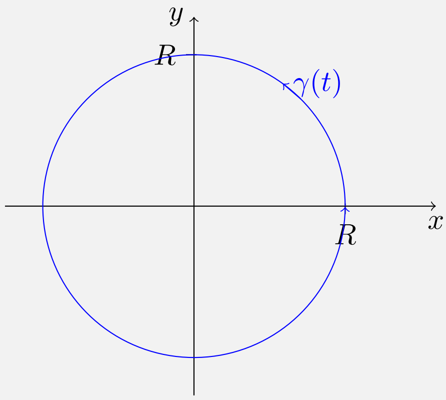
$$\overrightarrow{V}(\gamma(t)) = (t^2+1)\,\vec{\jmath}$$

Circulation du champ $\overrightarrow{V}$ le long de C^+ :

$$\begin{aligned} \int_{C^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} &= \int_\alpha \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} + \int_\beta \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} + \int_\gamma \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} \\ &= \int_0^1 \overrightarrow{V}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\,dt + \int_0^1 \overrightarrow{V}(\beta(t)) \cdot \beta'(t)\,dt \int_0^1 \overrightarrow{V}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt \\ &= \int_0^1 (2-2t)(2-2t+t^2))\,dt - \int_0^1 dt + 0 \\ &= \int_0^1 (4-8t+6t^2-2t^3-1)\,dt \\ &= \int_0^1 (3-8t+6t^2-2t^3)\,dt \\ &= \big[\,3t - 4t^2 + 2t^3 - \frac{1}{2}\,t^4\,\big]_0^1 \\ &= 3 - 4 + 2 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

c) Dessin du cercle C^+ paramétré par $\gamma(t) = R(\cos t, \sin t)$, avec $t \in [0, 2\pi]$.

$\gamma(0) = (R, 0)$
$\gamma(\pi/2) = (0, R)$
$\gamma(\pi) = (-R, 0)$
$\gamma(3\pi/2) = (0, -R)$



Vitesse de la courbe : $\gamma'(t) = -R \sin t\, \vec{\imath} + R \cos t\, \vec{\jmath}$

Champ $\vec{V}(x,y) = \dfrac{y\,\vec{\imath} - x\,\vec{\jmath}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ le long de γ : sur le cercle on a

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{R^2} = R,$$

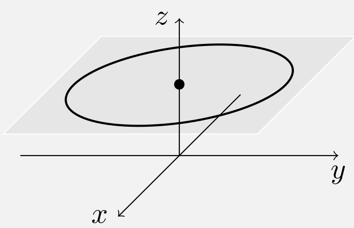
par conséquent

$$\vec{V}(\gamma(t)) = \frac{R\sin t\ \vec{\imath} - R\cos t\ \vec{\jmath}}{R} = \sin t\ \vec{\imath} - \cos t\ \vec{\jmath}.$$

Circulation de $\vec{V}$ le long de C^+ :

$$\begin{aligned} \oint_{C^+} \vec{V} \cdot \vec{d\ell} &= \int_0^{2\pi} \vec{V}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \big(-R\sin^2 t - R\cos^2 t \big)\, dt \\ &= -R \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = -R \int_0^{2\pi} dt \\ &= -R\,[\,t\,]_0^{2\pi} = -2\pi\, R. \end{aligned}$$

d) Cercle C^+ : $\begin{cases} x^2+y^2 = R^2 \\ z = H \end{cases}$ orienté dans le sens antihoraire sur le plan $x0y$.



Paramétrisation du cercle : $\gamma(t) = (R\,\cos t, R\,\sin t, H), \quad t \in [0, 2\pi]$.

Champ $\vec{V}(\rho,\varphi,z) = \rho\, z\ \vec{e_\varphi}$ le long de γ : sur le cercle on a $\rho = \sqrt{x^2+y^2} = R$ et $z = H$, par conséquent

$$\vec{V}(\gamma(t)) = R\,H\ \vec{e_\varphi}\,.$$

Comme ce vecteur est en coordonnées cilyndriques, on calcule la vitesse de γ aussi en coordonnées cylindriques :

$$\gamma'(t) = -R\,\sin t\,\vec{\imath} + R\,\cos t\,\vec{\jmath} = R(-\sin t\,\vec{\imath} + \cos t\,\vec{\jmath}) = R\,\vec{e_\varphi}\,.$$

Ceci est équivalent à paramétrer le cercle en coordonnées cylindriques avec

$$\rho(t) = R, \qquad \varphi(t) = t, \qquad z(t) = H$$

et à dériver le vecteur position $\gamma(t) = \rho(t)\,\vec{e_\rho}\,(t) + z(t)\,\vec{k}$ à partir des dérivées

$$\rho'(t) = 0, \qquad \varphi'(t) = 1, \qquad z'(t) = 0$$

$$\vec{e_\rho}\,'(t) = \varphi'(t)\,\vec{e_\varphi}\,(t), \qquad \vec{e_\varphi}\,'(t) = -\varphi'(t)\,\vec{e_\rho}\,(t), \qquad \vec{k}'(t) = \vec{0},$$

ce qui donne

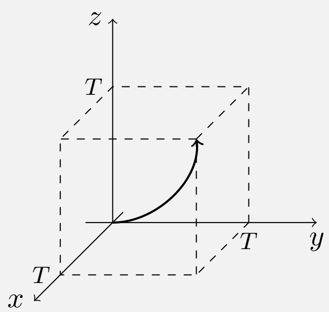
$$\gamma'(t) = \rho'(t)\,\vec{e_\rho}\,(t) + \rho(t)\,\vec{e_\rho}\,'(t) + z'(t)\,\vec{k} = R\,\vec{e_\varphi}\,.$$

Au final on peut calculer le produit scalaire de $\overrightarrow{V}(\gamma(t)) = R\,H\;\vec{e_\varphi}$ et de $\gamma'(t) = R\,\vec{e_\varphi}$ dans le repère orthonormal $(\vec{e_\rho}\,, \vec{e_\varphi}\,, \vec{k})$ comme somme des produits composante par composante, et on obtient la circulation de $\overrightarrow{V}$ le long de C^+ paramétré par γ :

$$\oint_{C^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_0^{2\pi} \overrightarrow{V}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = R^2\,H \int_0^{2\pi} dt = 2\pi\,R^2\,H.$$

e) Courbe C^+ paramétrée par

$$\gamma(t) = (t, t^2, t^3), \qquad t \in]\,0, T].$$



Vitesse

$$\gamma'(t) = \vec{\imath} + 2t\,\vec{\jmath} + 3t^2\vec{k}.$$

Champ $\overrightarrow{V}(x,y,z) = x^2 z\;\vec{\imath} - \dfrac{y}{x}\;\vec{\jmath} + \dfrac{xz^2}{y^2}\;\vec{k}$ le long de γ :

$$\overrightarrow{V}(\gamma(t)) = t^2\,t^3\;\vec{\imath} - \frac{t^2}{t}\;\vec{\jmath} + \frac{t\,(t^3)^2}{(t^2)^2}\;\vec{k} = t^5\;\vec{\imath} - t\;\vec{\jmath} + t^3\;\vec{k}$$

Circulation de $\overrightarrow{V}$ le long de C^+ paramétrée par γ :

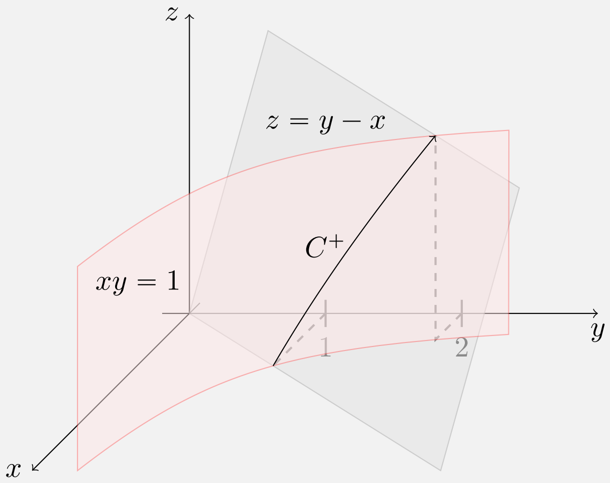
$$\int_{C^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_0^T \overrightarrow{V}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_0^T (t^5 - 2t^2 + 3t^5)dt = \int_0^T (4t^5 - 2t^2)dt$$

$$= \left[\,\frac{4}{6}\,t^6 - \frac{2}{3}\,t^3\,\right]_0^T = \frac{2}{3}\,T^6 - \frac{2}{3}\,T^3 = \frac{2}{3}\,T^3(T^3 - 1).$$

f) L'arc d'hyperbole C^+ d'équations

$$z = y - x, \quad xy = 1, \quad \text{avec } y \in [1,2]$$

est à l'intersection du cylindre de profil $xy = 1$ et axe Oz, et du plan $z = y - x$.



Paramétrisation de C^+ : on pose $y = t$ et on obtient

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{t}, t, t - \frac{1}{t}\right), \qquad \text{avec } t \in [1,2].$$

Vitesse : $\quad \gamma'(t) = -\frac{1}{t^2}\,\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\vec{k}.$

Champ $\overrightarrow{V}(x,y,z) = \dfrac{x}{y}\,\vec{\imath} + zy\,\vec{\jmath}$ le long de γ :

$$\overrightarrow{V}(\gamma(t)) = \frac{1/t}{t}\,\vec{\imath} + t\left(t - \frac{1}{t}\right)\vec{\jmath} = \frac{1}{t^2}\,\vec{\imath} + (t^2 - 1)\,\vec{\jmath}.$$

Circulation de $\overrightarrow{V}$ le long de γ :

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} &= \int_1^2 \overrightarrow{V}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_1^2 \left(-\frac{1}{t^4} + t^2 - 1\right) dt \\
&= \int_1^2 (-t^{-4} + t^2 - 1)dt \\
&= \left[-\frac{1}{-4+1}\,t^{-4+1} + \frac{1}{3}\,t^3 - t\right]_1^2 \\
&= \left[\frac{1}{3}\,\frac{1}{t^3} + \frac{1}{3}\,t^3 - t\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{3}\,\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3}\,2^3 - 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 1 \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8} + 8 - 1 - 1\right) - 1 \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1+48}{8}\right) - 1 \\
&= \frac{49}{24} - 1 = \frac{49-24}{24} = \frac{25}{24}.
\end{aligned}$$

Exercice 58 – Circulation de $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$
Calculer la circulation des champs de gradient le long des courbes indiquées, en utilisant le théorème $\displaystyle\int_{A,\ C^+}^{B} \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi \cdot \vec{d\ell} = \phi(B) - \phi(A)$.

a) $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$ avec $\phi(x,y,z) = \ln(xy + z^2)$, C^+ = courbe qui relie le point $(5,1,0)$ au point $(3,2,1)$.

b) $\vec{E}(r) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\dfrac{1}{r^2}\,\vec{e_r}$ = **champ électrique** produit par une charge Q placée en $r = 0$

C_1^+ = courbe qui relie le point $A = (6,0,0)$ au point $B = (0,0,3)$,

C_2^+ = cercle centré en O de rayon R.

[*Quel est le potentiel $\phi(r)$ de $\vec{E}(r)$? Chercher dans les notes de cours ou le calculer.*]

c) $\vec{B}(\rho,\varphi,z) = \dfrac{\mu_0\,I}{2\pi}\,\dfrac{1}{\rho}\,\vec{e_\varphi}$ = **champ magnétique** produit par un courant d'intensité I dans un fil droit de direction $\vec{k}$.

C_1^+ = arc de cercle de rayon R centré sur le fil,
reliant le point $A = (R,0,0)$ au point $B = (0,R,0)$

C_2^+ = cercle de rayon R qui ne fait pas le tour du fil.

[*Quel est le potentiel scalaire $\phi(\varphi)$ de $\vec{B}(\rho)$ si on ne fait pas le tour complet autour du fil ? Chercher dans les notes de cours ou le calculer.*]

Corrigé

a) La circulation du champ de gradient $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$, avec potentiel

$$\phi(x,y,z) = \ln(xy + z^2),$$

le long d'une courbe quelconque C^+ qui relie le point $A(5,1,0)$ au point $B(3,2,1)$, vaut

$$\int_{C^+} \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi \cdot \vec{d\ell} = \phi(B) - \phi(A) = \phi(3,2,1) - \phi(5,1,0)$$
$$= \ln(6+1) - \ln(5+0) = \ln\left(\frac{7}{5}\right).$$

b) Le **champ électrostatique**

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r^2}\,\vec{e_r}\,, \qquad r \neq 0$$

est bien conservatif sur son domaine de définition $D_{\vec{E}} = \mathbb{R}^3\backslash\{O\}$, parce que $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$ et $D_{\vec{E}}$ est simplement connexe (voir livret, section 4.4 page 44, l'exemple analogue à page 51 et aussi la fiche TD 4).

Le potentiel scalaire $\phi(r)$ de $\vec{E}(r)$, tel que $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$ (au sens physique), est le **potentiel de Coulomb** (voir livret page 32)

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r}, \qquad r \neq 0.$$

Alors, la circulation de $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$ le long d'une courbe C_1^+ qui relie le point $A(6,0,0)$, qui se trouve à distance $r_A = 6$ de l'origine O, au point $B(0,0,3)$, qui se trouve à distance $r_B = 3$ de l'origine O, vaut

$$\int_{C_1^+} \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = -\int_{C_1^+} \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi \cdot \vec{d\ell} = \phi(r_A) - \phi(r_B)$$
$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$
$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right)$$
$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1-2}{6}$$
$$= -\frac{Q}{24\pi\epsilon_0}.$$

De même, la circulation de $\vec{E}$ le long d'une courbe *fermée*, comme le cercle C_2^+, est nulle :

$$\oint_{C_2^+} \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = -\oint_{C_2^+} \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi \cdot \vec{d\ell} = 0.$$

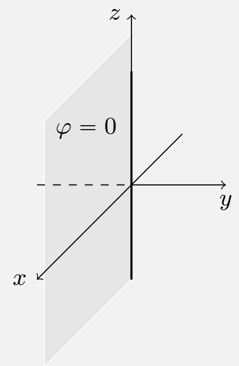
c) Le **champ magnétostatique**

$$\vec{B}(\rho, \varphi, z) = \frac{\mu_0\ I}{2\pi}\ \frac{1}{\rho}\ \vec{e_\varphi}, \qquad \rho \neq 0$$

est décrit en détail dans l'exercice à page 57 du livret de cours.
Ce champ est définit sur l'ensemble $D_{\vec{B}} = \mathbb{R}^3 \backslash \text{axe } Oz$, qui n'est pas simplement connexe.
Comme $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \vec{0}$, par le Lemme de Poincaré I le champ $\vec{B}$ admet un potentiel scalaire *sur tout sous-ensemble simplement connexe de* $D_{\vec{B}}$.

Les sous-ensembles simplement connexes de $D_{\vec{B}}$ les plus grands possibles sont donnés par $\mathbb{R}^3$ privé d'un demi-plan vertical contenant l'axe Oz.

Par exemple, l'ensemble $\mathbb{R}^3 \backslash \{\varphi = 0\}$, égal à $\mathbb{R}^3$ privé du demi-plan déterminé par l'angle $\varphi = 0$, est un tel sous-ensemble simplement connexe de $D_{\vec{B}}$.
Mais on peut également considérer tout ensemble $\mathbb{R}^3 \backslash \{\varphi = \varphi_0\}$ égal à $\mathbb{R}^3$ privé du demi-plan déterminé par l'angle φ_0 fixé (par exemple $\varphi_0 = \pi/2$ ou $\varphi_0 = \pi$).



