DAEU-B **MAT***

PROBABILITES

I. LANGAGE DES PROBABILITÉS.

1- Notion d'expérience aléatoire :

- Une **expérience aléatoire** est une expérience dont les résultats (ou issues) dépendent du hasard.
- L'ensemble de toutes les **issues** d'une expérience aléatoire est appelé **univers** (ou univers des possibles).
  On note généralement cet ensemble Ω.

Exemples I.1 :

- Lancer un dé est une expérience aléatoire dont l'univers $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.
- On lance une pièce de monnaie : $\Omega = \{P ; F\}$.
- On lance deux pièces de monnaie : $\Omega = \{PP ; PF ; FP ; FF\}$.
- On lance deux dés : $\Omega = \{(i ; j) \text{ où } 1 \leq i \leq 6 \text{ et } 1 \leq j \leq 6\}$.

2- Notion d'évènements :

- Un **événement** est un ensemble constitué de plusieurs issues de l'univers, c'est donc une partie de l'univers.
- Un **événement élémentaire** est un événement constitué d'une seule issue.

Cas particuliers d'événements :

- **L'événement certain**, noté Ω : il se produit obligatoirement.
- **L'événement impossible**, noté $\emptyset$: il ne peut pas se produire.

Exemple I.2 :
Dans le cas du lancer de dé, nous pouvons considérer différents évènements, par exemple :

A : « le numéro est pair », on note $A = \{2 ; 4 ; 6\}$.
B : « le numéro est strictement supérieur à 3 », on note $B = \{4 ; 5 ; 6\}$.
C : « le numéro est 5 », on note $C = \{5\}$ (C'est un événement élémentaire).
D : « le numéro est 7 », on note $D = \varnothing$ (C'est un événement impossible).
E : « le numéro est entre 1 et 6 », on note $E = \Omega$ (C'est l'évènement certain).

Une épreuve amène la réalisation ou la non réalisation d'un tel évènement :
ainsi, si nous jetons le dé et que le numéro 4 sort, pour cette épreuve,
l'évènement A est réalisé, l'évènement B aussi, l'évènement C n'est pas réalisé.

Exemple I.3 :
On tire une carte d'un jeu de 32 cartes : Ω = ensemble des 32 cartes
« Obtenir un cœur » est un événement
« Obtenir le 7 de cœur », « le 8 de cœur », … sont des évènements élémentaires.

3- Réunion et intersection de deux évènements, incompatibilité :

Définitions :
Soit A et B deux évènements.

- Les issues qui sont dans au moins l'un des deux événements A **OU** B constituent l'événement $A \cup B$, **réunion** de A et B.
- Les issues qui sont dans l'événement A **ET** dans l'événement B constituent l'événement $A \cap B$, **intersection** de A et B.

Exemple I.4 :
On lance deux dés et on considère la somme obtenue :

$$\Omega = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12\}.$$

Soit A « obtenir un nombre pair » : $A = \{2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12\}$.
Soit B « Obtenir un multiple de trois » : $B = \{3 ; 6 ; 9 ; 12\}$.
Soit C « Obtenir une somme supérieure à 10 » : $C = \{10, 11, 12\}$.
Soit D « Obtenir une somme inférieure à 6 » : $D = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.
On a alors : $A \cap B = \{6 ; 12\}$, $A \cup B = \{2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 ; 10 ; 12\}$, $C \cap D = \varnothing$.

Remarque :
$A \cap B = \varnothing$ signifie que A et B n'ont aucune issue en commun (ils ne peuvent pas être réalisés en même temps).

Définition :
Deux évènements A et B sont **disjoints** (ou **incompatibles**) si : $\boxed{\mathbf{A \cap B = \varnothing.}}$

Exemple I.5 :
On tire une carte d'un jeu de 32 cartes.
Les évènements « tirer un roi » et « tirer un sept » sont incompatibles.
Les évènements « tirer un roi » et « tirer un cœur » ne sont pas incompatibles.

4- Evènements contraires :

Définition :
Soit A un événement de l'univers Ω.
L'événement contraire (ou complémentaire) de A, noté $\overline{A}$, est l'événement constitué des issues de Ω n'appartenant pas à A.

