

Fascicule d'exercices pour l'UE Math2

Printemps 2022

V. Borrelli <borrelli@math.univ-lyon1.fr>

A. Frabetti <frabetti@math.univ-lyon1.fr>

Pour toute contribution ou modification s'adresser à F. Kulzer ou U. Serres

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Prérequis | 2 |
| TD 1 – Coordonnées, fonctions de plusieurs variables | 3 |
| TD 2 – Composition, dérivée, gradient | 5 |
| TD 3 – Différentielle, jacobienne, règle de la chaîne | 6 |
| TD 4 – Hessienne, Taylor, extrema locaux | 8 |
| TD 5 – Intégrales doubles et triples, aire et volume | 10 |
| TD 6 – Moyenne et centre de masse | 11 |
| TD 7 – Topologie, courbes et surfaces | 12 |
| TD 8 – Champs scalaires et champs de vecteurs | 14 |
| TD 9 – Champs conservatifs | 15 |
| TD 10 – Champs incompressibles | 16 |
| TD 11 – Courbes et circulation | 18 |
| TD 12 – Surfaces et flux, Stokes, Gauss | 19 |

Prérequis (programme du cours TMB)

1. Espaces vectoriels et vecteurs de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 (produits scalaire, vectoriel et mixte)
2. Applications linéaires et matrices (produit, déterminant, matrice inverse).
3. Géométrie cartésienne dans le plan et dans l'espace (droites, coniques, plans, quadriques).
4. Dérivées et intégrales des fonctions d'une variable (Taylor, extrema, primitives).
5. Équations différentielles du 1er ordre.

TD 1 – COORDONNÉES, FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Exercice 1 – Changement de coordonnées des points

Dessiner les points suivants, donnés en coordonnées cartésiennes, ensuite trouver leur expression en coordonnées polaires (ρ, φ) (dans le plan) ou cylindriques (ρ, φ, z) et sphériques (r, θ, φ) (dans l'espace) :

- a) Dans le plan : $(\sqrt{3}, 1), (1, \sqrt{3}), (\sqrt{3}, -1), (-\sqrt{3}, 1), (2, -2), (0, 5), (-3, 0), (-1, -1)$.
b) Dans l'espace : $(1, 1, 1), (1, 1, -1), (1, -1, 1), (0, 2, 1), (1, -1, 0), (0, 1, -1), (0, 0, 3)$.

Exercice 2 – Sous-ensembles du plan

Dessiner les sous-ensembles suivants du plan \mathbb{R}^2 . Indiquer leur bord en trait plein s'il est inclus dans l'ensemble et en traits pointillés s'il n'y appartient pas.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2, y \leq x + 1\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2, y < x + 1\}$$

$$E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \rho \leq 3, 0 \leq \varphi \leq \pi/2\}$$

$$F = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < \rho < 3, 0 < \varphi < \pi/2\}$$

$$G = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \rho \geq 3\}$$

Exercice 3 – Domaine de définition de fonctions

Trouver le domaine de définition des fonctions suivantes et le dessiner dans un plan ou dans l'espace :

$$a) f(x, y) = \frac{\ln(x+y)}{e^{x+y}}$$

$$c) g(x, y, z) = \frac{\ln(z)}{x-y}$$

$$b) F(x, y) = \frac{\sqrt{x^2+y}}{x^2-y^2}$$

$$d) h(x, y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \frac{\sqrt{x^2+1}}{y} \right)$$

Exercice 4 – Lignes de niveau et graphe

Trouver les lignes de niveau des fonctions suivantes et dessiner celles des niveaux indiqués.

Ensuite, dessiner le graphe de f en remontant chaque ligne de niveau à son hauteur.

a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, dessiner les lignes des niveaux 0, 1, 2, et 3.

b) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$, dessiner les lignes des niveaux 0, 1, 4 et 9.

c) $f(x, y) = \frac{2y}{x}$ (avec $x \neq 0$), dessiner les lignes des niveaux 0, 1, 2, -1 et -2.