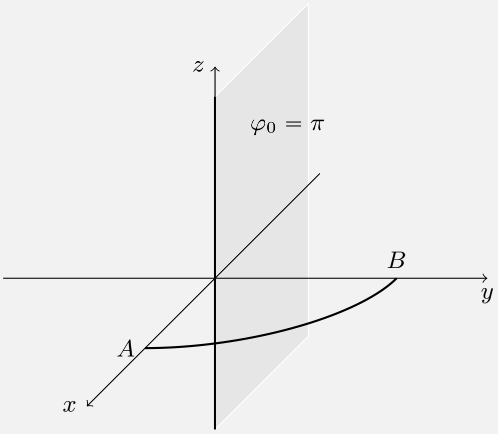
Un potentiel scalaire de $\vec{B}$, tel que $\vec{B} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$, sur l'ensemble $D = \mathbb{R}^3 \backslash \{\varphi = \varphi_0\}$ est (voir livret de cours page 58)

$$\phi(\varphi) = -\frac{\mu_0\ I}{2\pi}\ (\varphi + \varphi_0), \qquad \varphi \in]0, 2\pi[\qquad \text{(et toujours } \rho \neq 0).$$

À noter que le champ scalaire ϕ ne dépend pas explicitement de ρ mais seulement de l'angle φ de rotation autour de l'axe Oz.

Alors, pour calculer la circulation de $\overrightarrow{B}$ le long de l'arc de cercle C_1^+ de rayon R centré en l'origine, reliant le point $A(R,0,0)$ au point $B(0,R,0)$, on se place dans un sous-espace de $D_{\overrightarrow{B}}$ simplement connexe qui contient cet arc de cercle.

Par exemple, $\mathbb{R}^3$ privé du demi-plan à angle $\varphi_0 = \pi$.



Puisque $\varphi_A = 0$, $\varphi_B = \pi/2$ et $\varphi_0 = \pi$, on a alors

$$\begin{aligned}\int_{C_1^+} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{d\ell} = -\int_{C_1^+} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi \cdot \overrightarrow{d\ell} &= \phi(\varphi_A) - \phi(\varphi_B) \\ &= -\frac{\mu_0\ I}{2\pi}\ (\varphi_A + \varphi_0 - \varphi_B - \varphi_0) \\ &= -\frac{\mu_0\ I}{2\pi}\ (\varphi_A - \varphi_B) \\ &= -\frac{\mu_0\ I}{2\pi}\ \left(0 - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{\mu_0\ I}{4}.\end{aligned}$$

Enfin, la circulation de $\overrightarrow{B}$ le long d'un cercle *fermé* qui ne fait pas le tour de l'axe Oz, se calcule sur un sous-ensemble simplement connexe de $D_{\overrightarrow{B}}$ qui contient entièrement ce cercle (qui existe, puisque le cercle ne fait pas le tour de l'axe Oz), et est donc nulle :

$$\oint_{C_2^+} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{d\ell} = -\oint_{C_2^+} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi \cdot \overrightarrow{d\ell} = 0.$$

TD 12 – SURFACES ET FLUX, STOKES, GAUSS

Exercice 59 – Flux à travers une surface
Dessiner les surfaces S^+ indiquées, trouver une paramétrisation si elle n'est pas déja donnée et calculer le flux des champs de vecteurs à travers S^+.

a) $\vec{V}(x,y,z) = y^3\,\vec{\jmath} + 2(z-x^2)\,\vec{k}$,

$$S^+ = \text{parapluie de Whitney} \quad \begin{cases} x^2 = y^2 z \\ x,y,z \in [0,1] \end{cases} \quad \text{paramétré par} \quad \begin{cases} f(u,v) = (uv, v, u^2) \\ u,v \in [0,1] \end{cases}.$$

b) $\vec{V}(x,y,z) = x^2 z\,\vec{\imath} + xy^2\,\vec{\jmath} + x(y-z)\,\vec{k}$, $\quad S^+ = \text{carré} \begin{cases} z = 3 \\ x,y \in [0,1] \end{cases}$ avec paramètres (x,y).

c) $\vec{V}(r,\varphi,\theta) = \varphi\,\vec{e_r} + r\,\vec{e_\theta}$,

$$S^+ = \text{calotte de sphère} \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = R^2 \\ x,y,z \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{avec paramètres = coordonnées sphériques } (\varphi,\theta).$$

d) $\vec{E}(r) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\dfrac{1}{r^2}\,\vec{e_r}$ = **champ électrique**, $\quad S^+$ = calotte de sphère de l'exercice précédent.

Corrigé

a) Le **parapluie de Whitney** est la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne $x^2 = y^2 z$, pour tout $x,y,z \in \mathbb{R}$. On considère une portion bornée de cette surface, donnée par les contraintes $x,y,z \in [0,1]$. On a donc

$$S = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 = y^2 z,\ x,y,z \in [0,1]\ \}.$$

On veut calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{V}(x,y,z) = y^3\,\vec{\jmath} + 2(z-x^2)\,\vec{k}$ à travers S, on procède par étapes.

1) **Paramétrisation de la surface.** Si on pose

$$\begin{aligned} y &= v \qquad \text{avec } v \in [0,1] \text{ parce que } y \in [0,1] \\ z &= u^2 \qquad \text{avec } u \in [0,1] \text{ parce que } z \in [0,1] \end{aligned}$$

alors l'équation $x^2 = y^2 z$ donne $x^2 = v^2u^2 = (vu)^2$ et donc $x = uv$, et on voit que S est bien paramétrée comme indiqué :

$$S = \{\ f(u,v) = \big(uv, v, u^2\big) \in \mathbb{R}^3 \mid u,v \in [0,1]\ \}.$$

Pour dessiner cette portion du parapluie de Withney on emploie une astuce, en la présentant comme *surface réglée*, c'est-à-dire formée de *droites* collées l'une à coté de l'autre de manière lisse, selon le profil décrit par une courbe γ qui s'appelle *courbe génératrice* de la surface réglée.

Remarque : Une **surface réglée** est une surface paramétrée sous la forme

$$S = \{\ f(u,v) = \gamma(u) + v\,\vec{d}(u),\ u \in U, v \in V\ \},$$

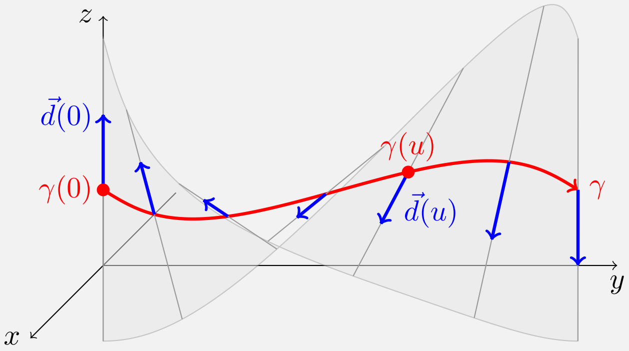
où la courbe γ s'appelle **génératrice** et décrit le profil qu'on suit pour coller les droites qui sont dirigées, en tout point $\gamma(u)$, par le **vecteur directeur** $\vec{d}(u) \neq \vec{0}$. Le paramètre v décrit les points le long de chaque droite

$$\Delta_u = \{\ f(u,v) = \gamma(u) + v\,\vec{d}(u) \mid v \in V\ \},$$

et on a

$$S = \bigcup_{u \in U} \Delta_u.$$

Dessiner une surface réglée est très simple :
– on dessine la courbe génératrice γ,
– en chaque point de γ détérminé par u on dessine le vecteur directeur $\vec{d}(u)$,
– on prolonge le vecteur en un segment selon les valeurs de v,
– enfin on relie tous ces segments en une surface !



Dans cet exemple, on a pris :

$$\gamma(u) = (u, 1, \sin u), \qquad u \in [0, 2\pi]$$

$$\vec{d}(u) = (0, \cos(u/2), \sin(u/2))$$

$$v \in [-2, 2].$$

$\square$

Pour dessiner la portion du parapluie de Whitney qui nous intéresse, on écrit donc la paramétrisation f comme celle d'une surface réglée

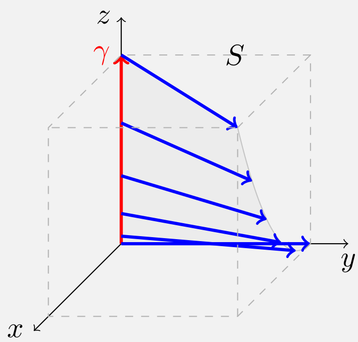
$$\begin{aligned} f(u,v) = \left(uv, v, u^2\right) &= \left(0, 0, u^2\right) + v\left(u, 1, 0\right) \\ &= \gamma(u) + v\,\vec{d}(u), \qquad u, v \in [0,1], \end{aligned}$$

où

$\gamma(u) = (0, 0, u^2)$ est la courbe génératrice (le profil), avec $u \in [0,1]$,
$\vec{d}(u) = (u, 1, 0)$ est le vecteur directeur de la droite Δ_u au point $\gamma(u)$,
$v \in [0,1]$ est le paramètre qui parcourt un segment de longueur 1 sur chaque droite Δ_u.

Ceci est possible, pour le parapluie de Whitney, car la paramétrisation $f(u,v)$ dépend *de façon linéaire* d'un des deux paramètres, v : en variant v (à valeur u fixe), on parcourt une droite.

Pour dessiner S, il suffit enfin de dessiner ses composantes :
– la courbe génératrice $\gamma(u) = (0, 0, u^2)$ avec $u \in [0,1]$,
– le vecteur directeur $\vec{d}(u) = (u, 1, 0)$ en tout point $\gamma(u)$,
– le segment paramétré par $v \in [0,1]$ sur chaque droite,
et de relier le tout.



2) **Vecteur normale à la surface.** On calcule le vecteur normal $\vec{n}_f = \dfrac{\partial f}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial f}{\partial v}$, qui donne l'orientation de la surface. On a

$$\frac{\partial f(u,v)}{\partial u} = (v, 0, 2u) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f(u,v)}{\partial v} = (u, 1, 0),$$

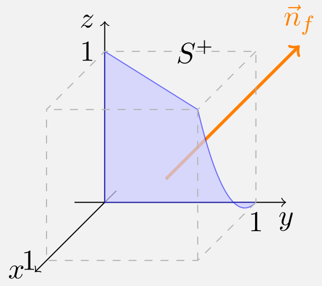
donc

$$\begin{aligned}\vec{n}_f(u,v) &= \frac{\partial f(u,v)}{\partial u} \wedge \frac{\partial f(u,v)}{\partial v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u \\ 2u^2 \\ v \end{pmatrix} \\ &= -2u\,\vec{\imath} + 2u^2\,\vec{\jmath} + v\,\vec{k}.\end{aligned}$$

Pour le dessiner, on l'évalue en un point de S, par exemple pour $u = 1/2$ et $v = 1/2$:

$$\vec{n}_f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\vec{\imath} + \frac{1}{2}\,\vec{\jmath} + \frac{1}{2}\,\vec{k},$$

et on voit que la composante en direction $\vec{\imath}$ est négative.



3) **Champ de vecteurs sur la surface.** On évalue le champ $\overrightarrow{V}(x,y,z) = y^3\,\vec{\jmath} + 2(z - x^2)\,\vec{k}$ sur les points de la surface S^+ :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V}\big(f(u,v)\big) &= v^3\,\vec{\jmath} + 2\big(u^2 - (uv)^2\big)\,\vec{k} \\ &= v^3\,\vec{\jmath} + 2u^2(1 - v^2)\,\vec{k}.\end{aligned}$$

4) **Produit scalaire.** On calcule le produit scalaire entre $\overrightarrow{V}\big(f(u,v)\big)$ et $\vec{n}_f(u,v)$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V}\big(f(u,v)\big) \cdot \vec{n}_f(u,v) &= \big(v^3\,\vec{\jmath} + 2u^2(1-v^2)\,\vec{k}\big) \cdot \big(-2u\,\vec{\imath} + 2u^2\,\vec{\jmath} + v\,\vec{k}\big) \\ &= 2u^2\,v^3 + 2u^2 v(1 - v^2) \\ &= 2u^2\,v^3 + 2u^2 v - 2u^2 v^3 \\ &= 2u^2 v.\end{aligned}$$

5) **Flux du champ à travers la surface.** Enfin, on calcule le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers S^+ :

$$\begin{aligned}\iint_{S^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dS} &= \iint_{[0,1]\times[0,1]} \overrightarrow{V}\big(f(u,v)\big) \cdot \vec{n}_f(u,v)\; du\,dv \\ &= \iint_{[0,1]\times[0,1]} 2u^2 v\; du\,dv \qquad \text{(on applique le Thm. de Fubini)} \\ &= \int_0^1 u^2\,du\; \int_0^1 2v\,dv \\ &= \left[\frac{1}{3}u^3\right]_0^1\; \big[v^2\big]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

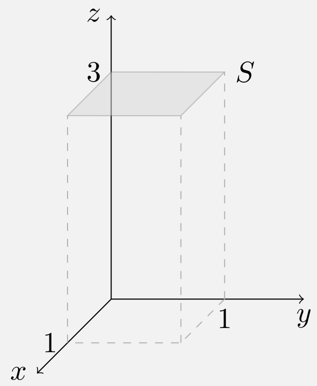
b) On veut calculer le flux du champ de vecteurs

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = x^2 z\;\vec{\imath} + xy^2\;\vec{\jmath} + x(y - z)\;\vec{k}$$

à travers la surface plane donnée par le carré horizontal

$$S = \{ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in [0,1], \ z = 3 \ \}.$$

Dans ce problème il manque une indication : l'orientation de la surface. Supposons de vouloir considérer le carré S^+ avec vecteur normal orienté vers le haut. On procède par étapes.



1) **Paramétrisation de la surface.** On prend $x \in [0,1]$ et $y \in [0,1]$ comme paramètres libres, alors une paramétrisation de S est donnée par :

$$f(x,y) = (x, y, 3), \qquad x, y \in [0,1].$$

Remarque : Un carré est bien sur une surface réglée, par exemple on peut écrire

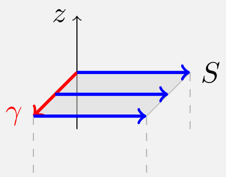
$$f(x,y) = (x,y,3) = (x,0,3) + y\,(0,1,0) = \gamma(x) + y\,\vec{d}(x)$$

avec

– courbe génératrice $\gamma(x) = (x, 0, 3)$ avec $x \in [0,1]$,

– vecteur directeur $\vec{d}(x) = (0,1,0)$ en tout point $\gamma(x)$,

– segment paramétré par $y \in [0,1]$ sur chaque droite Δ_x dirigée par $\vec{d}(x)$.