Remarques :

- $A \cap \overline{A} = \varnothing$ (autrement dit A et $\overline{A}$ sont incompatibles).
- $A \cup \overline{A} = \Omega$ (faire un schéma).

Exemple I.6 :
On lance deux fois de suite une pièce de monnaie : $\Omega = \{(P, P) ; (P, F) ; (F, P) ; (F, F)\}$.
Soit A l'événement « obtenir deux fois pile » : $A = \{(P ; P)\}$.
L'événement contraire de A est $\overline{A} = \{(P, F) ; (F, P) ; (F, F)\}$ et qui signifie « obtenir au moins une fois face ».

5- Implication :

On dit qu'un événement A implique un événement B si la réalisation de A entraîne celle de B, on note alors $A \subset B$.

Exemple I.7 :
Dans le cas du lancer d'un dé, soit $A = \{6\}$ et $B = \{2 ; 4 ; 6\}$. On a ici $A \subset B$.

☺**Exercice I.1: Utilisation d'un arbre pour décrire des évènements**

Une urne contient 5 boules rouges et 1 boule noire indiscernables au toucher.
On tire successivement sans remise 3 boules de l'urne.

a) Déterminer l'univers des possibilités.
b) Décrire les évènements A « la première boule tirée est rouge » et B « la deuxième boule tirée est rouge ».
c) A et B sont-ils compatibles ?

Recommencer avec un tirage avec remise.

II. CALCULS DE PROBABILITÉS.

Soit $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \omega_3 ; \ldots ; \omega_n\}$ l'univers d'une épreuve aléatoire, ou chaque ω_i désigne une issue.

1- Définition d'une probabilité :

Définition :
Une **probabilité** sur Ω est une application P de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des évènements dans l'intervalle [0 ; 1] telle que :

- $\boxed{P(\Omega) = 1}$;
- Pour tout événement A : $0 \leq P(A) \leq 1$;
- Pour tous évènements A et B **incompatibles** : $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B).}$

2- Loi de probabilité sur un univers Ω :

Définition :
Définir une **loi de probabilité** P sur Ω, c'est associer, à chaque événement élémentaire ω_i, des nombres $p_i \in [0 ; 1]$, appelés probabilités de ω_i, tels que :

- $\sum_i p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$;
- la probabilité d'un événement A, notée P(A), est la somme des probabilités p_i des évènements élémentaires ω_i qui constituent A.

Remarque : On note aussi $p_i = P(\{\omega_i\}) = P(\omega_i)$.

Exemple II.1 :
Soit un dé truqué dont les probabilités d'apparition des faces sont donnés par le tableau suivant :

Issue ω_i	1	2	3	4	5	6
$P(\omega_i)$	0,05	0,05	0,1	0,1	0,2	?

La probabilité de l'événement A : « Obtenir un résultat inférieur ou égal à 4 » est :
$P(A) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = 0{,}05 + 0{,}05 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}3$.
La probabilité d'obtenir 6 est : $P(6) = 1 - (0{,}05 + 0{,}05 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}2) = 0{,}5$.

3- Propriétés d'une probabilité :

Propriétés :
- Pour tous évènements A et B : $\boxed{P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)}$.
- Pour tout événement A : $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$ et en particulier $\boxed{P(\emptyset) = 0}$.
- Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$.

☺**Exercice II.1 :**
Soit A et B deux évènements tels que $p(A) = \frac{1}{3}$, $p(B) = \frac{1}{2}$ et $p(A \cap B) = \frac{1}{4}$.
Calculer $p(A \cup B)$ et $p(\overline{A})$.

☺**Exercice II.2 :**
Dans une classe, 10% des élèves jouent d'un instrument à corde, 20% des élèves jouent d'un instrument à vent et 5% des élèves jouent d'un instrument à corde et d'un instrument à vent.
On note : C l'évènement : « l'élève joue d'un instrument à corde » ;
D l'évènement : « l'élève joue d'un instrument à vent ».
On choisit un élève au hasard.
Déterminer la probabilité des évènements : $C\cup V$, $\overline{C \cup V}$ et $\overline{C} \cap \overline{V}$.