Exercice 5 – Graphe de fonctions

Trouver à quels graphes correspondent les fonctions suivantes.

a) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$

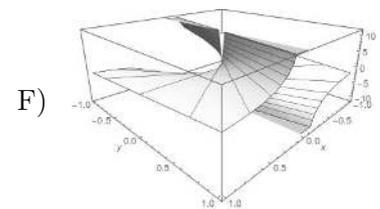
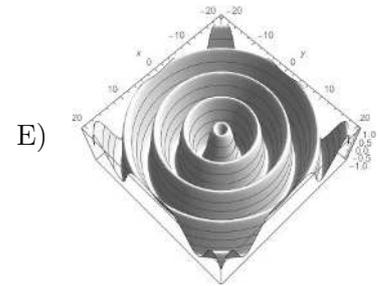
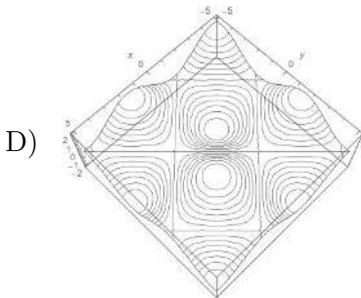
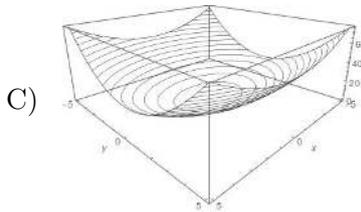
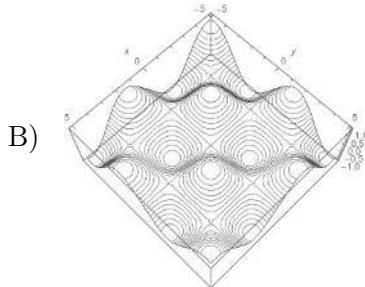
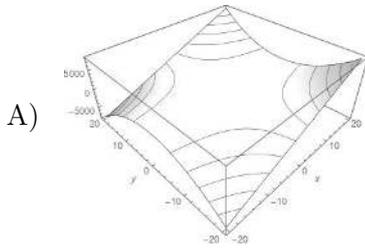
b) $f(x, y) = \frac{2y}{x}$

c) $f(x, y) = xy^2$

d) $f(x, y) = \sin(x) + \sin(y)$

e) $f(x, y) = \sin(x) \sin(y)$

f) $f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$



Exercice 6 – Changement de coordonnées de fonctions

Exprimer les fonctions suivantes en coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) et sphériques (r, θ, φ) .

a) $f(x, y, z) = z(x^2 + y^2)$

b) $g(x, y, z) = x(y^2 + z^2)$

c) $h(x, y, z) = z\sqrt{x^2 + y^2}$

d) $u(x, y, z) = (x^2 + y^2)^2 + z^4$

e) $v(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy$

f) $w(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$

g) $F(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$

h) $G(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$

i) $H(x, y, z) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + z}{x^2 + y^2 + z^2}$

j) $U(x, y, z) = xy + z^2$

k) $V(x, y, z) = (x^2 + y^2) e^{z^2}$

TD 2 – COMPOSITION, DÉRIVÉE, GRADIENT

Exercice 7 – Composées

Calculer les possibles composées des fonctions suivantes :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F(u, v) = \frac{u^2}{v^2}$$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(z) = z^4 + 1$$

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad h(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t + 1, t - 1)$$

Exercice 8 – Fonctions différentiables

Pour les fonctions suivantes, calculer les dérivées partielles (où exactes s'il n'y a qu'une variable) et déterminer l'ensemble où les fonctions sont différentiables :

a) $f(x, y) = y \sin(xy)$

e) $G(R, T) = R^3T + R^2T^2 + RT^3$

b) $g(u, v) = \left(uv^2, \frac{1}{u+v-1}\right)$

f) $\phi(p, q) = (\ln(p^2q^2), \ln(p - q + 1))$

c) $h(x, y, z) = (x^2(y + 1), xz^2, y + 1)$

g) $u(\omega, t) = (e^{\omega t}, \sin(\omega t), \omega t)$

d) $\gamma(t) = (\sqrt{2+t}, \sqrt{2-t})$

h) $F(r, \theta, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \theta)$

Exercice 9 – Gradient et différentielle des fonctions réelles

Pour les fonctions suivantes, écrire le gradient et la différentielle en tout point, et puis au point indiqué :

a) $f(x, y) = y \sin(xy)$ en $(1, \frac{\pi}{2})$

b) $G(R, T) = R^3T + R^2T^2 + RT^3$ en $(3, 2)$

Exercice 10 – Dérivée directionnelle

Pour les fonctions suivantes, trouver la dérivée directionnelle dans la direction du vecteur donné :

a) $f(x, y) = y \ln(xy)$ dans la direction de $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$

b) $g(x, y, z) = x e^{yz}$ dans la direction de $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