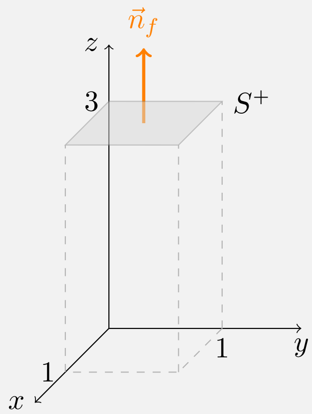
Mais on n'a pas besoin de cette présentation pour le dessiner. □

2) **Vecteur normale à la surface.** On calcule le vecteur normal $\vec{n}_f = \dfrac{\partial f}{\partial x} \wedge \dfrac{\partial f}{\partial y}$, qui donne l'orientation du carré.
On a

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = (1,0,0) = \vec{\imath}$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = (0,1,0) = \vec{\jmath},$$

donc

$$\vec{n}_f(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \wedge \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}.$$



Remarque : La paramétrisation choisie $f(x,y) = (x,y,3)$ donne bien l'orientation du carré vers le haut, comme souhaité. Pour avoir le même carré orienté vers le bas, c'est-à-dire la surface S^-, il suffit d'échanger l'ordre des paramètres :

$$S^- = \{ \ g(y,x) = (x,y,3) \mid x,y \in [0,1] \ \}.$$

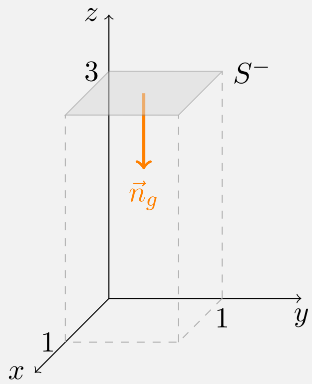
On a alors

$$\frac{\partial g(y,x)}{\partial y} = (0,1,0) = \vec{\jmath}$$

$$\frac{\partial g(y,x)}{\partial x} = (1,0,0) = \vec{\imath},$$

donc

$$\begin{aligned}\vec{n}_g(y,x) &= \frac{\partial g(y,x)}{\partial y} \wedge \frac{\partial g(y,x)}{\partial x} \\ &= \vec{\jmath} \wedge \vec{\imath} = -\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = -\vec{k}.\end{aligned}$$



$\square$

3) **Champ de vecteurs sur la surface.** On évalue le champ $\vec{V}(x,y,z) = x^2 z\ \vec{\imath} + xy^2\ \vec{\jmath} + x(y-z)\ \vec{k}$ sur les points de la surface S^+ :

$$\vec{V}\big(f(x,y)\big) = 3x^2\ \vec{\imath} + xy^2\ \vec{\jmath} + x(y-3)\ \vec{k}.$$

4) **Produit scalaire.** On calcule le produit scalaire entre $\vec{V}\big(f(x,y)\big)$ et $\vec{n}_f(x,y)$:

$$\begin{aligned}\vec{V}\big(f(x,y)\big) \cdot \vec{n}_f(x,y) &= \big(3x^2\ \vec{\imath} + xy^2\ \vec{\jmath} + x(y-3)\ \vec{k}\big) \cdot \vec{k} \\ &= x(y-3).\end{aligned}$$

5) **Flux du champ à travers la surface.** Enfin, on calcule le flux de $\vec{V}$ à travers S^+ :

$$\begin{aligned}\iint_{S^+} \vec{V} \cdot \vec{dS} &= \iint_{[0,1]\times[0,1]} \vec{V}\big(f(x,y)\big) \cdot \vec{n}_f(x,y)\ dx\, dy \\ &= \iint_{[0,1]\times[0,1]} x(y-3)\, dx\, dy \qquad \text{(on applique le Thm. de Fubini)} \\ &= \int_0^1 x\, dx\ \int_0^1 (y-3)\, dy \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2 - 3y\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 3\right) = \frac{1}{2}\,\frac{1-6}{2} = -\frac{5}{4}.\end{aligned}$$

c) On veut calculer le flux du champ de vecteurs

$$\vec{V}(r,\varphi,\theta) = \varphi\ \vec{e_r}\ + r\ \vec{e_\theta}$$

à travers la calotte de sphère

$$S = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ \ x,y,z \geqslant 0\ \}.$$

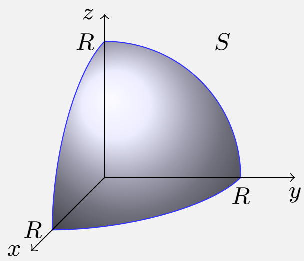
Dans ce problème il manque une indication sur l'orientation de la surface. Supposons de vouloir considérer le vecteur normal *sortant* de la sphère. On procède toujours par les mêmes étapes.

1) **Paramétrisation de la surface.** Pour paramétrer une sphère de rayon R centrée en l'origine il suffit de prendre les coordonnées sphériques (r, φ, θ) et poser $r = R$. Les deux paramètres restant $\varphi \in [0, 2\pi]$ et $\theta \in [0, \pi]$ déterminent tous les points de la sphère : les coordonnées cartésiennes des points sont données par le changement usuel en coordonnées sphériques :

$$x(\varphi, \theta) = R\cos\varphi\,\sin\theta, \qquad y(\varphi, \theta) = R\sin\varphi\,\sin\theta \qquad \text{et} \qquad z(\varphi, \theta) = R\cos\theta.$$

Une portion de sphère est ensuite fixée par des limitations des paramètres (φ, θ).

Pour la calotte qui nous intéresse on peut donc prendre la paramétrisation



$$f(\varphi, \theta) = (R\cos\varphi\,\sin\theta, R\sin\varphi\,\sin\theta, R\cos\theta)$$

avec

$$\varphi, \theta \in [0, \pi/2].$$

Vérifions si cette paramétrisation donne l'orientation souhaitée, avec vecteur normal sortant.

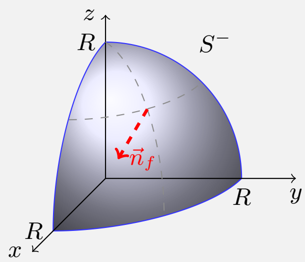
2) **Vecteur normale à la surface.** On calcule le vecteur normal $\vec{n}_f = \dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \wedge \dfrac{\partial f}{\partial \theta}$:

$$\frac{\partial f(\varphi,\theta)}{\partial \varphi} = R\,(-\sin\varphi\,\sin\theta, \cos\varphi\,\sin\theta, 0)$$
$$\frac{\partial f(\varphi,\theta)}{\partial \theta} = R\,(\cos\varphi\,\cos\theta, \sin\varphi\cos\theta, -\sin\theta),$$

donc

$$\vec{n}_f(\varphi,\theta) = \frac{\partial f(\varphi,\theta)}{\partial \varphi} \wedge \frac{\partial f(\varphi,\theta)}{\partial \theta} = R\begin{pmatrix} -\sin\varphi\,\sin\theta \\ \cos\varphi\,\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge R\begin{pmatrix} \cos\varphi\,\cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$
$$= R^2 \begin{pmatrix} -\cos\varphi\,\sin^2\theta \\ -\sin\varphi\,\sin^2\theta \\ -\sin^2\varphi\,\sin\theta\,\cos\theta - \cos^2\varphi\,\sin\theta\,\cos\theta \end{pmatrix} = R^2\begin{pmatrix} -\cos\varphi\,\sin^2\theta \\ -\sin\varphi\,\sin^2\theta \\ -\sin\theta\,\cos\theta \end{pmatrix}$$

Ce vecteur $\vec{n}_f$ a toutes les composantes négatives (car $\varphi, \theta \in [0, \pi/2]$), donc il est orienté dans le sens *entrant* et non *sortant*. Par exemple, en un point au milieu de la calotte, pour $\varphi = \pi/4$ et $\theta = \pi/4$, on a



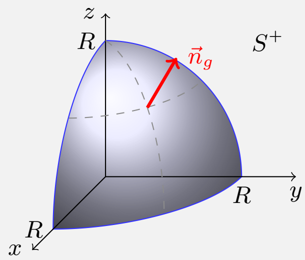
$$\vec{n}_f(\pi/4, \pi/4) = R^2/4\,(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -2).$$

Comme ce n'est pas l'orientation souhaitée, nous appellons cette surface paramétrée S^-.

Pour que la calotte S^+ ait vecteur normal *sortant*, choisissons donc la paramétrisation

$$g(\theta, \varphi) = (R\cos\varphi\,\sin\theta, R\sin\varphi\,\sin\theta, R\cos\theta),$$

toujours avec $\theta, \varphi \in [0, \pi/2]$, qui a vecteur normal



$$\vec{n}_g(\theta,\varphi) = \frac{\partial g(\theta,\varphi)}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial g(\theta,\varphi)}{\partial \varphi}$$
$$= R^2\,\sin\theta\,\big(\cos\varphi\,\sin\theta, \sin\varphi\,\sin\theta, \cos\theta\big).$$

3) **Champ de vecteurs sur la surface.** Le champ $\vec{V}(r,\varphi,\theta) = \varphi\, \vec{e_r} + r\, \vec{e_\theta}$ est donné en coordonnées sphériques. Pour l'évaluer sur les points de la surface S, il faut exprimer S en coordonnées sphériques. Ceci est évident, puisque S est une calotte de sphère :

$$S = \{\ (r,\varphi,\theta) \mid r = R,\ \varphi,\theta \in [0,\pi/2]\ \}.$$

Alors

$$\vec{V}\big(g(\theta,\varphi)\big) = \varphi\, \vec{e_r} + R\, \vec{e_\theta}\,.$$

4) **Produit scalaire.** Pour calculer le produit scalaire entre le vecteur $\vec{V}\big(g(\theta,\varphi)\big)$, qui est exprimé dans le repère sphérique, et le vecteur $\vec{n}_g(\theta,\varphi)$, qui est exprimé dans le repère cartésien, il faut choisir l'un des deux repères et exprimer dans celui-ci le vecteur qui ne l'est pas.
Comme il est plus facile de transformer un vecteur des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques, plutôt que le contraire, changeons le vecteur $\vec{n}_g$. D'ailleurs, dans ce vecteur on reconnait les composantes (voir formulaire, page recto, 1ère colonne, ligne du "changement de drepère"), ce sont celles du vecteur $\vec{e_r}$:

$$\begin{aligned}\vec{n}_g(\theta,\varphi) &= R^2 \sin\theta\, \big(\cos\varphi \sin\theta\, \vec{\imath} + \sin\varphi \sin\theta\, \vec{\jmath} + \cos\theta\, \vec{k}\big)\\ &= R^2 \sin\theta\, \vec{e_r}\,.\end{aligned}$$

Ce vecteur, appliqué en tout point de la sphère, est bien *sortant*. En comparaison, le vecteur normal $\vec{n}_f = -R^2 \sin\theta\, \vec{e_r}$ est *entrant*.
On peut enfin calculer le produit scalaire dans le repère sphérique, en sachant que :

Remarque : Le repère sphérique $(\vec{e_r}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_\theta})$ est orthonormé :

– les trois vecteurs sont orthogonaux l'un à l'autre, donc leur produit scalaire mutuel vaut 0 :

$$\vec{e_r}\cdot\vec{e_\varphi} = 0, \qquad \vec{e_r}\cdot\vec{e_\theta} = 0, \qquad \vec{e_\varphi}\cdot\vec{e_\theta} = 0,$$

– et ils ont norme 1, donc le produit scalaire avec eux mêmes vaut 1 :

$$\vec{e_r}\cdot\vec{e_r} = 1, \qquad \vec{e_\varphi}\cdot\vec{e_\varphi} = 1, \qquad \vec{e_\theta}\cdot\vec{e_\theta} = 1.$$

Au final, on a donc

$$\begin{aligned}\vec{V}\big(g(\theta,\varphi)\big)\cdot\vec{n}_g(\theta,\varphi) &= \big(\varphi\, \vec{e_r} + R\, \vec{e_\theta}\big)\cdot R^2 \sin\theta\, \vec{e_r}\\ &= R^2 \varphi \sin\theta.\end{aligned}$$

5) **Flux du champ à travers la surface.** Enfin, on calcule le flux de $\vec{V}$ à travers S^+ :

$$\begin{aligned}\iint_{S^+} \vec{V}\cdot\vec{dS} &= \iint_{[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]} \vec{V}\big(g(\theta,\varphi)\big)\cdot\vec{n}_g(\theta,\varphi)\ d\theta\, d\varphi\\ &= \iint_{[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]} R^2 \varphi \sin\theta\ d\theta\, d\varphi \qquad \text{(on applique le Thm. de Fubini)}\\ &= R^2 \int_0^{\pi/2} \sin\theta\ d\theta \int_0^{\pi/2} \varphi\ d\varphi\\ &= R^2 \big[-\cos\theta\big]_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{2}\varphi^2\right]_0^{\pi/2}\\ &= R^2\,(0+1)\,\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - 0\right) = \frac{\pi^2 R^2}{8}.\end{aligned}$$

d) Enfin, on veut calculer le flux du champ électrique

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r^2}\,\vec{e_r}$$

à travers la calotte de sphère

$$S^+ = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = R^2,\ \ x,y,z \geqslant 0\ \}$$

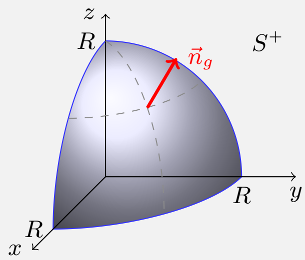
que l'on suppose orientée par le vecteur normal *sortant*. On suit à nouveau les mêmes étapes.

1) **Paramétrisation de la surface** et 2) **Vecteur normale à la surface.** Comme établi dans l'exercice c), on choisit la paramétrisation

$$g(\theta,\varphi) = (R\,\cos\varphi\,\sin\theta, R\,\sin\varphi\,\sin\theta, R\,\cos\theta),$$

avec $\theta, \varphi \in [0, \pi/2]$, qui a vecteur normal *sortant*

$$\vec{n}_g(\theta,\varphi) = R^2\,\sin\theta\,\vec{e_r}\,.$$



3) **Champ de vecteurs sur la surface.** Le champ électrique $\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r^2}\,\vec{e_r}$, évalué sur les points de la calotte de sphère de rayon $r = R$ vaut

$$\vec{E}\big(g(\theta,\varphi)\big) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\,\vec{e_r}\,.$$

4) **Produit scalaire.** Le produit scalaire entre le vecteur $\vec{E}\big(g(\theta,\varphi)\big)$ et le vecteur $\vec{n}_g(\theta,\varphi)$ est

$$\begin{aligned}\vec{E}\big(g(\theta,\varphi)\big)\cdot\vec{n}_g(\theta,\varphi) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\,\vec{e_r}\cdot R^2\,\sin\theta\,\vec{e_r}\\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\sin\theta.\end{aligned}$$

5) **Flux du champ à travers la surface.** Enfin, on calcule le flux de $\vec{E}$ à travers S^+ :

$$\begin{aligned}\iint_{S^+}\vec{E}\cdot\vec{dS} &= \iint_{[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]} \vec{E}\big(g(\theta,\varphi)\big)\cdot\vec{n}_g(\theta,\varphi)\,d\theta\,d\varphi\\ &= \iint_{[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi \qquad \text{(on applique le Thm. de Fubini)}\\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta\int_0^{\pi/2}d\varphi\\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\big[\cos\theta\big]_0^{\pi/2}\,\big[\varphi\big]_0^{\pi/2}\\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}(0-1)\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\\ &= -\frac{Q\,\pi}{8\pi\epsilon_0}.\end{aligned}$$

À noter que le flux de $\vec{E}$ à travers la calotte S^- orientée par le vecteur normal n_f *entrant* vaut donc l'opposé :

$$\iint_{S^-}\vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{Q\,\pi}{8\pi\epsilon_0}.$$

Exercice 60 – Flux de $\vec{V} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{U}$
Calculer le flux du rotationnel des champs de vecteurs suivants, dans l'une des deux possibles manières (ou les deux) :

— soit en calculant le rotationnel, en décrivant S^+ et en utilisant la définition du flux,

— soit en trouvant le bord de S^+ et en appliquant le
théorème de Stokes $\displaystyle\iint_{S^+} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{U}\cdot\vec{dS} = \oint_{\partial S^+} \vec{U}\cdot\vec{d\ell}.$

a) $\vec{U}(x,y) = (2x-y)\,\vec{\imath} + (x+y)\,\vec{\jmath}$, $\quad S^+ =$ disque $\quad x^2+y^2 \leqslant R^2 \quad$ orienté par $\vec{n} = \vec{k}$.

b) $\vec{A}(\rho,\varphi,z) = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\,\ln\rho\,\vec{k}$

$=$ **potentiel vectoriel du champ magnétique** $\quad \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\,\dfrac{1}{\rho}\,\vec{e_\varphi}$,

$S^+ =$ cylindre (ouvert) $\begin{cases} x^2+y^2 = R^2 \\ z\in[0,H] \end{cases}$ avec $\vec{n}$ entrant.

Corrigé

a) On veut calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{V} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{U}$ où

$$\vec{U}(x,y) = (2x-y)\,\vec{\imath} + (x+y)\,\vec{\jmath},$$

à travers la surface plane donnée par le disque

$$S^+ = \{\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leqslant R^2,\ z=0\ \}$$

orienté par le vecteur normal $\vec{n} = \vec{k}$.