4- Une situation fondamentale : **l'équiprobabilité** :

Définition :
Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité** ou que la loi de probabilité est **équirépartie** ou encore que la probabilité est **uniforme**.

Ainsi, notons n le nombre d'issues de Ω.

Comme tous les évènements élémentaires ont la même probabilité : $p_i = p$

et comme $\sum_i p_i = 1$ alors $np = 1$ soit $p = \frac{1}{n}$.

Soit A un événement de Ω constitué de k issues.

$P(A) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n} = k \times \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$.

<u>Théorème</u> :

Soit A un événement de Ω.

Lorsqu'il y a **<u>équiprobabilité</u>**, la probabilité d'un événement A est :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues de A}}{\text{nombre d'issues de } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}.$$

<u>Exemple II.2</u> :

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Chaque carte ayant la même probabilité d'être tirée, il y a équiprobabilité.

Soit A : « Tirer un valet » ; B : « Tirer une carte rouge » ; C : « Tirer le valet de cœur » et D : « Tirer un valet ou une carte rouge ».

Ainsi : $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$; $P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$; $P(C) = \frac{1}{32}$.

$P(D) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Or, $P(A \cap B) = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$.

Donc $P(D) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{2+4-1}{16} = \frac{5}{16}$.

III. EXERCICES D'APPLICATIONS.

☺**<u>Exercice III.1</u> :**

On tire 3 cartes d'un jeu de 32 cartes.

Calculer la probabilité des évènements suivants :

A : « Obtenir trois as » ;

B : « Obtenir deux rois et une dame » ;

C : « Obtenir au moins un valet ».

☺**Exercice III.2 :**

On jette simultanément un dé rouge et un dé blanc.
Calculer la probabilité des évènements suivants :

A : « Obtenir un double (deux numéros égaux) »
B : « Obtenir un 2 et un 5 »
C : « Obtenir un 2 rouge et un 5 blanc »
D : « Obtenir une somme égale à 7 »
E : « Obtenir une somme au plus égale à 3 »
F : « Obtenir une somme au plus égale à 11 »

☺**Exercice III.3 :**

Une urne contient 5 boules blanches et 3 boules rouges.

1- On tire deux boules : quelle est la probabilité d'avoir deux boules blanches ?
2- On tire une boule, on observe sa couleur et on la remet dans l'urne, puis on tire de nouveau une boule et on observe sa couleur : quelle est la probabilité d'avoir deux boules blanches ?
3- On tire successivement deux boules sans remise : quelle est la probabilité des évènements suivants :
   a) A : « les deux boules tirées sont blanches »
   b) B : « la première est rouge et la seconde blanche »
   c) C : « les deux boules tirées sont rouges »
   d) D : « la première est blanche et la seconde est rouge »
   e) E : « l'une est blanche et l'autre et rouge »

☺**Exercice III.4 :**

1- On tire une carte d'un jeu de 32 cartes ; quelle est la probabilité pour que cette carte soit un as ou une figure ?
2- Une loterie comporte l'émission de 100 billets dont 3 gagnants ; on prend 5 billets : quelle est la probabilité de gagner :
   a) un lot ?
   b) au moins un lot ?
3- On tire successivement trois cartes d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité pour que la deuxième carte tirée, et celle-là seulement, soit un as ?
4- On tire 8 cartes d'un jeu de 32 cartes, quelle est la probabilité d'avoir les 4 rois parmi ces huit cartes ?
5- D'un jeu de 32 cartes on en extrait 8, au hasard. Calculer la probabilité :
   a) pour qu'on ait extrait 5 coeurs, et 5 seulement.
   b) pour qu'on ait extrait au moins 5 coeurs.

☺**Exercice III.5 :**

Un illusionniste dispose, dans une malle, de x lapins dont 4 blancs.
Au hasard, il tire d'abord un lapin de la malle, puis sans le remettre, en tire un second. Pour la réussite d'une manifestation, l'illusionniste s'intéresse à l'événement suivant : « le premier lapin est blanc et le second est noir ».