Exercice 11 – Dérivée directionnelle [Facultatif]

Un randonneur se promène sur une montagne qui ressemble au graphe de la fonction $f(x, y) = xy^2$, dans un voisinage du point $(2, 1)$. Il arrive au point $(2, 1, 2) = (2, 1, f(2, 1))$ de la montagne depuis la direction $\vec{d} = 2\vec{i} - \vec{j}$, et là démarrent trois chemins de direction

$$\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}, \quad \vec{v} = \vec{i} + \vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{w} = \vec{j} - \vec{i}.$$

a) Quel chemin doit-il prendre pour monter la pente le plus doucement possible ?

b) Quelle est la direction où il faudrait réaliser un nouveau chemin qui monterait la pente le plus rapidement possible ?

c) Au retour, en passant par le même point, quel chemin doit-il prendre, parmi les quatre existant, pour descendre la pente le plus rapidement possible ?

Exercice 12 – « Décomposées » [Facultatif]

Exprimer les fonctions suivantes comme composées de fonctions élémentaires :

a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

c) $F(x, y, z) = \sin(x^2 + 3yz)$

b) $g(x, y) = e^{\sin(xy)}$

d) $G(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$

TD 3 – DIFFÉRENTIELLE, JACOBIENNE, RÈGLE DE LA CHAÎNE

Exercice 13 – Matrice Jacobienne des fonctions vectorielles

Pour les fonctions vectorielles suivantes, calculer la matrice Jacobienne et, si possible, le déterminant Jacobien en tout point, et puis au point indiqué :

- a) $g(u, v) = \left(uv^2, \frac{1}{u+v-1} \right)$ en $(1, 1)$
- b) $h(x, y, z) = \left(x^2(y+1), xz^2, y+1 \right)$ en $(1, 0, 1)$
- c) $\phi(p, q) = \left(\ln(p^2q^2), \ln(p-q+1) \right)$ en $(1, 1)$
- d) $u(\omega, t) = \left(e^{\omega t}, \sin(\omega t), \omega t \right)$ en $(\pi, 1)$
- e) $F(r, \theta, \varphi) = \left(r \cos \varphi, r \sin \theta \right)$ en $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

Exercice 14 – Règle de la chaîne

Soient $x = x(t)$ et $y = y(t)$ deux fonctions dérivables en tout $t \in \mathbb{R}$. Trouver la dérivée par rapport à t de

- a) $f(x, y) = x^2 + 3xy + 5y^2$
- b) $g(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$
- c) $h(x, y) = \left(\frac{x}{x+y}, \frac{y}{x-y} \right)$

Exercice 15 – Règle de la chaîne

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur \mathbb{R}^2 , de variables (x, y) . Trouver la dérivée de f par rapport à t quand

- a) $x = \sin t$ et $y = \cos t$
- b) $x = e^{-t}$ et $y = e^t$

Exercice 16 – Règle de la chaîne

Soit f une fonction de plusieurs variables à valeur réelle, de classe C^1 . Calculer les dérivées partielles de la fonction g en fonction des dérivées partielles de f , dans les cas suivants :

- a) $g(x, y, z) = f(x^2 + 3yz, y^2 - z^2)$
- b) $g(x, y, z) = (f(x^2 + 3yz, y^2 - z^2))^2$
- c) $g(x, y, z) = \ln(f(x^2 + 3yz, y^2 - z^2))$
- d) $g(x, y) = f(\sin x, \sin y, xy^2)$
- e) $g(x, y) = \ln(f(\sin x, \sin y, xy^2))$
- f) $g(x, y) = e^{f(\sin x, \sin y, xy^2)}$

Exercice 17 – Règle de la chaîne

Soit $z(x) = f(x, y(x))$, où $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 et $y = y(x)$ est une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R} . Calculer la dérivée $z'(x)$ en fonction des dérivées partielles de f et de la dérivée de y par rapport à x .