__**Méthode 1 – Calcul direct**__. On calcule le rotationnel

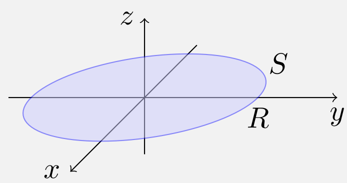
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{U}(x,y,z) &= \overrightarrow{\text{rot}}\big((2x-y)\,\vec{\imath} + (x+y)\,\vec{\jmath}\big)\\ &= \left(\frac{\partial(x+y)}{\partial x} - \frac{\partial(2x-y)}{\partial y}\right)\vec{k}\\ &= \big(1-(-1)\big)\,\vec{k}\\ &= 2\,\vec{k},\end{aligned}$$

et on applique les cinq étapes de l'exercice 59 au champ $\vec{V} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{U}$.

1) **Paramétrisation de la surface.** Un disque centré en l'origine se paramétrise facilement en coordonnées polaires dans le plan et en coordonnées cylindriques dans l'espace :

on prend $\rho\in[0,R]$ et $\varphi\in[0,2\pi]$ comme paramètres libres, alors une paramétrisation de S est donnée par :

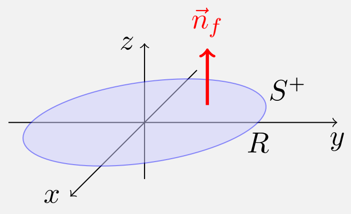
$$f(\rho,\varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, 0).$$



Vérifions si cette paramétrisation donne un vecteur normal dirigé comme $\vec{k}$.

2) **Vecteur normale à la surface.** Le vecteur normal déterminé par la paramétrisation f est

$$
\begin{aligned}
\vec{n}_f(\rho,\varphi) &= \frac{\partial f(\rho,\varphi)}{\partial \rho} \wedge \frac{\partial f(\rho,\varphi)}{\partial \varphi} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0-0 \\ -(0-0) \\ \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \end{pmatrix} = \rho\,\vec{k}
\end{aligned}
$$



qui donne bien l'orientation vers le haut.

3) **Champ de vecteurs sur la surface.** Le champ $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U} = 2\,\vec{k}$ est uniforme (constant) sur tout $\mathbb{R}^3$, donc il n'y a rien à calculer en particulier sur les points de la surface S^+ :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}\big(f(\rho,\varphi)\big) = 2\,\vec{k}.$$

4) **Produit scalaire.** On calcule le produit scalaire entre $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}\big(f(\rho,\varphi)\big)$ et $\vec{n}_f(\rho,\varphi)$:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}\big(f(\rho,\varphi)\big)\cdot\vec{n}_f(\rho,\varphi) &= 2\,\vec{k}\cdot\rho\,\vec{k} \\
&= 2\rho.
\end{aligned}
$$

5) **Flux du champ à travers la surface.** Enfin, on calcule le flux de $\vec{V}$ à travers S^+ :

$$
\begin{aligned}
\iint_{S^+} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}\cdot\overrightarrow{dS} &= \iint_{[0,R]\times[0,2\pi]} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}\big(f(\rho,\varphi)\big)\cdot\vec{n}_f(\rho,\varphi)\;d\rho\,d\varphi \\
&= \iint_{[0,R]\times[0,2\pi]} 2\rho\;d\rho\,d\varphi \qquad \text{(on applique le Thm. de Fubini)} \\
&= \int_0^R 2\rho\;d\rho\;\int_0^{2\pi} d\varphi \\
&= 2\pi\,R^2.
\end{aligned}
$$

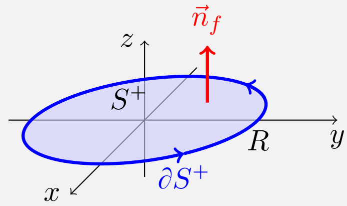
Méthode 2 – Théorème de Stokes. On veut maintenant calculer le même flux en utilisant le théorème de Stokes

$$\iint_{S^+} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}\cdot\overrightarrow{dS} = \oint_{\partial S^+} \vec{U}\cdot\overrightarrow{d\ell},$$

où $C^+ = \partial S^+$ est la courbe qui décrit le bord de la surface S, orientée dans le sens *direct*, c'est-à-dire de telle sorte qu'en la parcourant debout (dans la direction du vecteur normal $\vec{n}$ de S^+), la surface se trouve sur la gauche, et $\int_{\partial S^+} \vec{U}\cdot\overrightarrow{d\ell}$ est la circulation de $\vec{U}$ le long de C^+. Procédons par étapes.

1) **Paramétrisation du bord de la surface.** Le bord du disque

$$S^+ = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leqslant R^2,\ z=0\ \}$$



orienté par le vecteur normal $\vec{n}$ vers le haut est le cercle

$$\partial S^+ = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = R^2,\ z=0\ \}$$

orienté dans le sens *direct*, c'est-à-dire le sens de rotation de $\vec{\imath}$ vers $\vec{\jmath}$ dans le repère $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{n}_f)$, où $\vec{n}_f$ est parallèle à $\vec{k}$.

Le disque S^+ est paramétré par

$$f(\rho,\varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, 0), \qquad \rho \in [0,R], \quad \varphi \in [0,2\pi],$$

et le cercle ∂S^+ correspond aux points du disque avec $\rho = R$, donc une paramétrisation du cercle s'obtient en posant $\rho = R$ dans la paramétrisation $f(\rho,\varphi)$ du disque, et en prenant $t=\varphi$ comme paramètre de temps :

$$\gamma(t) = f(R,t) = (R\,\cos t, R\,\sin t, 0), \qquad t \in [0,2\pi].$$

À noter qu'on aurait pu écrire cette paramétrisation du cercle même sans connaitre la paramétrisation du disque qu'il délimite.

2) **Vitesse de la courbe décrivant le bord.** La vitesse de γ est

$$\gamma'(t) = (-R\,\sin t, R\,\cos t, 0) = -R\,\sin t\,\vec{\imath} + R\,\cos t\,\vec{\jmath}, \qquad t \in [0,2\pi].$$

3) **Champ de vecteur sur la courbe.** Le champ $\overrightarrow{U}(x,y,z) = (2x-y)\ \vec{\imath} + (x+y)\ \vec{\jmath}$ évalué sur les points du circle ∂S^+ vaut

$$\begin{aligned}\overrightarrow{U}\big(\gamma(t)\big) &= (2\,R\,\cos t - R\,\sin t)\,\vec{\imath} + (R\,\cos t + R\,\sin t)\,\vec{\jmath}\\ &= R\,(2\cos t - \sin t)\,\vec{\imath} + R\,(\cos t + \sin t)\,\vec{\jmath}.\end{aligned}$$

4) **Produit scalaire.** Le produit scalaire entre $\overrightarrow{U}\big(\gamma(t)\big)$ et $\gamma'(t)$ vaut

$$\begin{aligned}\overrightarrow{U}\big(\gamma(t)\big)\cdot\gamma'(t) &= \Big(R\,(2\,\cos t - \sin t)\,\vec{\imath} + R\,(\cos t + \sin t)\,\vec{\jmath}\Big)\cdot\Big(-R\,\sin t\,\vec{\imath} + R\,\cos t\,\vec{\jmath}\Big)\\ &= -R^2\,\sin t\,(2\cos t - \sin t) + R^2\,\cos t\,(\cos t + \sin t)\\ &= R^2\Big(-2\sin t\cos t + \sin^2 t + \cos^2 t + \cos t\sin t\Big)\\ &= R^2\,\big(1 - \sin t\cos t\big).\end{aligned}$$

5) **Circulation du champ le long de la courbe.** Enfin, on calcule la circulation de $\overrightarrow{U}$ le long de ∂S^+ :

$$\begin{aligned}\oint_{\partial S^+} \overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{d\ell} &= \int_0^{2\pi} \overrightarrow{U}\big(\gamma(t)\big)\cdot\gamma'(t)\ dt\\ &= R^2\int_0^{2\pi}\big(1-\sin t\cos t\big)\ dt \qquad \text{[par changement de variable } u=\sin t\text{]}\\ &= R^2\left[\ t - \frac{1}{2}\sin^2 t\ \right]_0^{2\pi}\\ &= R^2\,(2\pi - 0 - 0 + 0) = 2\pi\,R^2.\end{aligned}$$

Comparaison des méthodes et des résultats. Le flux du champ de vecteurs $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{U}$ à travers une surface orientée S^+ peut être calculé soit de façon directe, en utilisant la définition du flux, soit de façon indirecte comme circulation du potentiel vectoriel $\vec{U}$ le long du bord ∂S^+, en vertue du théorème de Stokes $\displaystyle\iint_{S^+} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{U}\cdot\vec{dS} = \oint_{\partial S^+} \vec{U}\cdot\vec{d\ell}$.

Dans l'exemple traité, en effet, on trouve séparément

$$\iint_{S^+} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{U}\cdot\vec{dS} = 2\pi\,R^2 \qquad \text{et} \qquad \oint_{\partial S^+} \vec{U}\cdot\vec{d\ell} = 2\pi\,R^2.$$

Les deux méthodes demandent à peu près la même quantité de calculs. On pourra adopter l'une ou l'autre méthode selon les données explicites du problème au départ :

– le champ $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{U}$ ou bien son potentiel vectoriel $\vec{U}$,

– la surface paramétrée S^+ ou bien la courbe C^+ qui délimite la surface S^+ (dont le bord ∂S^+ est donc la courbe C^+).

b) On veut calculer le flux du **champ magnétique**

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\,\frac{1}{\rho}\,\vec{e_\varphi}\,, \qquad \rho > 0,$$

où le champ $\vec{A}$ est le **potentiel vector magnétique**

$$\vec{A}(\rho,\varphi,z) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\,\ln\rho\,\vec{k}, \qquad \rho > 0,$$

à travers le cylindre (ouvert)

$$S^+ = \{\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = R^2,\ z\in[0,H]\ \}$$

orienté par le vecteur normal $\vec{n}$ *entrant.*

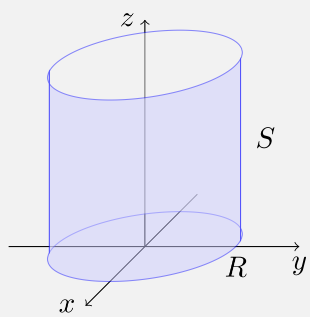
Méthode 1 – Calcul direct. On applique la définition du flux de $\vec{B}$ à travers S^+, avec les cinq étapes de l'exercice 59.

1) **Paramétrisation de la surface.** Le cylindre d'axe Oz et rayon R se paramétrise facilement en coordonnées cylindriques :

on fixe $\rho = R$ et on prend $\varphi\in[0,2\pi]$ et $z\in[0,H]$ comme paramètres libres, alors une paramétrisation de S est donnée par :

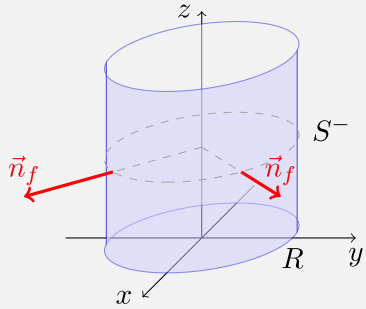
$$f(\varphi,z) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, z).$$

Vérifions si cette paramétrisation donne un vecteur normal dirigé vers l'intérieur du cylindre, comme demandé.



2) **Vecteur normale à la surface.** Le vecteur normal déterminé par la paramétrisation f est

$$
\begin{aligned}
\vec{n}_f(\varphi,z) &= \frac{\partial f(\varphi,z)}{\partial\varphi} \wedge \frac{\partial f(\varphi,z)}{\partial z} \\
&= \begin{pmatrix} -R\,\sin\varphi \\ R\,\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\,\cos\varphi \\ R\,\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= R\left(\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath}\right) = R\,\vec{e_\rho} \qquad \text{[cf. formulaire]}
\end{aligned}
$$



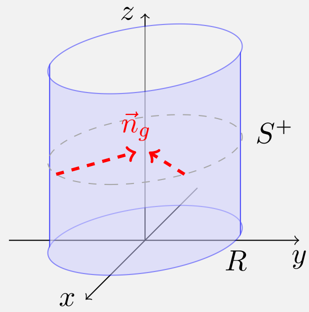
qui donne l'orientation *sortante*.

On adopte donc la paramétrisation du cylindre S^+ avec orientation opposée :

$$g(z,\varphi) = (R\,\cos\varphi, R\,\sin\varphi, z), \qquad z \in [0,H], \quad \varphi \in [0,2\pi],$$

qui donne le vecteur normal *entrant*

$$
\begin{aligned}
\vec{n}_g(z,\varphi) &= \frac{\partial g(z,\varphi,z)}{\partial z} \wedge \frac{\partial g(z,\varphi)}{\partial\varphi} \\
&= -R\,\vec{e_\rho}\,.
\end{aligned}
$$



3) **Champ de vecteurs sur la surface.** On calcule la valeur du champ $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}$ sur les points du cylindre S^+, qui est détérminé, en coordonnées cylindriques, par la seule contraine $\rho = R$:

$$\vec{B}\big(g(z,\varphi)\big) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\,\frac{1}{R}\,\vec{e_\varphi}\,.$$

4) **Produit scalaire.** On calcule le produit scalaire entre $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}\big(g(z,\varphi)\big)$ et $\vec{n}_g(z,\varphi)$, tous les deux déjà donnés dans le repère cylindrique, en sachant que (voir encadré analogue dans le corrigé de l'exercice 59 c) pour le repère sphérique) :

Remarque : Le repère cylindrique $(\vec{e_\rho}\,,\vec{e_\varphi}\,,\vec{k})$ est orthonormé :

– les trois vecteurs sont orthogonaux l'un à l'autre, donc leur produit scalaire mutuel vaut 0 :

$$\vec{e_\rho}\cdot\vec{e_\varphi} = 0, \qquad \vec{e_\rho}\cdot\vec{k} = 0, \qquad \vec{e_\varphi}\cdot\vec{k} = 0,$$

– et ils ont norme 1, donc le produit scalaire avec eux mêmes vaut 1 :

$$\vec{e_\rho}\cdot\vec{e_\rho} = 1, \qquad \vec{e_\varphi}\cdot\vec{e_\varphi} = 1, \qquad \vec{k}\cdot\vec{k} = 1.$$

Au final, on a donc

$$\vec{B}\big(g(z,\varphi)\big)\cdot\vec{n}_g(z,\varphi) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\,\frac{1}{R}\,\vec{e_\varphi}\cdot\Big(-R\,\vec{e_\varphi}\Big) = 0.$$

5) **Flux du champ à travers la surface.** Enfin, le flux de $\vec{B}$ à travers S^+ est donc nul :

$$\iint_{S^+} \vec{B}\cdot\vec{dS} = \iint_{[0,H]\times[0,2\pi]} \vec{B}\big(g(z,\varphi)\big)\cdot\vec{n}_g(z,\varphi)\;dz\,d\varphi = 0.$$

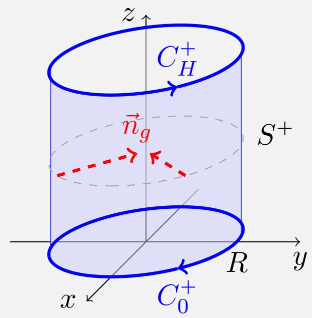
<u>Méthode 2 – Théorème de Stokes</u>. On veut maintenant calculer le même flux en utilisant le théorème de Stokes

$$\iint_{S^+} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}\cdot\overrightarrow{dS} = \oint_{\partial S^+} \vec{A}\cdot\overrightarrow{d\ell},$$

où $C^+ = \partial S^+$ est le bord du cylindre S^+, orienté dans le sens *direct*, c'est-à-dire de telle sorte qu'en la parcourant debout (dans la direction du vecteur normal $\vec{n}$ de S^+), la surface se trouve <u>sur la gauche</u>, et $\oint_{\partial S^+} \vec{A}\cdot\overrightarrow{d\ell}$ est la circulation de $\vec{A}$ le long de C^+. Procédons par étapes.