1- Déterminer la probabilité de l'événement A en fonction de x.
2- Soit f la fonction définie sur [4 ; +∞[par $f(x) = \dfrac{4(x-4)}{x(x-1)}$.

   Etudier la fonction f puis en déduire la ou les valeurs entières de x rendant la probabilité de A maximale.

IV. Notion de probabilités conditionnelles.

1- Exemple d'introduction :

Considérons un lancer de dé dans le cas de l'équiprobabilité des évènements élémentaires de $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.
Soit A l'événement « le résultat est pair » : $A = \{2 ; 4 ; 6\}$.
Soit B l'événement « le résultat est supérieur ou égal à 4 » : $B = \{4 ; 5 ; 6\}$.
On a $P(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$. De même $P(B) = \dfrac{1}{2}$.
Dire que A est réalisé signifie que le résultat est 2, 4 ou 6.
Alors B est réalisé dans deux de ces trois cas équiprobables : lorsque le résultat est 4 ou 6, c'est-à-dire lorsque $A \cap B$ est réalisé.
Ainsi, la probabilité de B sachant que A est réalisé est $\dfrac{2}{3}$.

Soit $C = \{3 ; 4 ; 5\}$. On a $P(C) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.
Lorsque A est réalisé, C est réalisé dans un seul cas : quand le résultat est 4, c'est-à-dire quand $A \cap C$ est réalisé.
Ainsi la probabilité de C sachant que A est réalisé est $\dfrac{1}{3}$.

On peut remarquer que $\dfrac{P(A \cap C)}{P(A)} = \dfrac{1}{3}$.
En conclusion, le fait de disposer de l'information supplémentaire « A est réalisé » modifie la probabilité de B et celle de C ; nous avons introduit ici une nouvelle probabilité des évènements B et C.

2- Définition :

Dans l'univers Ω d'une épreuve aléatoire, on considère un événement B de probabilité non nulle.

Définition :
Pour tout événement A, on appelle **probabilité conditionnelle de A sachant B**, notée $P_B(A)$ ou $P(A/B)$, le nombre $\boxed{P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}}$.
Cette égalité permet d'exprimer **la probabilité de l'intersection** :
$\boxed{P(A \cap B) = P_B(A)P(B)}$.

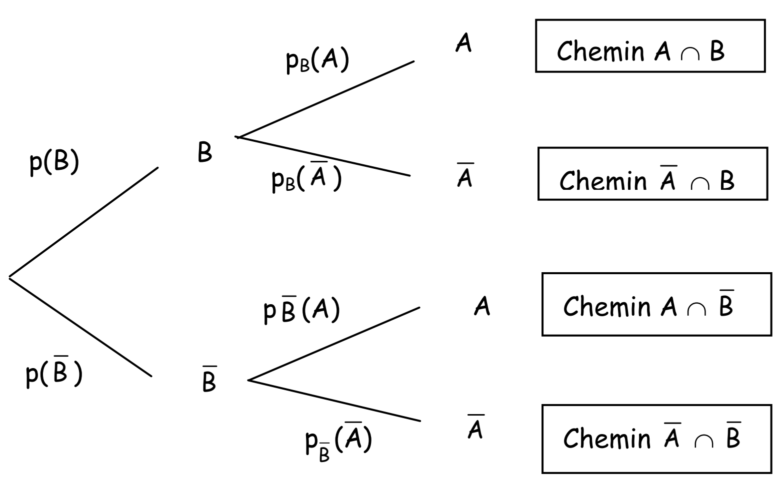
Remarque: On a de même $P_A(B) = P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ et donc $P(A \cap B) = P_A(B)P(A)$.

☺**Exercice IV.1 :**
On considère deux évènements A et B tels que $P(A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}6$ et $P(A \cup B) = 0{,}7$. Calculer $P(A \cap B)$, $P(A/B)$ et $P_A(B)$.