Appliquer la formule trouvée aux cas particuliers suivants (tous indépendants) :

- a) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 4y^2$
- b) $f(x, y) = xy^2 + x^2y$
- c) $y = e^{3x}$
- d) $y = \ln x$

Exercice 18 – Règle de la chaîne [Facultatif]

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction avec dérivées partielles

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{2x}{y-1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -\frac{x^2}{(y-1)^2}.$$

- a) Calculer les dérivées partielles de la fonction $F(u, v) = f(2u - v, u - 2v)$.
- b) Calculer la dérivée de la fonction $G(t) = f(t + 1, t^2)$.

Exercice 19 – Différentielle de fonctions composées [Facultatif]

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur \mathbb{R}^2 , et posons

$$\text{a) } g(x, y) = f(x^2 - y^2, 2xy)$$

$$\text{b) } g(x, y, z) = f(2x - yz, xy - 3z)$$

Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f , et écrire la différentielle de g .

Exercice 20 – Jacobienne de fonctions composées [Facultatif]

Soit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction différentiable sur \mathbb{R}^2 , et posons

$$\text{a) } g(x, y) = h(x^2 - y^2, 2xy)$$

$$\text{b) } g(x, y, z) = h(2x - yz, xy - 3z)$$

Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de h , et écrire la matrice Jacobienne de g .

Exercice 21 – Jacobienne de fonctions composées

Soient $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ les deux fonctions définies par

$$F(x, y) = (x e^y, y e^x)$$

$$G(u, v) = (u + v, u - v).$$

Calculer les matrices Jacobiennes de F , de G et des deux fonctions composées $f = G \circ F$ et $g = F \circ G$. Comparer les matrices Jacobiennes de f et de g au produit des matrices Jacobiennes de F et de G .

Exercice 22 – Jacobienne de fonctions composées [Facultatif]

Soient $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ deux fonction différentiables sur \mathbb{R}^2 , dont on connaît les matrices Jacobiennes

$$J_F(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ 2x + 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J_G(u, v) = \begin{pmatrix} -2u & 2v \\ 3u^2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer la matrice Jacobienne et le déterminant Jacobien des fonctions composées $f(x, y) = G(F(x, y))$ et $g(u, v) = F(G(u, v))$.

TD 4 – HESSIENNE, TAYLOR, EXTREMA LOCAUX

Exercice 23 – Matrice Hessienne

Calculer la matrice Hessienne et le déterminant Hessian des fonctions suivantes, en tout point et puis au point indiqué :

a) $f(x, y) = x^3y + x^2y^2 + xy^3$ en $(1, -1)$

c) $h(x, y, z) = xy^2 + yz^2$ en $(0, 1, 2)$

b) $g(\varphi, \theta) = \varphi \sin \theta - \theta \sin \varphi$ en $(0, \frac{\pi}{2})$

d) $F(u, v) = \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}$ en $(1, 1)$

Exercice 24 – Laplacien

Calculer le Laplacien des fonctions de l'Exercice 23 en tout point, puis au point indiqué.

Exercice 25 – Fonctions harmoniques

Trouver les valeurs de $c \in \mathbb{R}^*$ pour lesquels la fonction $u(x, y, t) = x^2 + y^2 - c^2t^2$ est harmonique.

Exercice 26 – Laplacien [Facultatif]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur \mathbb{R} et posons $F(x, y) = f(x - 2y)$.

a) Calculer le Laplacien de F en (x, y) , c'est-à-dire la valeur $\Delta F(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y)$.

b) Déterminer toutes les fonctions f telles que $\Delta F(x, y) = 25(x - 2y)^4$.

Exercice 27 – Formule de Taylor

Donner la partie principale du développement de Taylor à l'ordre 2 des fonctions suivantes, autour du point indiqué :

a) $f(x, y) = \frac{\cos x}{\cos y}$ autour de $(0, 0)$

b) $g(x, y) = \ln(xy^2 + 1)$ autour de $(1, 1)$ et puis de $(1, -1)$

c) $h(x, y) = e^{x+3xy+y^2}$ autour de $(0, 0)$ et puis de $(1, 1)$

d) $u(x, y, z) = 3 + z \sin(\pi/2 + x + y^2)$ autour de $(0, 0, 0)$

Exercice 28 – Approximation

La puissance utilisée dans une résistance électrique est donnée par $P = E^2/R$ (en watts), où E est la différence de potentiel électrique (en volt) et R est la résistance (en ohm). Si $E = 200$ volt et $R = 8$ ohm, quelle est la modification de la puissance si E décroît de 5 volt et R de 0.2 ohm? Comparer les résultats obtenus par le calcul exact avec l'approximation fournie par la différentielle de $P = P(E, R)$.