1) **Paramétrisation du bord de la surface.** Le bord du cylindre

$$S^+ = \{\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=R^2,\ z\in[0,H]\ \},$$



orienté par le vecteur normal *entrant*, est l'union $\partial S^+ = C_0^+ \cup C_H^+$ de deux cercles à hauteur $z=0$ et $z=H$:

$$C_0^+ = \{\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=R^2,\ z=0\ \}$$
$$C_H^+ = \{\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=R^2,\ z=H\ \}$$

orientés dans le sens *direct* :

– le cercle C_0^+ est orienté dans le sens de rotation de $\vec{\jmath}$ vers $\vec{\imath}$,

– le cercle C_H^+ est orienté dans le sens de rotation de $\vec{\imath}$ vers $\vec{\jmath}$.

Le cylindre S^+ est paramétré par

$$g(z,\varphi) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, z), \qquad z\in[0,H], \quad \varphi\in[0,2\pi],$$

et les deux cercles correspondent aux points du cylindre avec $z=0$ et $z=H$, donc il reste libre l'angle de rotation φ qui peut servir de temps pour paramétrer les cercles. Pour trouver la bonne paramétrisation, il faut aussi tenir compte de l'orientation qu'on veut donner aux deux cercles :

– Le cercle C_0^+ est parcouru dans le sens *décroissant* de l'angle de rotation, autrement dit, on tourne en sens horaire si on prend le temps $t=-\varphi$:

$$\begin{aligned}\gamma_0(t) = g(0,-t) &= \big(R\cos(-t), R\sin(-t), 0\big)\\ &= (R\cos t, -R\sin t, 0), \qquad t\in[0,2\pi].\end{aligned}$$

– Le cercle C_H^+ est parcouru dans le sens *croissant* de l'angle de rotation, autrement dit, on tourne en sens antihoraire si on prend le temps $t=\varphi$:

$$\gamma_H(t) = g(H,t) = (R\cos t, R\sin t, H), \qquad t\in[0,2\pi].$$

2) **Vitesse des courbes décrivant le bord.** La vitesse des deux courbes γ_0 et γ_H est :

$$\gamma_0'(t) = (-R\sin t, -R\cos t, 0) = -R\Big(\sin t\,\vec{\imath} + \cos t\,\vec{\jmath}\Big),$$
$$\gamma_H'(t) = (-R\sin t, R\cos t, 0) = R\Big(-\sin t\,\vec{\imath} + \cos t\,\vec{\jmath}\Big).$$

3) **Champ de vecteur sur les courbes décrivant le bord.** Le potentiel vecteur magnétique $\overrightarrow{A}(\rho, \varphi, z) = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\ \ln\rho\ \vec{k}$ ne dépend que de la coordonnée ρ en coordonnées cylindriques. Or, sur les deux cercles on a $\rho = R$, donc

$$\overrightarrow{A}\big(\gamma_0(t)\big) = \overrightarrow{A}\big(\gamma_H(t)\big) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ \ln R\ \vec{k}$$

est un champ uniforme (constant) le long des deux cercles, dirigé dans la direction verticale.

4) **Produit scalaire.** Comme le champ $\overrightarrow{A}$ n'a qu'une composante constante en direction $\vec{k}$, son expression en coordonnées cartésiennes ne change pas, et on peut calculer le produit scalaire directement avec les deux vecteurs vitesse exprimés en coordonnées cartésiennes, sans besoin de les transformer en coordonnées cylindriques. On a alors :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A}\big(\gamma_0(t)\big)\cdot\gamma_0'(t) &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ \ln R\ \vec{k}\cdot -R\Big(\sin t\,\vec{\imath} + \cos t\,\vec{\jmath}\Big) = 0,\\
\overrightarrow{A}\big(\gamma_H(t)\big)\cdot\gamma_H'(t) &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ \ln R\ \vec{k}\cdot R\Big(-\sin t\,\vec{\imath} + \cos t\,\vec{\jmath}\Big) = 0.
\end{aligned}$$

5) **Circulation du champ le long de la courbe.** Finalement, la circulation de $\overrightarrow{A}$ le long de ∂S^+ est bien nulle :

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial S^+} \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{d\ell} &= \oint_{C_0^+} \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{d\ell} + \oint_{C_H^+} \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{d\ell}\\
&= \int_0^{2\pi} \overrightarrow{A}\big(\gamma_0(t)\big)\cdot\gamma_0'(t)\ dt + \int_0^{2\pi} \overrightarrow{A}\big(\gamma_H(t)\big)\cdot\gamma_H'(t)\ dt\\
&= 0 + 0.
\end{aligned}$$

Comparaison des résultats. On a calculé séparément

$$\iint_{S^+} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{dS} = 0 \qquad \text{et} \qquad \oint_{\partial S^+} \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{d\ell} = 0,$$

en parfait accord avec le théorème de Stokes $\displaystyle\iint_{S^+} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{dS} = \oint_{\partial S^+} \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{d\ell}$.

Exercice 61 – Flux à travers une surface fermée
Calculer le flux des champs de vecteurs suivants, à travers les surfaces fermées indiquées, dans l'une des deux possibles manières (ou les deux) :

— soit en décrivant S^+ et en utilisant la définition du flux,

— soit en trouvant la divergence du champ et le domaine Ω délimité par S^+, et en appliquant le **théorème de Gauss** $\displaystyle\oiint_{\partial\Omega^+} \vec{V}\cdot\vec{dS} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}\vec{V}\,dx\,dy\,dz.$

a) $\vec{V}(x,y,z) = x^2\,\vec{\imath} + y^2\,\vec{\jmath} + z^2\,\vec{k}$,

S = boite cylindrique fermée $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=R^2 \\ z\in[0,H]\end{array}\right. \cup \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2\leqslant R^2 \\ z=0\end{array}\right. \cup \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2\leqslant R^2 \\ z=H\end{array}\right.$

orientée par $\vec{n}$ entrant.

b) $\vec{V}(x,y,z) = z^2y\,\vec{\imath}+xy\,\vec{k}$, S = statue du David de Michelangelo à Florence, orientée par $\vec{n}$ entrant.

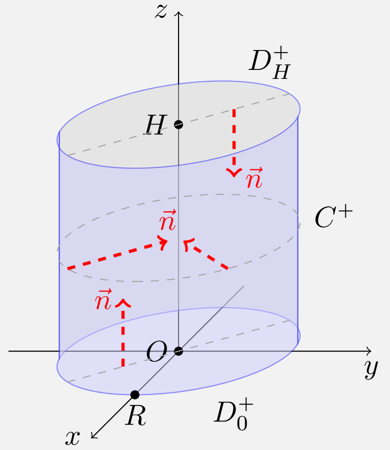
c) Calculer le flux du **champ gravitationnel** $\vec{\mathcal{G}}(r) = -\dfrac{GM}{r^2}\,\vec{e_r}$ produit par le soleil, à travers la surface de la planète Terre, orientée par $\vec{n}$ entrant.

Corrigé

a) On veut calculer le flux du champ de vecteurs

$$\vec{V}(x,y,z) = x^2\,\vec{\imath} + y^2\,\vec{\jmath} + z^2\,\vec{k}$$

à travers la boite cylindrique S^+ donnée par l'union de trois surfaces :



la parois du cylindre d'axe $0z$ et rayon R

$$C^+ = \{\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=R^2,\ z\in[0,H]\ \}$$

et les deux disques de rayon R à hauteur $z=0$ et $z=H$

$$D_0^+ = \{\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\leqslant R^2,\ z=0\ \}$$
$$D_0^+ = \{\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\leqslant R^2,\ z=H\ \}$$

orientée par le vecteur normal *entrant.*

<u>Méthode 1 – Calcul direct</u>. Le flux de $\vec{V}$ à travers $S^+ = C^+\cup D_0^+\cup D_H^+$ est la somme de trois flux

$$\oiint_{S^+}\vec{V}\cdot\vec{dS} = \iint_{C^+}\vec{V}\cdot\vec{dS} + \iint_{D_0^+}\vec{V}\cdot\vec{dS} + \iint_{D_H^+}\vec{V}\cdot\vec{dS},$$

et chaque flux se calcule avec les cinq étapes usuelles.

1) **Parois du cylindre.** On sait déjà comment paramétrer la parois d'un cylindre en utilisant les coordonnées cylindriques, et on joue sur l'ordre des coordonnées pour fixer l'orientation du vecteur normal comme on le souhaite [voir Exercice 27 b) Méthode directe]. Pour la surface C^+ on peut choisir la paramétrisation

$$f(z,\varphi) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, z),\qquad z\in[0,H],\quad \varphi\in[0,2\pi],$$

qui donne le vecteur normal entrant

$$\vec{n}_f(z,\varphi) = -R\,\vec{e_\rho} = -R\,\cos\varphi\,\vec{\imath} - R\,\sin\varphi\,\vec{\jmath}.$$

Le champ $\overrightarrow{V}$ sur la surface C vaut

$$\overrightarrow{V}\big(f(z,\varphi)\big) = R^2\,\cos^2\varphi\,\vec{\imath} + R^2\,\sin^2\varphi\,\vec{\jmath} + z^2\,\vec{k},$$

donc le produit scalaire vaut

$$\overrightarrow{V}\big(f(z,\varphi)\big)\cdot\vec{n}_f(z,\varphi) = -R^3\,\cos^3\varphi - R^3\,\sin^3\varphi = -R^3\,(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi),$$

et le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers C^+ vaut

$$\begin{aligned}
\iint_{C^+} \overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{dS} &= \iint_{[0,H]\times[0,2\pi]} \overrightarrow{V}\big(f(z,\varphi)\big)\cdot\vec{n}_f(z,\varphi)\;dz\,d\varphi \\
&= -R^3\int_0^H dz\int_0^{2\pi}(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)\,d\varphi \\
&= -R^3\,H\int_0^{2\pi}\big(\cos\varphi\,(1-\sin^2\varphi)+\sin\varphi\,(1-\cos^2\varphi)\big)\,d\varphi \\
&= -R^3\,H\int_0^{2\pi}\big(\cos\varphi-\sin^2\varphi\,\cos\varphi+\sin\varphi-\cos^2\varphi\,\sin\varphi\big)\,d\varphi \\
&= -R^3\,H\,\Big[\ \sin\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi-\cos\varphi-\frac{1}{3}\cos^3\varphi\ \Big]_0^{2\pi} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

où on a calculé deux primitives par changement de variable : en posant $u=\sin\varphi$ on calcule $du = \cos\varphi\,d\varphi$ et on a

$$\int \sin^2\varphi\,\cos\varphi\,d\varphi = \int u^2\,du = \frac{1}{3}u^3 = \frac{1}{3}\sin^3\varphi,$$

et en posant $v=\cos\varphi$ on calcule $dv=-\sin\varphi\,d\varphi$ on a

$$\int \cos^2\varphi\,\sin\varphi\,d\varphi = -\int v^2\,dv = -\frac{1}{3}v^3 = -\frac{1}{3}\cos^3\varphi.$$

2) **Disque à hauteur $z=0$.** On sait déjà comment paramétrer un disque en utilisant les coordonnées cylindriques, et on joue sur l'ordre des coordonnées pour fixer l'orientation du vecteur normal comme on le souhaite [voir Exercice 27 a) Méthode directe]. Pour la surface D_0^+ on peut choisir la paramétrisation

$$g(\rho,\varphi) = (\rho\,\cos\varphi, \rho\,\sin\varphi, 0), \qquad \rho\in[0,R], \quad \varphi\in[0,2\pi],$$

qui donne le vecteur normal orienté vers le haut

$$\vec{n}_g(\rho,\varphi) = \rho\,\vec{k}.$$

Le champ $\overrightarrow{V}$ sur le disque D_0^+ vaut

$$\overrightarrow{V}\big(g(\rho,\varphi)\big) = \rho^2\,\cos^2\varphi\,\vec{\imath} + \rho^2\,\sin^2\varphi\,\vec{\jmath},$$

donc le produit scalaire est nul

$$\overrightarrow{V}\big(g(\rho,\varphi)\big)\cdot\vec{n}_g(\rho,\varphi) = 0,$$

et par conséquent le flux de $\vec{V}$ à travers D_0^+ est également nul,

$$\begin{aligned}\iint_{D_0^+} \vec{V}\cdot\vec{dS} &= \iint_{[0,R]\times[0,2\pi]} \vec{V}\big(g(\rho,\varphi)\big)\cdot\vec{n}_g(\rho,\varphi)\; d\rho\, d\varphi \\ &= 0.\end{aligned}$$

3) **Disque à hauteur $z = H$.** Comme cette fois on veut le vecteur normal orienté vers le bas, pour la surface D_H^+ on choisit la paramétrisation

$$h(\varphi,\rho) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, H), \qquad \rho\in[0,R], \quad \varphi\in[0,2\pi],$$

qui donne le vecteur normal orienté vers le bas

$$\vec{n}_h(\varphi,\rho) = -\rho\,\vec{k}.$$

Le champ $\vec{V}$ sur le disque D_H^+ vaut

$$\vec{V}\big(h(\varphi,\rho)\big) = \rho^2\cos^2\varphi\,\vec{\imath} + \rho^2\sin^2\varphi\,\vec{\jmath} + H^2\,\vec{k},$$

donc le produit scalaire cette fois n'est pas nul, et vaut

$$\vec{V}\big(h(\varphi,\rho)\big)\cdot\vec{n}_h(\varphi,\rho) = -\rho\,H^2,$$

et par conséquent le flux de $\vec{V}$ à travers D_0^+ vaut

$$\begin{aligned}\iint_{C^+} \vec{V}\cdot\vec{dS} &= \iint_{[0,2\pi]\times[0,R]} \vec{V}\big(h(\varphi,\rho)\big)\cdot\vec{n}_h(\varphi,\rho)\; d\varphi\, d\rho \\ &= -H^2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho\, d\rho \\ &= -2\pi\,H^2\left[\ \frac{1}{2}\rho^2\ \right]_0^R \\ &= -\pi\,H^2\,R^2.\end{aligned}$$

Conclusion : Le flux de $\vec{V}$ à travers $S^+ = C^+ \cup D_0^+ \cup D_H^+$ vaut

$$\oiint_{S^+} \vec{V}\cdot\vec{dS} = \iint_{C^+} \vec{V}\cdot\vec{dS} + \iint_{D_0^+} \vec{V}\cdot\vec{dS} + \iint_{D_H^+} \vec{V}\cdot\vec{dS} = -\pi\,H^2\,R^2.$$

<u>Méthode 2 – Théorème de Gauss</u>. On veut maintenant calculer le même flux en utilisant le théorème de Gauss

$$\oiint_{S^+=\partial\Omega} \vec{V}\cdot\vec{dS} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}\vec{V}\; dx\, dy\, dz,$$

où $S = \partial\Omega$ est une surface fermée qui est donc le bord d'un solide Ω, orientée selon la règle suivante :

Règle d'orientation d'une surface S qui est le bord d'un solide Ω de $\mathbb{R}^3$:

On note (x, y, z) les coordonnées cartésiennes de $\mathbb{R}^3$.

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est donné en des coordonnées $(u, v, w) = h(x, y, z)$ par un changement de coordonnées h avec déterminant Jacobien $\det J_h$, alors :

– S est orientée avec **vecteur normal *sortant*** si $\det J_h > 0$,

– S est orientée avec **vecteur normal *entrant*** si $\det J_h < 0$.

En particulier :

– Si Ω est donné en **coordonnées cartésiennes** (x, y, z), alors la surface $S = \partial\Omega$ est orientée avec **vecteur normal *sortant***.