3- Utilisation d'un arbre de probabilité :

Dans l'univers Ω d'une épreuve aléatoire, on considère un événement B de probabilité différente de 0 et 1.
Etant donné un événement A conditionné par l'événement B, on visualise la situation à l'aide d'un **arbre de probabilités** :

- Une **branche** est représentée par un segment ; chacune porte une probabilité.
- Un **nœud** est la jonction de deux ou plusieurs branches.
- Un **chemin** est l'événement réalisé en suivant des branches successives.



Propriétés :

- La somme des probabilités portées sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées sur ses branches.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y aboutissent. (Formule des **probabilités totales**).

☺**Exercice IV.2 :**

Dans un magasin de luminaires, les appliques représentent 20% des ventes, les suspensions 30% et les lampes à pied 50%.
Chaque luminaire est fourni avec une ampoule au choix de l'acheteur.
On a constaté que pour 35% des appliques, 40% des suspensions et 70% des lampes à pied, le choix est une ampoule à faible consommation.
On considère au hasard un client achetant un luminaire et on considère les évènements suivants :
A : « le client achète une applique »
L : « le client achète une lampe à pied »
B : « le client achète une suspension »
F : « le client choisit une ampoule à faible consommation »
Calculer la probabilité pour que le client choisisse une ampoule à faible consommation.

☺**Exercice IV.3 :**

Dans une région d'un pays en voie de développement, 15% de la population est atteinte par un certain virus. On met en place un test de dépistage. On tire au hasard un individu dans la région. Tous les individus ont la même probabilité d'être choisis.
On note A l'évènement: « l'individu est sain » et P l'événement: « l'individu a un test positif ».
Pour les individus sains, 0,4% ont un test positif.
Pour les individus atteints de la maladie, 2,4% ont un test négatif.

Calculer la probabilité que le test soit erroné.

☺**Exercice IV.4 :**

Chaque jour dans une usine, 3 machines A, B et C produisent respectivement 40%, 50% et 10% de pièces dont 2% sont défectueuses pour A, 1% pour B et 1% pour C. On prélève une pièce qui s'avère défectueuse. Quelle est la probabilité pour que cette pièce ait été fabriquée par la machine A ?

V. Evènements indépendants.

Dans l'univers Ω d'une épreuve aléatoire, on considère deux événements A et B.

Définition :

On dit que deux évènements A et B sont **indépendants** si et seulement si:

$\boxed{P(A\cap B) = P(A)P(B)}$.

Propriété :

Lorsque $P(B) \neq 0$, A et B sont indépendants équivaut à $P_B(A) = P(A)$.

(ou lorsque $P(A) \neq 0$, à $P_A(B) = P(B)$.)

Autrement dit, la probabilité de l'un est la même avec ou sans la condition que l'autre se réalise.

Remarque :

Lorsque A et B sont indépendants, il en est de même pour A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

ATTENTION :

On veillera à ne pas confondre évènements indépendants et évènements incompatibles. En effet, par définition, deux évènements sont dits incompatibles lorsque $A\cap B = \emptyset$. Il en résulte que $P(A\cap B) = P(\emptyset) = 0$, et donc dans ce cas, l'égalité $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$ est impossible si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Donc deux évènements A et B incompatibles tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ ne sont jamais indépendants.

☺**Exercice V.1 :**

a) Une urne contient 5 boules rouges et 1 boule noire indiscernables au toucher.
On tire successivement sans remise 3 boules de l'urne.
On considère les évènements A « la première boule tirée est rouge » et B « la deuxième boule tirée est rouge ».
Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

b) Recommencer pour un tirage avec remise.

c) Pouvait-on prévoir ces résultats ?

☺**Exercice V.2 :**

Un atelier produit un composant optique en deux phases indépendantes. La première est susceptible de faire apparaître un défaut α sur 2% des composants, la seconde un défaut β sur 4% des composants. On prélève un composant au hasard dans la production d'une journée. On appelle A : « le composant présente le défaut α » et B : « le composant présente le défaut β ».

Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

a) le composant présente les deux défauts ;
b) le composant présente au moins un des deux défauts ;
c) le composant ne présente aucun des deux défauts ;
d) le composant présente exactement un défaut.