Exercice 29 – Rappel : extrema locaux de fonctions d'une variable réelle [Facultatif]

Pour la fonction réelle

$$f(x) = \ln(2 - 2x^2 + x^4),$$

trouver le domaine de définition et les points critiques. Ensuite déterminer le signe de f'' dans les points critiques : la fonction admet-elle des extrema locaux?

Exercice 30 – Points critiques et extrema

Pour chacune des fonctions suivantes, trouver et étudier les points critiques. La fonction admet-elle des extrema locaux?

a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$

b) $g(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$

c) $h(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$

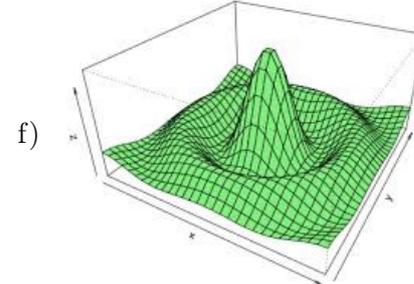
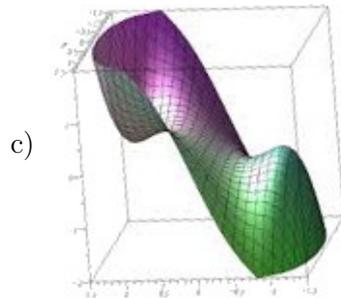
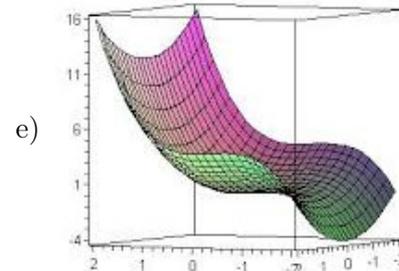
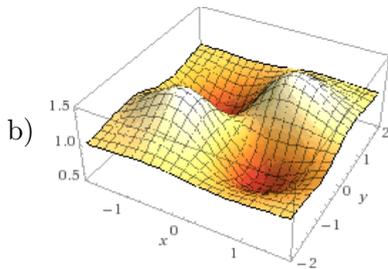
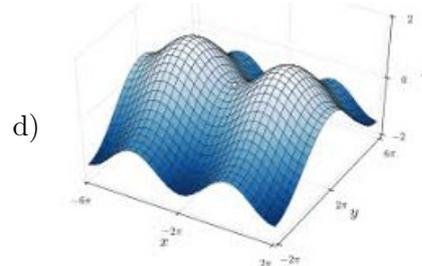
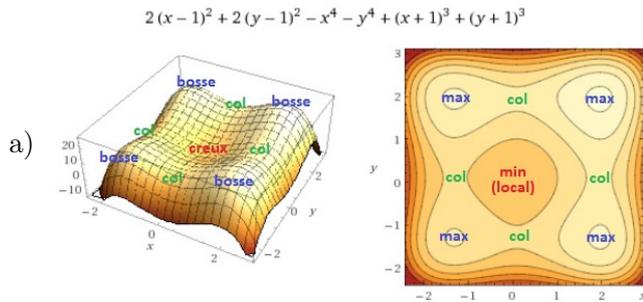
d) $F(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^3$

e) $G(x, y) = \ln(2 + x^2 - 2xy + 6y^2)$

f) $H(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 - 2x + 2y^2}$

Exercice 31 – Points critiques et extrema

Pour les fonctions représentées par les graphes suivantes, indiquer tous les points critiques et les extrema locaux :



Exercice 32 – Application des extrema : optimisation [Facultatif]

On veut construire une boîte en forme de parallélépipède rectangle (ouverte en haut) de volume 4 m^3 , avec base et faces d'aire totale minimale.

Quelles dimensions doit-on prendre pour la boîte ?