– Si Ω est donné en **coordonnées cylindriques** (ρ, φ, z) alors la surface $S = \partial\Omega$ est orientée avec **vecteur normal *sortant***.

– Si Ω est donné en **coordonnées sphériques** (r, φ, θ) alors la surface $S = \partial\Omega$ est orientée avec **vecteur normal *entrant***. En effet, la coordonnée θ inverse l'orientation de z !

Pour appliquer ce théorème on procède par étapes.

1) **Divergence du champ de vecteurs.** La divergence du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x, y, z) = x^2\ \vec{\imath} + y^2\ \vec{\jmath} + z^2\ \vec{k}$ vaut

$$\operatorname{div} \overrightarrow{V}(x, y, z) = \frac{\partial x^2}{\partial x} + \frac{\partial y^2}{\partial y} + \frac{\partial z^2}{\partial z} = 2x + 2y + 2z = 2(x + y + z).$$

2) **Solide entouré par la surface.** La surface S entoure le cylindre Ω de rayon R et hauteur H d'axe Oz, qui se décrit comme

$$\Omega = \{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2,\ z \in [0, H]\ \}.$$

3) **Orientation du bord du solide.** Puisque Ω est donné en coordonnées cartésiennes, sa surface de bord est naturellement orientée avec vecteur normal *sortant*, c'est-à-dire, par rapport à l'orientation *entrante* de S^+, on a

$$\partial\Omega = S^-.$$

4) **Application du Théorème de Gauss.** On a donc

$$\oiint_{\partial S^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dS} = -\oiint_{\partial S^-} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dS} = -\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \overrightarrow{V}\ dx\, dy\, dz.$$

5) **Calcul du flux.** Pour calculer l'intégrale de $\operatorname{div} \overrightarrow{V}(x, yz) = 2(x + y + z)$ sur le cylindre Ω, on transforme tout en coordonnées cylindriques (ce qui ne change pas le signe de l'intégrale). On a

$$\begin{aligned}
&\Omega = \{\ (\rho, \varphi, z) \mid \rho \in [0, R],\ \varphi \in [0, 2\pi],\ z \in [0, H]\ \},\\
&\operatorname{div} \overrightarrow{V}(\rho, \varphi, z) = 2(\rho \cos\varphi + \rho \sin\varphi + z),\\
&dx\, dy\, dz = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\oiint_{\partial S^+} \vec{V} \cdot \vec{dS} &= -2 \iiint_{\Omega} (\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi + z)\, \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz \\
&= -2 \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H (\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi + z)\, dz \\
&= -2 \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\rho(\cos\varphi + \sin\varphi)\, z + \frac{1}{2}\, z^2 \right]_0^H \\
&= -2 \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} \left(\rho\,(\cos\varphi + \sin\varphi)\, H + \frac{H^2}{2} \right) d\varphi \\
&= -2 \int_0^R \rho\, d\rho \left[\rho\,(\sin\varphi - \cos\varphi)\, H + \frac{H^2}{2}\, \varphi \right]_0^{2\pi} \\
&= -2 \int_0^R \rho\, d\rho \left(0 + \frac{H^2}{2}\, 2\pi \right) \\
&= -2\, \frac{H^2}{2}\, 2\pi \int_0^R \rho\, d\rho \\
&= -2\pi\, H^2 \left[\frac{1}{2}\, \rho^2 \right]_0^R \\
&= -\pi\, H^2\, R^2.
\end{aligned}$$

Comparaison des méthodes et des résultats. Le flux d'un champ de vecteurs $\vec{V}$ à travers une surface fermée S^+ peut être calculé soit de façon directe, en utilisant la définition du flux, soit de façon indirecte comme intégrale triple de la divergence de $\vec{V}$ sur le solide Ω entouré par S, en vertue du théorème de Gauss $\displaystyle\oiint_{S^+=\partial\Omega} \vec{V} \cdot \vec{dS} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{V}\; dx\, dy\, dz.$

Dans l'exemple traité, en effet, pour $\partial\Omega = S^-$ et en changeant de signe l'intégrale triple pour reproduir l'orientation de S^+, on trouve séparément

$$\oiint_{S^+} \vec{V} \cdot \vec{dS} = -\pi\, H^2\, R^2 \qquad \text{et} \qquad -\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{V}\; dx\, dy\, dz = -\pi\, H^2\, R^2.$$

Le calcul d'intégrale triple demande assurement *moins* de calculs de l'intégrale de surface sur toutes les parties du bord d'un solide, et il est rentable de l'utiliser quand on a le choix.

En plus de ça, **le Théorème de Gauss permet de calculer le flux d'un champ dont on connait seulement la divergence**, ce qui s'avère très utile dans les applications, surtout quand la divergence de $\vec{V}$ est constante ou nulle.

b) On veut calculer le flux du champ de vecteurs

$$\vec{V}(x,y,z) = z^2 y\ \vec{\imath} + xy\ \vec{k}$$

à travers la surface (inconnue) qui entoure la statue du David de Michelangelo à Florence, orientée par $\vec{n}$ entrant.

Dans ce problème il est impossible de paramétrer la surface, et même le solide, c'est-à-dire la statue. Le seule cas où l'on peut calculer ce flux est si la divergence du champ $\vec{V}$ est constante et qu'on connait le volume de la statue, en applicant le Théorème de Gauss.

En effet, soit Ω la statue (solide) et soit $S^- = \partial\Omega$ son bord orienté avec vecteur normal *sortant* (car S^+ est la même surface mais orientée avec vecteur normal *entrant*). Si $\vec{V}$ a divergence constante, disons

$$\text{si} \quad \operatorname{div} \vec{V}(x,y,z) = c \qquad \text{pour tout } (x,y,z) \in \Omega,$$

alors on a

$$\begin{aligned} \oiint_{S^+} \vec{V} \cdot \vec{dS} &= -\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{V}\ dx\,dy\,dz \\ &= -c \iiint_{\Omega} dx\,dy\,dz \\ &= -c\operatorname{Vol}(\Omega). \end{aligned}$$

Pour le champ $\vec{V}(x,y,z) = z^2 y\ \vec{\imath} + xy\ \vec{k}$ on a

$$\operatorname{div} \vec{V}(x,y,z) = \frac{\partial(z^2 y)}{\partial x} + \frac{\partial(0)}{\partial y} + \frac{\partial(xy)}{\partial z} = 0,$$

donc

$$\oiint_{S^+} \vec{V} \cdot \vec{dS} = -0 \cdot \operatorname{Vol}(\Omega) = 0.$$

c) On veut calculer le flux du **champ gravitationnel** $\vec{\mathcal{G}}(r) = -\dfrac{GM}{r^2}\ \vec{e_r}$ produit par le soleil à travers la surface de la planète Terre, orientée par $\vec{n}$ entrant.

On pourrait être tentés de modéliser la Terre avec une boule, et donc la surface de la terre avec une sphère, mais on nous dit pas quel est son rayon, et en général <u>dans un problème de math on donne toutes les informations nécessaires à sa résolution</u>. Donc il ne faut pas céder à cette tentation, il y a certainement le moyen d'éviter une quelconque modélisation.

Calculons alors d'abord la divergence du champ gravitationnel, en utilisant le formulaire pour connaitre la formule de la divergence en coordonnées sphériques (page du verso, 3ème colonne) :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{\mathcal{G}}(r) &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \frac{-GM}{r^2}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(0)}{\partial\varphi} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta \cdot 0)}{\partial\theta} \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(-GM)}{\partial r} + 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Alors, si on appelle Ω la Terre et S sa croute, en applicant le Théorème de Gauss on trouve

$$\oiint_{S^+} \vec{\mathcal{G}} \cdot \vec{dS} = -\oiint_{S^-} \vec{V} \cdot \vec{dS} = -\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{\mathcal{G}}\ dx\,dy\,dz = 0.$$

Exercice 62 – Flux [Facultatif]
Calculer le flux des champs de vecteurs suivants, en utilisant la définition ou un théorème approprié (Stokes ou Gauss) :

a) $\vec{V}(x,y,z) = yz\,\vec{\imath} - xz\,\vec{\jmath} - z(x^2+y^2)\,\vec{k}$,

$S^+ =$ hélicoïde (escalier en colimaçon) paramétré par $\begin{cases} f(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, \varphi) \\ r \in [0,1], \quad \varphi \in [0,2\pi] \end{cases}$.

b) $\vec{V}(x,y,z) = y^2\,\vec{\imath} + z\,\vec{k}$, $\quad S^+ =$ triangle $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x,y,z \geqslant 0 \end{cases}$ avec paramètres $\begin{cases} u = x \\ v = x+y \end{cases}$.

[*Noter que les bornes des variables x, y et z sont liées sur S. Par exemple, si on choisit $x \in [0,1]$ comme variable indépendante, alors on a $y \in [0, 1-x]$ et $z = 1-(x+y)$, ou bien $z \in [0,1-x]$ et $y = 1-(x+z)$.*]

c) $\vec{V} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{U}$ où $\vec{U}(x,y) = (2xy - x^2)\,\vec{\imath} + (x+y^2)\,\vec{\jmath}$,

$S^+ =$ surface plane délimitée par $\begin{cases} y = x^2 \\ x : 0 \to 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = y^2 \\ y : 1 \to 0 \end{cases}$.

d) $\vec{E}(r) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{r^2}\,\vec{e_r} =$ **champ électrique**, en sachant que $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi$ où $\Phi(r) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{r}$

$S^+ =$ cube de coté R centré en $(3R, 3R, 3R)$ orienté par $\vec{n}$ sortant.

e) $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\dfrac{1}{\rho}\,\vec{e_\varphi} =$ **champ magnétique**, en sachant que $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$ où $\vec{A}(\rho) = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\,\ln(\rho)\,\vec{k}$,

$S+=$ écran vertical $\begin{cases} \rho = \varphi + 1 \\ \varphi \in [0,2\pi] \\ z \in [0,H] \end{cases}$ avec $\vec{n}$ sortant.

Corrigé

a) On veut calculer le flux du champ de vecteurs

$$\vec{V}(x,y,z) = yz\,\vec{\imath} - xz\,\vec{\jmath} - z(x^2+y^2)\,\vec{k}$$

à travers un écran en forme d'**hélicoïde**, qui est la surface de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par

$$f(u,v) = (u\,\cos v, u\,\sin v, v), \qquad u,v \in \mathbb{R}.$$

aussi appelé **escalier en colimaçon**. L'écran qu'on considère consiste d'une portion d'hélicoide obtenue en limitant les paramètres à deux intervalles bornés :

$$S^+ = \{\ f(r,\varphi) = (r\,\cos\varphi, r\,\sin\varphi, \varphi) \mid r \in [0,1],\ \varphi \in [0,2\pi]\ \}.$$

Pour calculer ce flux, on cherche d'abord des conditions particulières qui nous permettraient d'appliquer soit le théorème de Stokes (si le champ $\vec{V}$ admet un potentiel vectoriel $\vec{U}$) soit le théorème de Gauss (si la surface S est fermée). S'il n'y a aucune condition particulière on applique la définition du flux à travers une surface paramétrée.

1) **Étude de la surface S en vue d'appliquer le Théorème de Gauss.** Le Théorème de Gauss peut s'appliquer seulement si la surface S est fermée. Dessinons-la.

On remarque que la paramétrisation de S est *linéaire* en le paramètre r : on peut écrire

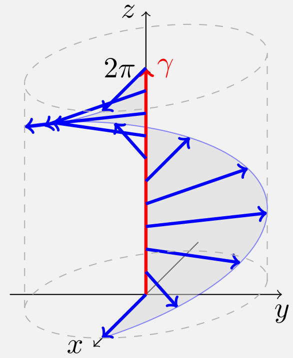
$$\begin{aligned} f(r,\varphi) &= (r\,\cos\varphi, r\,\sin\varphi, \varphi) \\ &= (0,0,\varphi) + (r\,\cos\varphi, r\,\sin\varphi, 0) \\ &= (0,0,\varphi) + r\,(\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \\ &= \gamma(\varphi) + r\,\vec{d}(\varphi), \end{aligned}$$

donc S est une surface *réglée* avec

– courbe génératrice $\gamma(\varphi) = (0,0,\varphi)$ avec $\varphi \in [0,2\pi]$: elle décrit le segment $[0,1]$ sur l'axe Oz ;

– vecteur directeur $\vec{d}(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ en tout point $\gamma(\varphi)$: c'est un vecteur horizontal qui tourne autour de l'axe Oz au fur et à mesure qu'on monte le long de l'axe ;

– segment paramétré par la distance $r \in [0,1]$ à l'axe Oz, sur chaque droite.



Cela nous permet de dessiner l'hélicoide en collant tous les segments un à coté de l'autre. Cette surface n'est évidemment pas fermée, car son bord n'est pas vide.

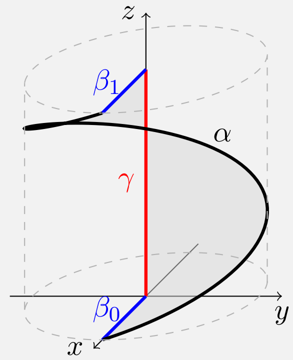
En effet, le bord ∂S est une courbe (fermée) formée de quatre parties :

– le segment $\gamma = [0,2\pi]$ sur l'axe $0z$ (en rouge),

– le segment $\beta_0 = [0,1]$ sur l'axe $0x$ à hauteur $z = 0$ (en bleu),

– le segment $\beta_1 = [0,1]$ sur l'axe $0x$ à hauteur $z = 2\pi$ (en bleu),

– l'hélice $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ avec $t \in [0,2\pi]$ (en noir).



En conclusion, puisque S n'est pas fermée, on ne peut pas appliquer le Théorème de Gauss.

2) **Étude du champ $\vec{V}$ en vue d'appliquer le Théorème de Stokes.** Le Théorème de Stokes peut s'appliquer seulement si le champ $\vec{V}$ admet un potentiel vectoriel $\vec{U}$, c'est-à-dire s'il s'écrit comme $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}$. Pour savoir si tel est le cas, on applique le Lemme de Poincaré II : puisque le champ $\vec{V}(x,y,z) = yz\,\vec{\imath} - xz\,\vec{\jmath} - z(x^2+y^2)\,\vec{k}$ est polynomial, son domaine de définition est $\mathbb{R}^3$, qui est contractile. Le Lemme de Poincaré dit alors que

$$\vec{V} \text{ admet un potentiel vectoriel} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{div}\,\vec{V} = 0.$$

Calculons alors la divergence de $\vec{V}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\,\vec{V}(x,y,z) &= \frac{\partial(yz)}{\partial x} + \frac{\partial(-xz)}{\partial y} + \frac{\partial(-z(x^2+y^2))}{\partial z} \\ &= 0 + 0 - (x^2+y^2) \neq 0. \end{aligned}$$

Puisque la divergence de $\vec{V}$ est non nulle, par le Lemme de Poincaré II le champ $\vec{V}$ n'admet pas de potentiel vectoriel, et donc on ne peut pas appliquer le Théorème de Stokes pour calculer son flux à travers S.