TD 5 – INTÉGRALES DOUBLES ET TRIPLES, AIRE ET VOLUME

Exercice 33 – Intégrales doubles

Calculer les intégrales doubles suivantes :

- a) $\iint_D (1 + x + x^3)(y^2 + y^4) dx dy$, où $D = [0, 1] \times [0, 1]$.
- b) $\iint_D (1 + x + x^3 + y^2 + y^4) dx dy$, où $D = [0, 1] \times [0, 1]$.
- c) $\iint_D (1 + x + x^3 + y^2 + y^4) dx dy$, où D est la partie bornée du plan délimitée par les droites $x = 0$, $y = x + 2$ et $y = -x$.
- d) $\iint_D (1 + x + x^3 y^2 + y^4) dx dy$, où D est délimité par $x = 0$, $y = x + 2$ et $y = -x$.
- e) $\iint_D \sin(x + y) dx dy$, où D est le triangle plein $D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq \pi\}$.
- f) $\iint_D (4 - x^2 - y^2) dx dy$, où $D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ est un quart du disque unité.
- g) $\iint_D x^2 dx dy$, où $D = \{(x, y) \mid x \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ est un secteur d'anneau.

Exercice 34 – Aire de surfaces planes

Calculer l'aire des surfaces S suivantes :

- a) S est la partie bornée du plan délimitée par les courbes d'équation $y = x$ et $y^2 = x$.
- b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2/2 \leq x \leq 2\}$.
- c) S est la partie du plan délimitée par l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. [Poser $x = 2\rho \cos \varphi$ et $y = 3\rho \sin \varphi$.]

Exercice 35 – Intégrales triples

Calculer les intégrales triples suivantes :

- a) $\iiint_{\Omega} (1 + x^3)(2y + y^2)(z + 6z^3) dx dy dz$, où $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.
- b) $\iiint_{\Omega} (x^3 y^2 z - x y^2 z^3) dx dy dz$, où $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.
- c) $\iiint_{\Omega} x^2 y e^{xyz} dx dy dz$, où $\Omega = [0, 1] \times [0, 2] \times [-1, 1]$.
- d) $\iiint_B \frac{xy}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, où B est la boule de \mathbb{R}^3 de rayon 1 centrée en l'origine.

Exercice 36 – Volumes

Calculer le volume des ensembles $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ suivants :

- a) Ω est le tronc de cylindre d'équation $x^2 + y^2 = R^2$, pour $z \in [0, H]$.
- b) Ω est le récipient délimité en bas par le parabolôïde d'équation $z = x^2 + y^2$ et en haut par le disque $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}$. [Utiliser les coordonnées cylindriques.]

TD 6 – MOYENNE ET CENTRE DE MASSE

Exercice 37 – Quantité totale et moyenne

Une substance de concentration $f(x, y, z) = \frac{1}{z+1}$ occupe le récipient Ω délimité en bas par le parabolôïde $z = x^2 + y^2$ et en haut par le disque $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}$. Trouver la quantité totale de substance contenue dans Ω et la quantité moyenne.

Exercice 38 – Centre de masse

- Trouver le centre de gravité de la surface plane homogène délimitée par la parabole $y = 6x - x^2$ et la droite $y = x$.
- Déterminer le centre de gravité d'un demi-disque homogène.
- Calculer la masse totale du cube $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ de \mathbb{R}^3 ayant pour densité de masse $\mu(x, y, z) = x^2y + xz^2$. Calculer ensuite le centre de masse du cube.

Exercice 39 – Culbuto homogène en équilibre



Un *culbuto* est un objet avec base arrondie fait de telle manière que si on le déplace de la position verticale il y revient en oscillant.

[Photo : MONSIEUR COLBUTO de HIBAI AGORRIA MUNITIS]

Considérons le culbuto homogène constitué d'une demi-boule de rayon 1 surmontée d'un cône de hauteur $a > 0$. Nous voulons trouver les valeurs de a pour lesquelles le culbuto revient à l'équilibre en position verticale, en sachant que cela arrive si le centre de masse G se trouve strictement en dessous du plan qui sépare la demi-boule du cône.

Soit K_a l'ensemble des points $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ avec $-1 \leq z \leq a$ et tels que

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 & \text{si } -1 \leq z \leq 0 & \text{(demi-boule),} \\ x^2 + y^2 \leq \left(1 - \frac{z}{a}\right)^2 & \text{si } 0 \leq z \leq a & \text{(cône plein).} \end{cases}$$

- Dessiner K_a et en calculer le volume.
- Pour tout $z \in [-1, a]$, soit D_z le disque contenu dans K_a à hauteur z fixée. Dessiner D_z , trouver son rayon et calculer son aire.
- Trouver le centre de masse de K_a , en sachant qu'il se trouve sur l'axe \vec{Oz} .
- Trouver les valeurs de $a > 0$ pour que le culbuto K_a revienne à l'équilibre en position verticale.