3) **Calcul du flux de $\vec{V}$ en utilisant la définition.** Cela se fait en cinq étapes, moins la 1ère (trouver la paramétrisation de la surface) car la paramétrisation de l'hélicoïde S est déjà donnée :

$$S^+ = \{\ f(r,\varphi) = (r\,\cos\varphi, r\,\sin\varphi, \varphi) \mid r \in [0,1],\ \varphi \in [0,2\pi]\ \}.$$

Son vecteur normal est donc

$$\begin{aligned}
\vec{n}_f(r,\varphi) &= \frac{\partial f(r,\varphi)}{\partial r} \wedge \frac{\partial f(r,\varphi)}{\partial \varphi} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -r\,\sin\varphi \\ r\,\cos\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \\ r\,\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \\ r \end{pmatrix} \\
&= \sin\varphi\,\vec{\imath} - \cos\varphi\,\vec{\jmath} + r\,\vec{k}.
\end{aligned}$$

La valeur du champ $\overrightarrow{V}(x,y,z) = yz\ \vec{\imath} - xz\ \vec{\jmath} - z(x^2+y^2)\ \vec{k}$ sur la surface est

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V}\big(f(r,\varphi)\big) &= r\,\varphi\,\sin\varphi\,\vec{\imath} - r\,\varphi\,\cos\varphi\,\vec{\jmath} - \varphi\,(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)\,\vec{k} \\
&= r\,\varphi\,\sin\varphi\,\vec{\imath} - r\,\varphi\,\cos\varphi\,\vec{\jmath} - r^2\,\varphi\,\vec{k}.
\end{aligned}$$

Le produit scalaire du champ par le vecteur normal est donc

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V}\big(f(r,\varphi)\big)\cdot\vec{n}_f(r,\varphi) &= r\,\varphi\,\sin^2\varphi + r\,\varphi\,\cos^2\varphi - r^3\,\varphi \\
&= r\,\varphi - r^3\,\varphi = (r-r^3)\,\varphi,
\end{aligned}$$

et le flux de $\overrightarrow{V}$ à travesr S^+ vaut donc

$$\begin{aligned}
\iint_{S^+} \overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{dS} &= \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \overrightarrow{V}\big(f(r,\varphi)\big)\cdot\vec{n}_f(r,\varphi)\ dr\,d\varphi \\
&= \int_0^1 (r-r^3)\,dr \int_0^{2\pi} \varphi\,d\varphi \\
&= \left[\ \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4\ \right]_0^1 \left[\ \frac{1}{2}\,\varphi^2\ \right]_0^{2\pi} \\
&= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\,\frac{1}{2}\,4\pi^2 \\
&= \frac{1}{2}\,\pi^2.
\end{aligned}$$

b) On veut calculer le flux du champ de vecteurs

$$\vec{V}(x,y,z) = y^2\ \vec{\imath} + z\ \vec{k}$$

à travers un écran S^+ en forme de triangle, donné en coordonnées cartésiennes par

$$S = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=1,\ \ x,y,z \geqslant 0\ \}$$

et paramétré avec les paramètres $u = x$ et $v = x + y$.

Pour calculer ce flux, on cherche d'abord des conditions particulières qui nous permettraient d'appliquer soit le théorème de Stokes (si le champ $\vec{V}$ admet un potentiel vectoriel $\vec{U}$) soit le théorème de Gauss (si la surface S est fermée). S'il n'y a aucune condition particulière on applique la définition du flux à travers une surface paramétrée.

1) **Étude de la surface S en vue d'appliquer le Théorème de Gauss.** Le Théorème de Gauss peut s'appliquer seulement si la surface S est fermée. Dessinons-la.

La surface S est détérminée par l'équation $x + y + z = 1$ de dégré 1 qui décrit un plan [voir Ch. 8 du cours TMB], et par les contraintes $x, y, z \geqslant 0$.

Pour dessiner cette portion de plan, on regarde son intersection avec les plans xOy, xOz, yOz :

– si $z = 0$, on a la droite $y = 1 - x$ sur le plan xOy,

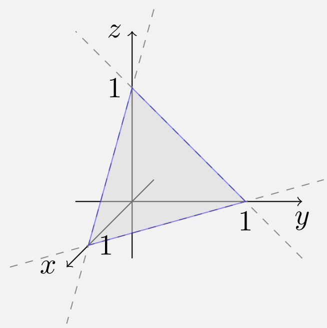
– si $y = 0$, on a la droite $z = 1 - x$ sur le plan xOz,

– si $x = 0$, on a la droite $z = 1 - y$ sur le plan yOz,

ensuite on se restreint aux segments où $x, y, z \geqslant 0$,

enfin on trouve le plan qui contient ces segments.

La forme qu'on obtient est bien celle d'un triangle.



Cette portion de plan n'est évidemment pas une surface fermée, car son bord n'est pas vide, c'est le triangle bleu ! Par conséquent, on ne peut pas appliquer le Théorème de Gauss.

2) **Étude du champ $\vec{V}$ en vue d'appliquer le Théorème de Stokes.** Le Théorème de Stokes peut s'appliquer seulement si le champ $\vec{V}$ admet un potentiel vectoriel $\vec{U}$, c'est-à-dire s'il s'écrit comme $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}$. Pour savoir si tel est le cas, on applique le Lemme de Poincaré II : puisque le champ $\vec{V}(x,y,z) = y^2\ \vec{\imath} + z\ \vec{k}$ est polynomial, son domaine de définition est $\mathbb{R}^3$, qui est contractile. Le Lemme de Poincaré dit alors que

$$\vec{V} \text{ admet un potentiel vectoriel} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{div} \vec{V} = 0.$$

Calculons alors la divergence de $\vec{V}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{V}(x,y,z) &= \frac{\partial y^2}{\partial x} + \frac{\partial (0)}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \\ &= 0 + 0 + 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Puisque la divergence de $\vec{V}$ est non nulle, par le Lemme de Poincaré II le champ $\vec{V}$ n'admet pas de potentiel vectoriel, et donc on ne peut pas appliquer le Théorème de Stokes pour calculer son flux à travers S.

3) **Calcul du flux de $\vec{V}$ en utilisant la définition.** Cela se fait en cinq étapes. On commence par trouver une paramétrisation de la surface S, en suivant les indications qui proposent de prendre comme paramètres indépendants les valeurs

$$u = x \qquad \text{et} \qquad v = x + y.$$

On calcule alors les coordonnées comme fonctions de u et v :

$$\begin{aligned}
&x = u\\
&y = v - x = v - u\\
&z = 1 - x - y = 1 - u - (v - u) = 1 - u - v + u = 1 - v
\end{aligned}$$

et on cherche les intervalles de variation des paramètres pour couvrir S :

– puisque $0 \leqslant x \leqslant 1$ pour les points de S, on a $u = x \in [0, 1]$;

– puisque $0 \leqslant z \leqslant 1$ pour les points de S, on a $-1 \leqslant -z \leqslant 0$, d'où

$$0 = 1 - 1 \leqslant 1 - z = v \leqslant 1 + 0 = 1,$$

c'est-à-dire $v \in [0, 1]$.

La paramétrisation en (u, v) de S est donc

$$S^+ = \{\ f(u, v) = (u, v - u, 1 - v) \mid u, v \in [0, 1]\ \}.$$

Son vecteur normal est donc

$$\begin{aligned}
\vec{n}_f(u, v) &= \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \wedge \frac{\partial f(u, v)}{\partial v}\\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}.
\end{aligned}$$

La valeur du champ $\overrightarrow{V}(x, y, z) = y^2\ \vec{\imath} + z\ \vec{k}$ sur la surface est

$$\overrightarrow{V}\big(f(u, v)\big) = (v - u)^2\, \vec{\imath} + (1 - v)\, \vec{k}.$$

Le produit scalaire du champ par le vecteur normal est donc

$$\overrightarrow{V}\big(f(u, v)\big) \cdot \vec{n}_f(u, v) = (v - u)^2 + (1 - v) = u^2 - 2uv + v^2 - v + 1,$$

et le flux de $\overrightarrow{V}$ à travesr S^+ vaut

$$\begin{aligned}
\iint_{S^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dS} &= \iint_{[0,1]\times[0,1]} \overrightarrow{V}\big(f(u, v)\big) \cdot \vec{n}_f(u, v)\ du\, dv\\
&= \int_0^1 du \int_0^1 \big(u^2 - 2uv + v^2 - v + 1\big)\ dv\\
&= \int_0^1 du \Big[\ u^2 v - uv^2 + \frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{2}v^2 + v\ \Big]_0^1\\
&= \int_0^1 \left(u^2 - u + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1\right)\ du\\
&= \int_0^1 \left(u^2 - u + \frac{5}{6}\right)\ du\\
&= \Big[\ \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{2}u^2 + \frac{5}{6}u\ \Big]_0^1\\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{5}{6} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

c) On veut calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{U}$, où

$$\vec{U}(x,y) = (2xy - x^2)\ \vec{\imath} + (x + y^2)\ \vec{\jmath},$$

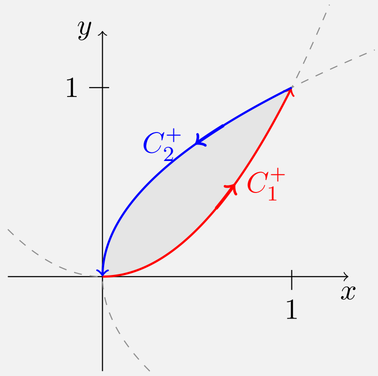
à travers la surface plane S^+, contenue dans le plan xOy, délimitée par les courbes

$$C_1 = \{\ (x,y) \mid y = x^2, x \in [0,1]\ \} \qquad \text{(en rouge)}$$

orientée de $(0,0)$ vers $(1,1)$, et

$$C_2 = \{\ (x,y) \mid x = y^2, y \in [0,1]\ \} \qquad \text{(en bleu)}$$

orientée de $(1,1)$ vers $(0,0)$, avec l'orientation sur S induite par celle donnée sur son bord $\partial S = C_1 \cup C_2$, c'est-à-dire le vecteur normal *sortant* du plan en notre direction.



Ce flux se calcule clairement en appliquant le théorème de Stokes :

$$\iint_{S^+} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{U} \cdot \vec{dS} = \oint_{\partial S^+} \vec{U} \cdot \vec{d\ell} = \int_{C_1^+} \vec{U} \cdot \vec{d\ell} + \int_{C_2^+} \vec{U} \cdot \vec{d\ell}.$$

1) **Circulation de $\vec{U}$ le long de la courbe C_1^+.** On fixe une paramétrisation de la courbe C_1^+ qui respecte l'orientation voulue, par exemple :

$$\alpha(t) = (t, t^2), \qquad \text{avec } t \in [0,1].$$

Le vecteur vitesse de la courbe est donc

$$\alpha'(t) = (1, 2t) = \vec{\imath} + 2t\,\vec{\jmath}.$$

Le champ $\vec{U}(x,y) = (2xy - x^2)\ \vec{\imath} + (x + y^2)\ \vec{\jmath}$ évalué le long de α vaut

$$\vec{U}(\alpha(t)) = (2t^3 - t^2)\,\vec{\imath} + (t + t^4)\,\vec{\jmath}.$$

Le produit scalaire de $\vec{U}$ par la vitesse de α vaut

$$\begin{aligned}\vec{U}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) &= (2t^3 - t^2) + 2t\,(t + t^4) \\ &= 2t^3 - t^2 + 2t^2 + 2t^5 = t^2 + 2t^3 + 2t^5,\end{aligned}$$

donc la circulation de $\vec{U}$ le long de C_1^+ vaut

$$\begin{aligned}\int_{C_1^+} \vec{U} \cdot \vec{d\ell} &= \int_0^1 \vec{U}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\ dt \\ &= \int_0^1 (t^2 + 2t^3 + 2t^5)\, dt \\ &= \left[\ \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{4}t^4 + \frac{2}{6}t^6\ \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{4+3}{6} = \frac{7}{6}.\end{aligned}$$

2) **Circulation de $\overrightarrow{U}$ le long de la courbe C_2^+.** On fixe une paramétrisation de la courbe C_2^+ qui respecte l'orientation voulue, par exemple :

$$\beta(t) = ((1-t)^2, 1-t), \qquad \text{avec } t \in [0,1].$$

Le vecteur vitesse de la courbe est donc

$$\beta'(t) = (-2(1-t), -1) = -2(1-t)\,\vec{\imath} - \vec{\jmath}.$$

Le champ $\overrightarrow{U}(x,y) = (2xy - x^2)\ \vec{\imath} + (x+y^2)\ \vec{\jmath}$ évalué le long de β vaut

$$\begin{aligned}\overrightarrow{U}(\beta(t)) &= \big(2(1-t)^3 - (1-t)^4\big)\,\vec{\imath} + ((1-t)^2 + (1-t)^2)\,\vec{\jmath}\\ &= \big(2(1-t)^3 - (1-t)^4\big)\,\vec{\imath} + 2(1-t)^2\,\vec{\jmath}.\end{aligned}$$

Le produit scalaire de $\overrightarrow{U}$ par la vitesse de β vaut

$$\begin{aligned}\overrightarrow{U}(\beta(t)) \cdot \beta'(t) &= -2(1-t)\big(2(1-t)^3 - (1-t)^4\big) - 2(1-t)^2\\ &= -2(1-t)^2 - 4(1-t)^4 + 2(1-t)^5.\end{aligned}$$

On calcule la circulation de $\overrightarrow{U}$ le long de C_2^+ avec le changement de variable $u = 1-t$, qui donne $du = -dt$ et les bornes d'intégration $u_0 = 1-0 = 1$ et $u_1 = 1-1 = 0$:

$$\begin{aligned}\int_{C_2^+} \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{d\ell} &= \int_0^1 \overrightarrow{U}(\beta(t)) \cdot \beta'(t)\ dt\\ &= \int_0^1 \big(-2(1-t)^2 - 4(1-t)^4 + 2(1-t)^5\big)\,dt\\ &= \int_1^0 \big(-2u^2 - 4u^4 + 2u^5\big)\,\big(-du\big)\\ &= \int_0^1 \big(-2u^2 - 4u^4 + 2u^5\big)\,du\\ &= \Big[-\frac{2}{3}u^3 - \frac{4}{5}u^5 + \frac{2}{6}u^6\Big]_0^1\\ &= -\frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} - \frac{4}{5}\\ &= \frac{-5-12}{15}\\ &= -\frac{17}{15}.\end{aligned}$$

3) **Flux de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{U}$ à travers S^+.** Finalement, le flux de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{U}$ à travers S^+ vaut

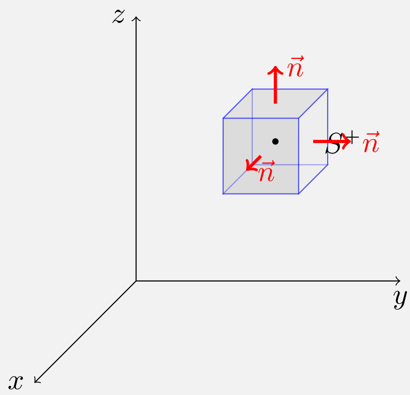
$$\begin{aligned}\iint_{S^+} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{dS} &= \int_{C_1^+} \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{d\ell} + \int_{C_2^+} \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{d\ell}\\ &= \frac{7}{6} - \frac{17}{15}\\ &= \frac{35-34}{30}\\ &= \frac{1}{30}.\end{aligned}$$

d) On veut calculer le flux du **champ électrique**

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r^2}\,\vec{e_r}$$

à travers la parois du cube de coté R centré en $(3R, 3R, 3R)$ orienté par $\vec{n}$ sortant, en sachant que $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi$ où

$$\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r}.$$



La parois du cube est une surface S^+ fermée, on applique le Théorème de Gauss au cube Ω :

$$\oiint_{S^+} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \iiint_{\Omega} \text{div}\,\vec{E}\;dx\,dy\,dz.$$

Puisque $\vec{E}$ est un champ de gradient, sa divergence est le Laplacien de son potentiel Φ. Puisque $\vec{E}$ et Φ sont donnés en coordonnées sphériques, ce Laplacien se calcule à l'aide du formulaire (page verso, 3ème colonne) :

$$\begin{aligned}
\text{div}\,\vec{E}(r) &= -\text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi(r)\right) = -\Delta\Phi(r) \\
&= -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial\Phi(r)}{\partial r}\right) \\
&= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\right) \\
&= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{-1}{r^2}\right) \\
&= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r^2}\frac{\partial(-1)}{\partial r} = 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, le flux de $\vec{E}$ à travers la parois du cube est nul.

e) On veut calculer le flux du **champ magnétique**

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\,\frac{1}{\rho}\,\vec{e_\varphi}$$

à travers l'écran vertical donné en coordonnées cylindriques par

$$S^+ = \{\ (\rho,\varphi,z)\ |\ \rho = \varphi + 1,\ \ \varphi \in [0, 2\pi],\ \ z \in [0, H]\ \},$$

orienté par le vecteur normal $\vec{n}$ *sortant*, en sachant que $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$ où

$$\vec{A}(\rho) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\;\ln(\rho)\;\vec{k}.$$

Ce flux peut être calculé soit de façon directe, en utilisant la définition, soit en appliquant le Théorème de Stokes

$$\iint_{S^+} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\cdot\vec{dS} = \oint_{\partial S^+} \vec{A}\cdot\vec{d\ell}.$$

Dans tous les cas, on a besoin de dessiner la surface S, avec son bord.

1) **Paramétrisation et dessin de la surface.** Comme d'habitude, le dessin de la surface se fait à partir d'une paramétrisation.

La surface S est définie en coordonnées cylindriques par l'équation $\rho = \varphi + 1$, qui n'implique pas la coordonnée z. Il s'agit donc de la parois d'un cylindre d'axe Oz et profil donné par la courbe $\rho = \varphi + 1$ à hauteur $z = 0$. En d'autre termes, c'est à nouveau une surface réglée, et en plus les vecteurs directeurs sont tous parallèles.

Pour trouver la paramétrisation de S, on utilise simplement l'expression des coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées cylindriques, avec la contrainte $\rho = \varphi + 1$:

$$f(\varphi, z) = \big((\varphi+1)\cos\varphi, (\varphi+1)\sin\varphi, z\big), \qquad \varphi \in [0, 2\pi], \quad z \in [0, H].$$

Pour la dessiner, on l'exprime comme surface réglée :

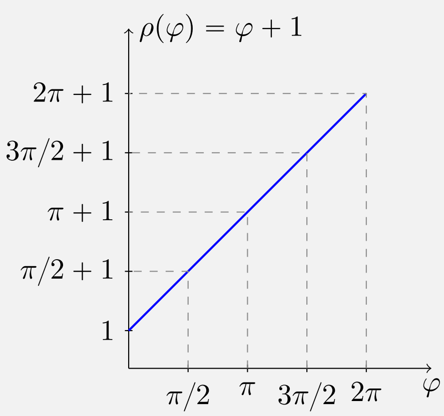
$$\begin{aligned} f(\varphi, z) &= \big((\varphi+1)\cos\varphi, (\varphi+1)\sin\varphi, 0\big) + z\,(0,0,1) \\ &= \gamma(\varphi) + z\,\vec{d}(\varphi), \end{aligned}$$

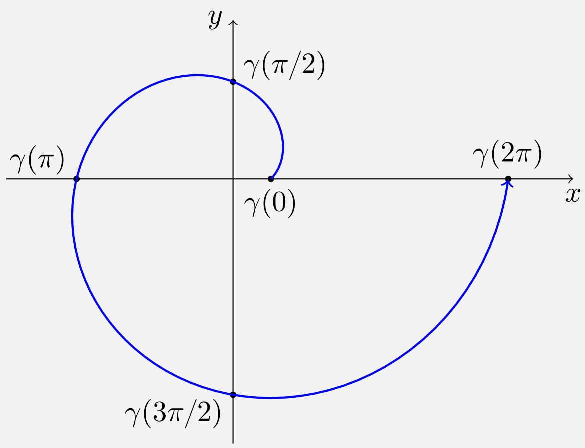
où

– la courbe génératrice $\gamma(\varphi) = \big((\varphi+1)\cos\varphi, (\varphi+1)\sin\varphi, 0\big)$ est dans le plan xOy,

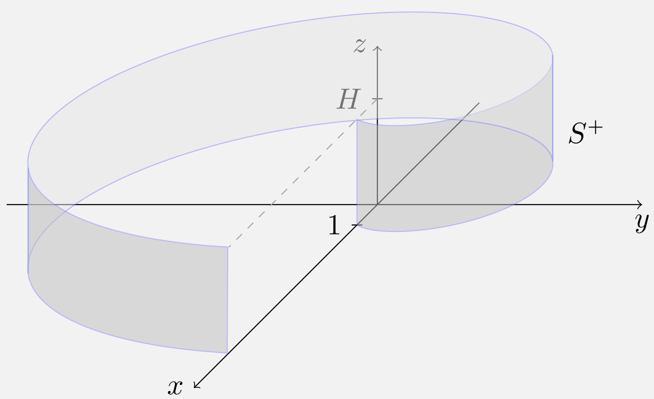
– le vecteur directeur vertical $\vec{d}(\varphi) = (0,0,1) = \vec{k}$ est le même en tout point de la courbe γ.

Il suffit donc de dessiner la courbe γ dans le plan xOy, ce qui est facile : il s'agit d'un point qui tourne autour de l'origine à la distance $\rho = \varphi + 1$ qui dépend de l'angle de rotation. On dessine la fonction $\rho(\varphi) = \varphi + 1$ sur l'intervalle $[0, \pi]$ et on l'enroule autour de l'origine !





Enfin, on ajoute un segment vertical long H à partir de tout point de la courbe γ :



Vérifons que cette paramétrisation donne bien un vecteur normal *sortant* :

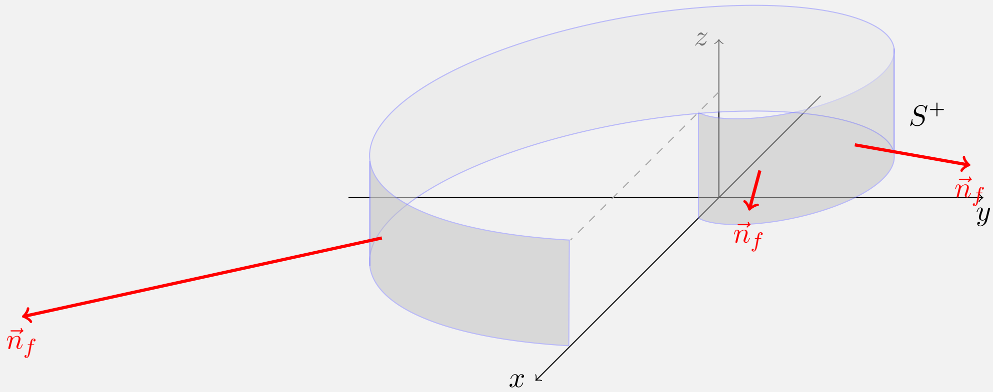
$$\vec{n}_f(\varphi,z) = \frac{\partial f(\varphi,z)}{\partial \varphi} \wedge \frac{\partial f(\varphi,z)}{\partial z}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi - (\varphi+1)\,\sin\varphi \\ \sin\varphi + (\varphi+1)\,\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi + (\varphi+1)\,\cos\varphi \\ -\cos\varphi + (\varphi+1)\,\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

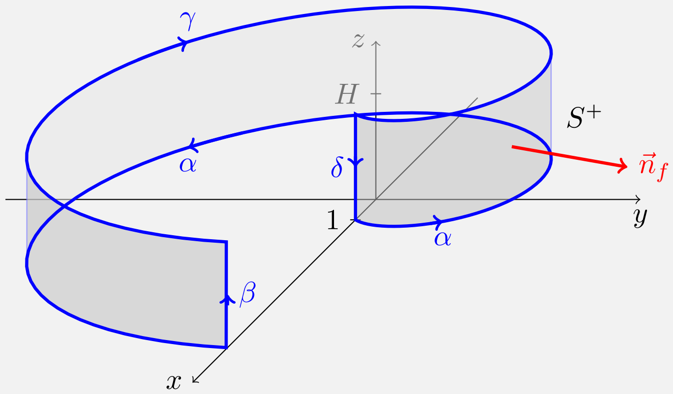
Pour le dessiner on l'évalue en quelques points (un suffit) :

$$\vec{n}_f(\pi/2,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ \pi/2+1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{n}_f(7\pi/4,1) = \begin{pmatrix} 7\pi\sqrt{2}/8 \\ (7\pi+8)\sqrt{2}/8 \\ 0 \end{pmatrix},$$

il est bien sortant.



2) **Paramétrisation du bord de la surface.** D'après le dessin ci-haut, le bord de S est la courbe fermée et orientée ∂S^+ formée des quatre composantes α, β, γ et δ dessinées ici :



paramétrées comme suit :

$$\alpha(t) = f(t,0) = \big((t+1)\,\cos t, (t+1)\,\sin t, 0\big) \qquad t \in [0,2\pi],$$

$$\beta(t) = f(2\pi,t) = \big(2\pi+1, 0, t\big) \qquad t \in [0,H],$$

$$\gamma(t) = f(2\pi-t,H) = \Big((2\pi+1-t)\,\cos(2\pi-t), (2\pi+1-t)\,\sin(2\pi-t), H\Big)$$

$$= \Big((2\pi+1-t)\,\cos t, \big(t-(2\pi+1)\big)\,\sin t, H\Big) \qquad t \in [0,2\pi],$$

$$\delta(t) = f(0,H-t) = \big(1,0,H-t\big) \qquad t \in [0,H].$$

3) **Circulation de $\overrightarrow{A}$ le long de ∂S^+.** On calcule la circulation du champ $\overrightarrow{A}(\rho) = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\ \ln(\rho)\ \vec{k}$ le long de chaque courbe séparément. Le long de α, on a :

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= \Big((t+1)\ \cos t, (t+1)\ \sin t, 0\Big) \qquad t \in [0, 2\pi] \\
\alpha'(t) &= \big(\cos t - (t+1)\ \sin t\big)\ \vec{\imath} + \big(\sin t + (t+1)\ \cos t\big)\ \vec{\jmath} \\
\overrightarrow{A}(\alpha(t)) &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ \ln(t+1)\ \vec{k} \qquad (\text{car } \rho = \varphi + 1 = t+1 \text{ sur } \alpha) \\
\overrightarrow{A}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) &= 0 \\
\int_\alpha \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{d\ell} &= \int_0^{2\pi} 0\ dt = 0.
\end{aligned}$$

Le long de β, on a :

$$\begin{aligned}
\beta(t) &= \big(2\pi + 1, 0, t\big) \\
\beta'(t) &= \vec{k} \qquad t \in [0, H] \\
\overrightarrow{A}(\beta(t)) &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ \ln(2\pi+1)\ \vec{k} \qquad (\text{car } \rho = \varphi + 1 = 2\pi + 1 \text{ sur } \beta) \\
\overrightarrow{A}(\beta(t)) \cdot \beta'(t) &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ \ln(2\pi+1) \\
\int_\beta \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{d\ell} &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ \ln(2\pi+1) \int_0^H dt = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ \ln(2\pi+1)\, H.
\end{aligned}$$

Le long de γ, on a :

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &= \Big((2\pi + 1 - t)\ \cos t, \big(t - (2\pi+1)\big)\ \sin t, H\Big) \qquad t \in [0, 2\pi], \\
\gamma'(t) &= \big(-\cos t - (2\pi + 1 - t)\ \sin t\, \vec{\imath} + \big(\sin t + (t - (2\pi+1))\ \cos t\big)\ \vec{\jmath} \\
\overrightarrow{A}(\gamma(t)) &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ \ln(2\pi + 1 - t)\ \vec{k} \qquad (\text{car } \rho = \varphi + 1 = 2\pi + 1 - t \text{ sur } \gamma) \\
\overrightarrow{A}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) &= 0 \\
\int_\gamma \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{d\ell} &= \int_0^{2\pi} 0\ dt = 0.
\end{aligned}$$

Enfin, le long de δ, on a :

$$\begin{aligned}
\delta(t) &= \big(1, 0, H - t\big) \qquad t \in [0, H] \\
\delta'(t) &= -\vec{k} \\
\overrightarrow{A}(\delta(t)) &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ \ln(1)\ \vec{k} = \vec{0} \qquad (\text{car } \rho = \varphi + 1 = 0 + 1 \text{ sur } \delta) \\
\int_\delta \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{d\ell} &= 0.
\end{aligned}$$

4) **Flux de $\overrightarrow{B}$ à travers S^+.** Finalement, en appliquant le Théorème de Stokes, on a donc

$$\begin{aligned}
\iint_{S^+} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_{S^+} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{dS} &= \oint_{\partial S^+} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{d\ell} \\
&= \int_\alpha \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{d\ell} + \int_\beta \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{d\ell} + \int_\gamma \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{d\ell} + \int_\delta \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{d\ell} \\
&= -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ \ln(2\pi+1)\, H.
\end{aligned}$$

5) **Calcul direct du flux de $\overrightarrow{B}$ à travers S^+.** En alternative, on peut calculer le flux de $\overrightarrow{B}$ à travers S^+ en utilisant la définition. Cela permet aussi de vérifier qu'on n'a pas fait d'erreurs !
On rassemble toutes les informations nécessaires. La surface S^+ est paramétrée par

$$f(\varphi, z) = \big((\varphi+1)\,\cos\varphi, (\varphi+1)\,\sin\varphi, z\big), \qquad \varphi \in [0, 2\pi], \quad z \in [0, H].$$

Son vecteur normal est

$$\vec{n}_f(\varphi, z) = \big(\sin\varphi + (\varphi+1)\,\cos\varphi\big)\,\vec{\imath} + \big(-\cos\varphi + (\varphi+1)\,\sin\varphi\big)\,\vec{\jmath}.$$

Pour évaluer le champ $\overrightarrow{B}(\rho) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\,\frac{1}{\rho}\,\vec{e_\varphi}$ sur S on observe que sur S on a $\rho = \varphi + 1$. Aussi, on exprime le vecteur $\vec{e_\varphi}$ dans le repère cartésien avec la formule

$$\vec{e_\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath},$$

pour pouvoir calculer le produit scalaire de $\overrightarrow{B}$ avec $\vec{n}_f$. On a donc

$$\overrightarrow{B}\big(f(\varphi, z)\big) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\,\frac{1}{\varphi+1}\,\big(-\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}\big).$$

Le produit scalaire de $\overrightarrow{B}$ et $\vec{n}_f$ est donc

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{B}\big(f(\varphi, z)\big)\cdot\vec{n}_f(\varphi, z) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\,\frac{1}{\varphi+1}\,\Big(-\sin\varphi\,\big(\sin\varphi + (\varphi+1)\,\cos\varphi\big) \\
&\qquad\qquad + \cos\varphi\,\big(-\cos\varphi + (\varphi+1)\,\sin\varphi\big)\Big) \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\,\frac{1}{\varphi+1}\,\Big(-\sin^2\varphi + (\varphi+1)\,\cos\varphi\sin\varphi - \cos^2\varphi + (\varphi+1)\,\cos\varphi\sin\varphi\Big) \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\,\frac{1}{\varphi+1}\,\Big(-1 + 2(\varphi+1)\,\cos\varphi\sin\varphi\Big) \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\,\left(-\frac{1}{\varphi+1} + 2\cos\varphi\sin\varphi\right).
\end{aligned}$$

Finalement, le flux de $\overrightarrow{B}$ à travers S^+ vaut :

$$\begin{aligned}
\iint_{S^+} \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{dS} &= \iint_{[0,2\pi]\times[0,H]} \overrightarrow{B}\big(f(\varphi, z)\big)\cdot\vec{n}_f(\varphi, z)\;d\varphi\,dz \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\iint_{[0,2\pi]\times[0,H]} \left(-\frac{1}{\varphi+1} + 2\cos\varphi\sin\varphi\right)\,d\varphi\,dz \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^H dz\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{\varphi+1} + \sin(2\varphi)\right)\,d\varphi \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\,H\,\Big[-\ln(\varphi+1) + \frac{1}{2}\cos(2\varphi)\Big]_0^{2\pi} \\
&= -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\,\ln(2\pi+1)\;H.
\end{aligned}$$

Ce résultat concorde avec le précédent !